P. GÉRARD

Remarques sur l'analyse semi-classique de l'équation de Schrödinger non linéaire

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1992-1993), exp. n° 13, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1992-1993____A13_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1992-1993

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

REMARQUES SUR L'ANALYSE SEMI-CLASSIQUE DE L'EQUATION DE SCHRÖDINGER NON LINEAIRE

P. GERARD

Exposé n° XIII

27 Avril 1993

Introduction On se propose d'étudier le comportement, quand le paramètre positif h tend vers 0, de la solution ψ_h de l'équation de Schrödinger non linéaire

$$(1) \qquad -ih\partial_t\psi_h - \frac{h^2}{2}\Delta_x\psi_h + f(|\psi_h|^2)\psi_h = 0, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^d ,$$

dont la valeur à $t = 0$ est donnée par

$$\psi_h(0,x) = a^0(x,h)e^{iS^0(x)/h} .$$

Ici f est C^∞ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, S^0 est une fonction C^∞ réelle de x, et a^0 est, par exemple, une fonction polynomiale de h à coefficients C^∞ en x. Pour éviter d'avoir à spécifier les conditions à l'infini en x, on supposera que a^0, S^0 sont périodiques par rapport à un réseau Γ de $\mathbb{R}^d$ et on considèrera donc ψ_h comme une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{T}^d_x$ où $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\Gamma$. Néanmoins, les résultats que nous allons présenter seraient analogues sur $\mathbb{R}^d$ avec des conditions à l'infini de type espaces de Sobolev. Enfin, pour simplifier la discussion, on pourra supposer a priori que ψ_h existe sur un intervalle de temps $[0,T]$, avec $T > 0$ indépendant de h (sous des hypothèses supplémentaires sur a^0, S^0, f cela sera en fait conséquence de nos résultats, voir §2). On pourra trouver des critères simples sur f et d pour qu'il en soit ainsi, avec $T = +\infty$, dans l'article de Ginibre et Velo [GV].

Le but de ce travail est d'examiner, dans ce cadre non linéaire, la pertinence de la "méthode WKB", c'est-à-dire l'approximation de ψ_h, sur un petit intervalle de temps, par une expression de la forme

$$\psi_h^{ap}(t,x) = a(t,x,h)e^{iS(t,x)/h} ,$$

où S est C^∞ réelle, et a admet, suivant les puissances de h, un développement asymptotique à coefficients C^∞ en t, x. Ce problème est donc à rapprocher des méthodes "d'optique géométrique non linéaire" qui ont donné récemment lieu à une importante littérature dans le cadre des systèmes hyperboliques non linéaires. Pour ne citer que les oscillations sur une seule phase, comme c'est le cas ici, mentionnons Choquet-Bruhat [C] pour les constructions formelles dans les cas semi-linéaire et faiblement quasi-linéaire (i.e. l'amplitude des oscillations est d'ordre h), Joly - Rauch [JR] pour leur justification dans le cas semi-linéaire, Guès [G] pour leur justification dans le cas faiblement quasi-linéaire, et D. Serre [S] pour la construction formelle de solutions oscillantes de grande amplitude sur un mode linéairement dégénéré d'un système quasi-linéaire.

Ici, la forme postulée de la solution apparente hD à un opérateur d'ordre 0, et l'équation (1) est donc plutôt du type quasi-linéaire ; notre problème est donc plus proche de la dernière référence ci-dessus. D'un autre côté, la structure très particulière de l'équation (1) $-f(|\psi|^2)$ n'oscille pas si ψ est une solution WKB $-$ la rend très proche d'une équation linéaire. Effectivement, au niveau formel, l'équation eikonale et les équations de transport de la théorie linéaire sont ici remplacées par un "système eikonal" hyperbolique non linéaire qui couple $\nabla_x S$ et $|a_0|^2$, et une suite de systèmes hyperboliques linéaires (voir §1). Il est remarquable que le système eikonal en question soit le système d'Euler isentropique

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \text{ div } (\rho v) = 0 \\ \partial_t v + \text{ Div } (\rho v \otimes v) + \nabla P(\rho) = 0 \ , \end{cases}$$

où la fonction de pression P est reliée à f, et $\rho = |a_0|^2, \ v = \nabla_x S$.

