ERIC LEICHTNAM

Le problème de Cauchy ramifié linéaire pour des données à singularités algébriques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1991-1992), exp. n° 6, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1991-1992____A6_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1991-1992

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

LE PROBLEME DE CAUCHY RAMIFIE LINEAIRE POUR DES DONNEES A SINGULARITES ALGEBRIQUES

Eric LEICHTNAM

Exposé n° VI

26 Novembre 1991

Nous considérons le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} a(x,D)u = v(x) \\ D^s_{x_0}u(x)|_S = u_s(x') \; 0 \leq s < m \end{cases} \tag{0.1}$$

où $a(x,D)$ désigne un opérateur différentiel linéaire d'ordre m à coefficients fonctions holomorphes de $x = (x_j)_{0\leq j\leq n}$ sur un voisinage ouvert de $0 \in \mathcal{C}^{n+1}$; où l'hyperplan $\mathcal{S}$ d'équation $x_0 = 0$ est non caractéristique pour $a(x,D)$. Posons $x' = (x_1, \cdots, x_n)$. Soit $k \in \{1,2,\cdots,n\}$, désignons par $D(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ le discriminant de l'équation polynomiale en z :

$$F(x,z) = z^{k+1} - x_k z^{k-1} - x_{k-1}z^{k-2} \cdots - x_2 z - x_1 = 0 \tag{0.2}$$

Posons en outre :

$$\Delta(x_2,\cdots,x_k,z) = \Delta = \partial_z F(x,z) \tag{0.3}$$

Désignons par T l'hypersurface analytique (dite queue d'aronde) de $\mathcal{S}$ d'équation $D(x_1, x_2,\cdots,x_k) = 0$. Nous supposerons que chaque fonction $u_s(x')$ $(0 \leq s < m)$ est holomorphe ramifiée autour de T et de la forme : $(o \leq s \leq m-1)$

$$u_s(x') = \sum_{\ell=0}^{k} P_{s,\ell}(x' \; ; \; D')(z^\ell(x')) \tag{0.4}$$

où $x \to z(x')$ désigne une solution holomorphe ramifiée autour de T de l'équation (0.2), où ($-w$ étant un entier naturel donné) Les $P_{s,\ell}(x' \; ; \; D')$ sont des opérateurs différentiels linéaires d'ordre $s - w$ à coefficients holomorphes sur un voisinage ouvert de $0 \in \{x' \in \mathcal{C}^k\}$. Indiquons - à titre d'exemple - qu'en différentiant l'équation (0.2) on obtient :

$$\partial_{x_1} z^\ell(x') = \frac{\ell z^{\ell-1}}{\Delta}$$

pour $0 \leq \ell \leq k$. Le second membre $v(x)$ sera précisé dans le théorème 0.2, à ce stade de la rédaction on peut supposer sans inconvénient - pour fixer les idées - que $v(x) \equiv 0$. En outre nous étudierons le problème (0.1) avec les hypothèses suivantes. Notons $a_m(x \; ; \; \xi)$ le polynôme caractéristique homogène en ξ de l'opérateur $a(x,D)$; nous supposerons que $a(x,D)$ est à caractéristiques simples ce qui signifie que l'équation de degré m en ξ_0 :

$$a_m(0 \; ; \; \xi_0, 1, 0, \cdots, 0) = 0 \tag{0.5}$$

possède m racines distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$.

Posons $m = 2p + \mathcal{S}$ où $\mathcal{S} \in \{0,1\}$, un exemple simple de symbole $a_m(x \; ; \; \xi)$ est le polynôme suivant :

$$\xi_0^\delta \prod_{j=1}^{p} (j\xi_0^2 - \xi_1^2 \cdots - \xi_n^2)$$

L'hypothèse à caractéristiques simples et en quelque sorte l'analogue holomorphe de la notion (réelle, C^∞) d'opérateurs strictement hyperbolique relativement à $\mathcal{S}$.

Nous rappelons la définition d'une queue d'aronde :

Définition 0.0.— *Une hypersurface analytique K de $\mathcal{C}^{n+1}$ définie dans un voisinage ouvert connexe U de $0 \in \mathcal{C}^{n+1}$ est appelée queue d'aronde de sommet 0 s'il existe $k \in \mathbf{N}^*$ et k fonctions holomorphes sur U s'annulant en 0 $x \to g_j(x)$ $1 \leq j \leq k$ telles que les différentielles $dg_j(0)$ $(1 \leq j \leq k)$ sont linéairement indépendantes et K est définie par l'équation :*

$$D(g_1(x), \cdots, g_k(x)) = 0$$

où $D(g_1, \cdots, g_k)$ désigne le discriminant de l'équation polynomiale en z :

$$z^{k+1} = g_k z^{k-1} + \cdots + g_2 z + g_1. \tag{0.6}$$

Nous définissons le conormal $N(K)$ de K comme étant l'adhérence dans $T^*U\backslash 0$ du conormal $N(K_{\text{reg}})$ de la partie lisse K_{reg} de K. Nous dirons que K est caractéristique pour $a(x, D)$ si la restriction du symbole principal $a_m(x\ ;\ \xi)$ à $N(K)$ (ou $N(K_{\text{reg}})$) est identiquement nulle.