Plus délicate est la justification d'une telle approximation, que nous obtenons au §2, mais uniquement sous l'hypothèse a^0, S^0, f analytiques. En effet, cette hypothèse permet de construire une très bonne solution approchée, avec un second membre exponentiellement petit en h, ce qui autorise à conclure par un argument de point fixe dans un espace de fonctions exponentiellement petites.

Mentionnons enfin l'important travail de Jin - Levermore - Mc Laughlin [JLM1], décrit également dans [JLM2], qui traite de ce problème dans le cas $d = 1, f(\rho) = \rho$. D'après les travaux de Zakharov - Shabat [ZS], l'équation (1) peut alors se résoudre par la méthode spectrale inverse. Le propos de [JLM1] est d'utiliser cette méthode pour étudier ψ_h, ce qui, dans ce cas particulier, recouvre non seulement nos résultats – sans hypothèse d'analyticité, semble-t-il – mais permet aussi d'obtenir des renseignements pour tout temps. On trouve également dans [JLM2] les constructions formelles du §1.

1 Le cas de données C^∞.

Injectons dans l'équation

$$(1) \qquad -ih\partial_t \psi - \frac{h^2}{2}\Delta_x \psi + f(|\psi|^2)\psi = 0$$

l'expression

$$\psi(t,x,h) = a(t,x,h)e^{iS(t,x)/h} \ ,$$

où a est la série formelle en h à coefficients C^∞

$$a(t,x,h) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(t,x)h^j \ ,$$

et annulons le coefficient de h^j pour tout j. On obtient le système

$$(2) \qquad \begin{cases} \partial_t S + \frac{1}{2}(\nabla_x S)^2 + f(|a_0|^2) = 0 \\ \partial_t a + \nabla_x S \cdot \nabla_x a + \frac{1}{2} a \Delta_x S - \frac{ih}{2}\Delta_x a + \frac{ia}{h}(f(|a|^2) - f(|a_0|^2)) = 0 \ , \end{cases}$$

la deuxième équation s'entendant au sens des séries formelles, donc comme un système infini. Par exemple, la première équation de ce système (correspondant au transport de a_0) s'écrit

$$\partial_t a_0 + \nabla_x S \cdot \nabla_x a_0 + \frac{1}{2} a_0 \Delta_x S + 2ia_0 f'(|a_0|^2) Re(a_0 \bar{a}_1) = 0 \ .$$

Contrairement au système analogue pour une équation linéaire ou semi-linéaire, ce système n'est pas fermé – c'est-à-dire que l'équation de transport pour a_j fait intervenir a_{j+1}– ce qui rend délicate sa résolution. En fait, la structure particulière de l'équation (1) fait qu'un changement convenable d'inconnues aboutit à un système fermé. Posons en effet, si a ne s'annule pas,

$$\rho = |a|^2, \quad v = \nabla_x S + \frac{h}{2i\rho}(\bar{a}\nabla_x a - a\nabla_x \bar{a}) = \frac{h}{2i\rho}(\bar{\psi}\nabla_x \psi - \psi \nabla_x \bar{\psi})$$

Cette fois, les inconnues ρ et v sont toutes deux des séries formelles en h, et $\frac{v}{h}$ correspond au gradient d'une détermination φ de l'argument de ψ. Connaissant φ à $t = 0$, la connaissance de v permet de remonter à φ, et on a alors $\psi = \sqrt{\rho} \exp{(i\varphi/h)}$. On est alors ramené à résoudre le système

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \\ \partial_t v + \nabla_x \Big(\frac{|v|^2}{2} + f(\rho) \Big) = \frac{h^2}{2} \nabla_x \Big(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \Delta_x (\sqrt{\rho}) \Big) \end{cases} \tag{3}$$

en faisant l'hypothèse $\rho > 0$ partout. Le système pour les coefficients dominants s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \rho_0 + \operatorname{div}(\rho_0 v_0) = 0 \\ \partial_t v_0 + \nabla_x \Big(\frac{|v_0|^2}{2} + f(\rho_0) \Big) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Lorsque ρ_0 ne s'annule pas, la seconde équation peut être remplacée par

$$\partial_t(\rho_0 v_0) + \operatorname{Div}_x(\rho_0 v_0 \otimes v_0) + \nabla_x P(\rho_0) = 0$$

où $P(\rho) = \rho f(\rho) - F(\rho), F$ étant une primitive de f. Le système (4) n'est autre que le système d'Euler en régime isentropique avec la fonction de pression $P = P(\rho)$. On sait (voir par exemple Majda [M]) que ce système est hyperbolique symétrisable, pour des valeurs > 0 de ρ_0, dès que $f'(\rho) > 0$ pour tout $\rho > 0$, ce qui correspond à une fonction potentiel F strictement convexe sur $]0, \infty[$.

On peut alors résoudre le problème de Cauchy pour le système (4) sur un petit intervalle de temps $[0, T]$ dans l'espace des fonctions C^∞.

Revenons au système complet (3). Pour les coefficients ρ_j, v_j avec $j \geq 1$, on obtient une suite de systèmes linéaires ayant tous le même symbole principal, celui du système d'Euler isentropique linéarisé sur (ρ_0, v_0). Leur résolution sur le même intervalle de temps $[0, T]$ ne pose donc pas de difficulté. On a ainsi montré la proposition suivante :

Proposition 1.— *Soient* $S^0 \in C^\infty(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$ *et* $a^0 = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^0 h^j$ *une série formelle à coefficients dans* $C^\infty(\mathbb{T}^d, \mathbb{C})$. *On suppose que* a_0^0 *ne s'annule pas, et que* $f'(\rho) > 0$ *pour tout* $\rho > 0$.

Alors il existe $t_0 > 0$, $S^0 \in C^\infty([0, t_0] \times \mathbb{T}^d, \mathbb{R})$ *et* $a = \sum_{j=0}^{\infty} a_j h^j$, *une série formelle à coefficients dans* $C^\infty([0, t_0] \times \mathbb{T}^d, \mathbb{C})$, *tels que* $\psi = a \exp(iS/h)$ *soit solution formelle de l'équation (1) avec la donnée de Cauchy* $\psi^0 = a^0 \exp(iS^0/h)$.

Par un argument du type "lemme de Borel", on en déduit l'existence d'une solution approchée :

Corollaire 1.— *Avec les hypothèses et notations de la proposition 1, il existe une famille* (ψ_h^{ap}) *de* $C^\infty([0, t_0] \times \mathbb{T}^d)$ *telle que l'on ait, dans l'espace* $C^\infty([0, t_0] \times \mathbb{T}^d)$,

$$\text{(i)} \qquad -ih\partial_t \psi_h^{ap} - \frac{h^2}{2}\Delta_x \psi_h^{ap} + f(|\psi_h^{ap}|^2)\psi_h^{ap} = 0(h^\infty) \ ,$$

$$\text{(ii)} \qquad \forall N \in \mathbb{N}, \quad e^{-i\frac{S}{h}} \psi_h^{ap} = \sum_{j=0}^{N} a_j h^j + 0(h^{N+1}) \ .$$

Supposons maintenant donnée une solution exacte ψ_h de (1), telle que, à $t = 0$, on ait, dans $C^\infty(\mathbb{T}^d)$,

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad e^{-i\frac{S^0}{h}} \psi_h = \sum_{j=0}^{N} a_j^0(X) h^j + 0(h^{N+1})$$

Cherchons si ψ_h^{ap} est une bonne approximation de ψ_h lorsque h tend vers 0, au moins en norme L^2.

En posant $u_h = \psi_h - \psi_h^{ap}$ on a

$$ih\partial_t u_h + \frac{h^2}{2}\Delta u_h = g_h \ ,$$

avec $g_h = f(|\psi_h|^2)\psi_h - f(|\psi_h^{ap}|^2)\psi_h^{ap} + 0(h^\infty)$ dans $C^\infty([0, t_0] \times \mathbb{T}^d)$.

On en déduit (en oubliant les indices h pour le calcul)

$$\begin{aligned} h\frac{d}{dt}||u(t)||_{L^2}^2 &= 2 \ \mathrm{Im} \ (u(t), g(t))_{L^2} \\ &\leq [C||f(|\psi|^2) - f(|\psi^{ap}|^2)||_{L^2} + 0(h^\infty)]||u(t)||_{L^2} \end{aligned}$$

en utilisant le fait que f est réelle et que ψ_h^{ap} est uniformément bornée. Supposons alors, pour simplifier, que la fonction f croisse lentement à l'infini de sorte que l'on ait $f'(\rho) \leq C\rho^{-1/2}$. Alors

$$||f(|\psi|^2) - f(|\psi^{ap}|^2)||_{L^2} \leq C||u||_{L^2} ,$$

et on obtient

$$\frac{d}{dt}||u(t)||_{L^2} \leq \frac{C}{h}||u(t)||_{L^2} + 0(h^\infty) ,$$

soit

$$||u(t)||_{L^2} \leq e^{Ct/h} 0(h^\infty) .$$

Cette estimation ne permet hélas de justifier l'approximation de ψ_h par ψ_h^{ap} que sur un intervalle de temps du type $[0, Ah|\text{Log } h|]$, pour toute constante $A > 0$. En revanche, si l'erreur $0(h^\infty)$ était en fait majorée par $Me^{-\delta/h}$, on pourrait conclure sur l'intervalle de temps indépendant de h $[0, \delta/C[$. Ceci nous amène naturellement à reprendre l'étude des solutions approchées dans le cadre analytique.

2 Le cas de données analytiques.

Supposons maintenant que S^0 soit une fonction analytique réelle sur $\mathbb{T}^d$, et que le symbole $a^0 = \sum_j a_j^0 h^j$ soit analytique au sens de Sjöstrand [S], i.e. qu'il existe $\ell > 0,\ A > 0,\ B > 0$ tels que, pour tout $j, a_j^0(x)$ soit holomorphe pour $|\text{Im}\, x| < \ell$ et vérifie

$$|a_j(x)| \leq AB^j j!$$

Proposition 2.— *Si f est analytique au voisinage des valeurs prises par $|a_0^0|^2$ sur $\mathbb{T}^d$, il existe $t_0 > 0, S$ analytique réelle sur $([0, t_0] \times \mathbb{T}^d)$ et a un symbole analytique sur $([0, t_0] \times \mathbb{T}^d)$, tels que $\psi = a \exp\,(iS/h)$ soit solution formelle de l'équation (1) avec la donnée de Cauchy $\psi^0 = a^0 \exp\,(iS^0/h)$.*

Remarque : La proposition 2 précise donc les estimations sur les a_j et leurs dérivées. Elle présente également l'avantage de ne nécessiter aucune hypothèse sur le sens de variation de f ou sur l'annulation éventuelle de a_0^0.

Indiquons brièvement le principe de la démonstration de la proposition 2. On résout directement le système (2) en appliquant le théorème du point fixe dans une chaîne d'espaces de Banach, conformément aux versions abstraites du théorème de Cauchy - Kowaleski développées par Ovcyannikov, Nirenberg et Nishida.

On s'est en fait appuyé sur l'article plus récent de Baouendi - Goulaouic [BG], et, pour le choix des normes sur les espaces de symboles, sur l'approche de Sjöstrand [Sj].

On commence par réécrire le système (2) avec les inconnues $v = \nabla_x S$ et a dans le domaine complexe, et en notant $\bar{a}(t,x)$ le conjugué de $a(\bar{t},\bar{x})$:

$$(5) \qquad \begin{cases} \partial_t v = -v \cdot \nabla_x v - f(a_0 \bar{a}_0) \\ \partial_t a = -v \cdot \nabla_x a - \dfrac{1}{2} a \ \mathrm{div}\ (v) + \dfrac{ih}{2} \Delta_x a - \dfrac{ia}{h}(f(a\bar{a}) - f(a_0 \bar{a}_0)) \ . \end{cases}$$

Si $b = b(t,x,h)$ est un symbole analytique sur le domaine complexe $|t| < t_0$, $|\mathrm{Im}\, x| < \ell$, on pose, pour $\varepsilon > 0$ assez petit,

$$[b] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^j}{j!} \sup_{0<s<1} \sup_{|t|<t_0(1-s)} \sup_{|\mathrm{Im}\, x|<\ell s} |b_j(t,x)|(1 - s - \frac{|t|}{t_0})^j \ ,$$

$$||b|| = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^j}{j!} \sup_{0<s<1} \sup_{|t|<t_0(1-s)} \sup_{|\mathrm{Im}\, x|<\ell s} |b_j(t,x)|(1 - s - \frac{|t|}{t_0})^{j+1} \ .$$

Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a par définition $[b] < \infty$ et $||b|| < \infty$.

Si A est l'un des opérateurs $b \mapsto \nabla_x b$, $b \rightarrow h\Delta_x b$, $b \mapsto \frac{1}{h}(b - b_0)$, et si l'on note $\partial_t^{-1} b(t) = \int_0^t b(\tau) d\tau$, on constate que, à ε fixé,

$$||\partial_t^{-1} A b|| \leq 0(t_0) ||b|| \ .$$

Par ailleurs, la première norme est une norme d'algèbre, et on a également

$$||b_1 b_2|| \leq [b_1] ||b_2||$$

Enfin, on a $[\partial_t^{-2} b] \leq 0(t_0)||b||$. On notera que l'inégalité analogue en remplaçant ∂_t^{-2} par ∂_t^{-1} est inexacte, à cause de la singularité logarithmique intervenant dans l'estimation du terme de rang $j = 0$.

Il suffit alors de dériver une fois le système (5) par rapport à t, et de prendre comme nouvelle inconnue le symbole vectoriel

$$u = (\partial_t^2 v, \partial_t^2 a)$$

On obtient alors un système du type

$$u = F(t, \partial_t^2 u)$$

dont on montre qu'il est contractant sur la boule $||u|| \leq M$ pour t_0 assez petit.

∎

Remarque : Lorsque a_0^0 ne s'annule pas, on peut également travailler sur le système (3) au lieu du système (5), avec les mêmes méthodes.

Corollaire 2.— *Avec les hypothèses et notations de la proposition 2, il existe une famille* (ψ_h^{ap}) *de fonctions holomorphes sur un voisinage complexe* V *de* $[0, t_0] \times \mathbf{T}^d$, *et* $\delta > 0, C_0 > 0$, *tels que l'on ait, uniformément sur* V,

$$(i) \qquad -ih\partial_t\psi_h^{ap} - \frac{h^2}{2}\Delta_x\psi_h^{ap} + f(\psi_h^{ap}\bar{\psi}_h^{ap})\psi_h^{ap} = 0(e^{-\delta/h}),$$

$$(ii) \qquad \forall C \geq C_0, e^{-iS/h}\psi_h^{ap} = \sum_{j\leq 1/Ch} a_j h^j + 0(e^{-\delta/Ch}).$$

En effet, il suffit de poser

$$\psi_h^{ap} = (\sum_{j\leq 1/C_0 h} a_j h^j)e^{iS/h},$$

où C_0 est choisi assez grand par rapport à la constante B telle que $|a_j| \leq AB^j j$!. La propriété (ii) est alors standard (voir [Sj]) ; la propriété (i) demande un peu plus de soin, mais ne présente pas de difficulté sérieuse.

Soit maintenant ψ_h une solution exacte de l'équation (1), pour laquelle, à $t = 0$, il existe $\delta > 0, C_0 > 0, \ell > 0$, tels que $\psi_{h|t=0}$ soit holomorphe sur $|Imx| < \ell h$ et vérifie

$$(6) \qquad \forall C \geq C_0 \ , e^{-iS^0/h}\psi_{h|t=0} = \sum_{j\leq 1/Ch} a_j^0 h^j + 0(e^{-\delta/Ch}),$$

uniformément pour $|Im\, x| < \ell h$.

Un cas particulier important est celui où

$$\psi_{h|t=0} = (\sum_j a_j^0 h^j)e^{iS^0/h},$$

la somme étant finie.

Théorème.— *Si* f *est analytique au voisinage des valeurs prises par* $|a_0^0|^2$, *il existe* $t_1 > 0, \varepsilon > 0, D_0 > 0, \lambda > 0$, *tels que* ψ_h *se prolonge en une fonction continue sur* $[0, t_1]$ *à valeurs holomorphes sur* $|Im\, x| < \lambda h$, *et vérifie*

$$\forall D \geq D_0, \ e^{-iS/h}\psi_h = \sum_{j\leq 1/Dh} a_j h^j + 0(e^{-\varepsilon/Dh}),$$

uniformément pour $t \in [0, t_1], |Im\, x| < \lambda h$. *Ici* (a_j) *et* S *désignent les solutions formelles données par la proposition 2.*

Démonstration. Soit ψ_h^{ap} une solution approchée donnée par le corollaire 2. Posons

$$r_h = -ih\partial_t\psi_h^{ap} - \frac{h^2}{2}\Delta_x\psi_h^{ap} + f(\psi_h^{ap}\bar{\psi}_h^{ap})\psi_h^{ap}.$$

Alors la fonction $u_h = \psi_h - \psi_h^{ap}$ est solution de l'équation

$$ih\partial_t u_h + \frac{h^2}{2}\Delta_x u_h = g(t,x,u_h,h) + r_h, \tag{7}$$

où l'on a posé

$$g(t,x,v,h) = f(|\psi_h^{ap}(t,x)+v|^2)(\psi_h^{ap}(t,x)+v) - f(|\psi_h^{ap}(t,x)|^2)\psi_h^{ap}(t,x). \tag{8}$$

On va montrer qu'il existe $t_1 > 0, \lambda > 0$ tels que, pour tout h, il existe une fonction $v_h = v_h(t,x)$, continue pour $t \in [0,t_1]$, holomorphe pour $|Im\ x| < \lambda h$, exponentiellement décroissante en h, qui soit solution de (7) avec $v_{h|t=0} = u_{h|t=0}$. Le théorème sera alors conséquence de l'unicité pour le problème de Cauchy.

Il s'agit donc de résoudre l'équation (7) dans le domaine complexe, sachant que l'on remplace, dans l'expression (8) de g, chaque terme $|w(t,x)|^2$ par $w(t,x)\overline{w(t,\bar{x})}$. On notera que le problème (7) devient alors non local.

Introduisons les normes pertinentes. Soient $s > \frac{d}{2}$, $\lambda > 0$. Si $v = v(x)$ est holomorphe pour $|\mathrm{Im}\, x| < \lambda h$, on pose

$$||v||_h = \sup_{|y|<\lambda h} ||(1-h^2\Delta_x)^{s/2}v(\cdot + iy)||_{L^2(\mathbb{T}^d_x)}\ .$$

Soient alors $\varepsilon > o$, $t_1 \in [0,t_0]$. Si $v = v(t,x)$ est continue pour $t \in [0,t_1]$, holomorphe pour $|\mathrm{Im}\, x| < \lambda h$, on pose

$$N_h(v,t_1) = \sup_{0\le t\le t_1} e^{\varepsilon(1-\frac{t}{2t_1})/h}||v(t)||_h\ .$$

Par l'injection de Sobolev, on a

$$\sup_{t\le t_1}\ \sup_{|\mathrm{Im}\, x|<\lambda h} |v(t,x)| \le CN_h(v,t_1)e^{-\varepsilon/4h}\ , \tag{9}$$

où C est indépendante de h, t_1.

Compte tenu du corollaire 2, on choisit $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$, $K > 0$ tels que

$$||u_{h|t=0}||_h \le Ke^{-\frac{\varepsilon}{h}}\ ;\ N_h(r_h,t_0) \le K\ , \tag{10}$$

et, pour un certain $\ell > \lambda$,

$$\sup_{t\le t_0}\ \sup_{|\mathrm{Im}\, x|<\ell h} |\psi_h^{ap}(t,x)| \le K\ . \tag{11}$$

Compte tenu des estimations (9) et (11) et des inégalités standard sur les opérations non linéaires dans les espaces de Sobolev, on a :

Lemme.— *Pour tout $M > 0$, il existe $h(M) > 0$ tel que, si $h < h(M)$ et $N_h(v,t_1) \le M$, $g(t,x,v,h)$ est bien défini pour $t \le t_1$ et*

$$||g(t,\cdot,v(t),h)||_h \le G(M)||v(t)||_h \ ; \tag{12}$$

$$||g(t,\cdot,v_1(t),h) - g(t,\cdot,v_2(t),h)||_h \le G(M)||v_1(t) - v_2(t)||_h \ . \tag{13}$$

Soit $M > 0$ à choisir, $h < h(M)$. Pour v tel que $N_h(v,t_1) \le M$, soit w la solution sur $[0,t_1]$ de

$$\begin{cases} ih\partial_t w + \dfrac{h^2}{2}\Delta_x w = g(t,x,v,h) + r_h \\ w_{|t=0} = u_{h|t=0} \ . \end{cases}$$

Alors les estimations L^2 pour l'équation de Schrödinger et l'inégalité (12) donnent, pour $t \le t_1$,

$$||w(t)||_h \le ||u_{h|t=0}||_h + \frac{1}{h}\int_0^t (G(M)||v(\tau)||_h + ||r_h(\tau)||_h)d\tau \ . \tag{14}$$

C'est ici qu'intervient de façon cruciale la décroissance exponentielle en h. Par définition de N_h, on a

$$\frac{1}{h}\int_0^t ||v(\tau)||_h d\tau \le \frac{2t_1}{\varepsilon}N_h(v,t_1)e^{-\varepsilon(1-\frac{t}{2t_1})/h} \ .$$

Compte tenu de (10), (14) devient alors

$$N_h(w,t_1) \le K(1 + \frac{2t_1}{\varepsilon}) + \frac{2t_1}{\varepsilon}G(M)N_h(v,t_1) \ . \tag{15}$$

Fixant $M \ge 4K$ et $t_1 \le \min(t_0, \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{4}G(M)^{-1})$, (15) entraîne $N_h(w,t_1) \le M$. L'application $v \mapsto w$ opère donc sur la boule $\{v, N_h(v,t_1) \le M\}$, et le même type d'argument, joint à (13), montre qu'elle y est contractante.

∎

Remarque : Le théorème entraîne en particulier que, pour t assez petit, ψ_h se prolonge analytiquement dans un voisinage complexe d'ordre h, et qu'elle y est uniformément bornée. Ceci fournit notamment un résultat d'existence de ψ_h sur un intervalle de temps indépendant de h, dans des cas non couverts par les critères de Ginibre et Velo [GV].

3 Questions ouvertes

Elles sont nombreuses. La plus naturelle consiste à se demander si l'approximation de ψ_h par ψ_h^{ap} est vraie dans le cadre C^∞ (§1), et si elle a lieu sur tout l'intervalle d'existence d'une solution régulière pour le système d'Euler isentropique.

Dans [JLM2], Jin - Levermore - Mac Laughlin annoncent un résultat de ce type dans le cas particulier $d = 1, f(\rho) = \rho$, grâce à la méthode spectrale inverse (les détails se trouvent dans [JLM1]).

Dans le cadre analytique (§2), la question de l'intervalle de temps se pose également : en supposant remplies les conditions d'hyperbolicité du système d'Euler, l'analyticité du symbole a se propage-t-elle sur tout l'intervalle d'existence d'une solution régulière pour le système d'Euler, dans l'esprit du résultat d'Alinhac - Métivier [AM] ?

Si oui, ψ_h est-elle approchée "analytiquement" par ψ_h^{ap} sur tout cet intervalle ?

Enfin, la question la plus intéressante est bien sûr le comportement de ψ_h après l'apparition d'une singularité pour le système d'Euler. La description des oscillations de ψ_h au premier ordre en h fournirait alors notamment des solutions "géométriques" globales au système d'Euler, au même titre que les solutions lagrangiennes pour les équations d'Hamilton - Jacobi. Là encore, l'examen attentif des résultats de [JLM1] devrait permettre de répondre à cette question dans le cas particulier du système intégrable.

Je remercie Gilles Lebeau pour les conversations que nous avons pu avoir sur le travail présenté ici.

Bibliographie

[AM] S. Alinhac, G. Métivier : *Propagation de l'analyticité des solutions d'équations hyperboliques non linéaires*, Invent. Math. **75** (1984), 189-204.

[BG] M.S. Baouendi, C. Goulaouic : *Remarks on the abstract form of the non-linear Cauchy - Kovalevsky theorems*, Comm. P.D.E. **2** (1977), 1151-1162.

[C] Y. Choquet-Bruhat : *Ondes asymptotiques et approchées pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires*, J. Math. Pures et App. **48** (1969), 117-158.

[GV] J. Ginibre, G. Velo : *On the global Cauchy problem for some non-linear Schrödinger equations*, Ann. I.H.P., Analyse non linéaire **1** (1984), 309-323.

[G] O. Guès : *Développements asymptotiques de solutions exactes de systèmes quasi-linéaires*, à paraître dans Asymptotic Analysis.

[JLM1] S. Jin, C.D. Levermore, D.W. Mc Laughlin : *The Semiclassical Limit for the Defocusing Nonlinear Schrödinger Hierarchy*, preprint (1991).

[JLM2] S. Jin, C.D. Levermore, D.W. Mc Laughlin : *The Behavior of Solutions of the NLS Equation in the Semiclassical Limit*, preprint (1993).

[JR] J.L. Joly, J. Rauch : *Justification of Multidimensional Single Phase Semilinear Geometric Optics*, Trans. A.M.S. **330** (1992), 599-625.

[M] A. Majda : *Compressible Fluid Flows and Systems of Conservation Laws in Severable Variables*, Applied Mathematical Sciences **53**, Springer (1984).

[S] D. Serre : *Quelques méthodes d'étude de la propagation d'oscillations hyperboliques non linéaires*, Séminaire "Equations aux Dérivées Partielles" (1990-1991), exposé n°**XX**, Ecole Polytechnique.

[Sj] J. Sjöstrand : *Singularités analytiques microlocales*, Astérisque **95** (1982).

[ZS] V.E. Zakharov, A.B. Shabat : *Exact Theory of Two-dimensional Self-Focusing and One-dimensional Self-modulation of Waves in Nonlinear media*, Sov. Phys. JETP **34**, (1973), 62-69.

Patrick Gérard

Université de Paris-Sud

Mathématiques Bât. 425

91405 Orsay Cedex