Remarque : Soit $m_0 \in U\backslash K$. Considérons un germe holomorphe au point $(g_1(m_0), \cdots, g_k\ (m_0))$ $(X_1, \cdots, X_k) \to z(X_1, \cdots, X_k)$ solution de l'équation :

$$z^{k+1} = X_k z^{k-1} + \cdots + X_2 z + X_1.$$

On peut prolonger holomorphiquement ce germe $z(X_1, \cdots, X_k)$ le long de tout chemin issu de $(g_1(m_0), \cdots, g_k(m_0))$ ne rencontrant pas la queue d'aronde $D(X_1, \cdots, X_k)^{-1}(0)$. Le germe en m_0 $x \to z(g_1(x), \cdots, g_k(x))$ est alors prolongeable holomorphiquement le long de tout chemin issu de m_0 et tracé dans $U\backslash K$.

Le théorème suivant affirme qu'il existe (près de $0 \in \mathcal{C}^{n+1}$) m hypersurfaces analytiques (singulières) $K^1, \cdots, K^m$ de $\mathcal{C}^{n+1}$ issues de T, caractéristiques pour $a(x, D)$. Les K^i sont des queues d'aronde de sommet 0 et - dans un voisinage de 0 - ce sont "essentiellement" les seules hypersurfaces analytiques vérifiant ces propriétés. Notons :

$$\Pi \left| \begin{array}{l} T^*\mathcal{C}^{n+1} \to \mathcal{C}^{n+1} \\ \quad (x, \xi) \to x \end{array} \right.$$

la projection usuelle.

Théroème 0.1.— *(Avec les notations du problème (0.1)). Soit $\lambda_j (1 \leq j \leq m)$ l'une des racines de l'équation (0.5). Alors :*

1] Il existe une lagrangienne holomorphe lisse homogène Λ_j définie dans un petit voisinage conique de $(0,\cdots,0\ ;\ \lambda_j,1,0,\cdots,0) \in T^*\mathcal{C}^{n+1}$ et vérifiant les quatre propriétés suivantes :

a) $\Pi(\Lambda_j) \cap S = T$ (dans un voisinage de 0)

b) $(0,\cdots,0\ ;\ \lambda_j,1,0,\cdots,0) \in \Lambda_j$

c) la restriction de $a_m(x\ ;\ \xi)$ à Λ_j est identiquement nulle

d) $\{(x',\xi')/\exists\xi_0,(0,x'\ ;\ \xi_0,\xi') \in \Lambda_j\}$ est une lagrangienne holomorphe lisse incluse dans $N(T)$ (voir def. 0.0) et comprenant $(0,\cdots,0\ ;\ 1,0,\cdots,0)$.

Il existe un voisinage conique V_1 de $(0,\cdots,0\ ;\ \lambda_j,1,0,\cdots,0)$ telle que toute lagrangienne incluse dans V_1 holomorphe lisse homogène vérifiant ces quatre propriétés coïncide avec Λ_j dans un petit voisinage conique de $(0,\cdots,0\ ;\ \lambda_j,1,0,\cdots,0)$. Par ailleurs on peut construire Λ_j de sorte qu'il existe k fonctions $x \to g^j_\ell(x)$ $(1 \leq \ell \leq k)$ définies et holomorphes sur un voisinage ouvert V de $0 \in \mathcal{C}^{n+1}$ telles que $g^j_\ell(0,x') = x_\ell (1 \leq \ell \leq k)$ et que l'hypersurface $K^j = \Pi(\Lambda_j) \cap V$ soit une queue d'aronde caractéristique définie par l'équation $D(g^j_1,\cdots,g^j_k)(x) = 0$ où $D(g^j_1,\cdots,g^j_k)$ désigne le discriminant de l'équation polynomiale en z :

$$(0.7)_j \qquad z^{k+1} = g^j_k(x)\ z^{k-1} + \cdots + g^j_2(x)\ z + g^j_1(x).$$

2] Soit $\mathcal{A}$ une hypersurface définie dans un voisinage de $0 \in \mathcal{C}^{n+1}$ par une équation C-analytique $f(x_0,x') = 0$ telle que $\mathcal{A} \cap S = T$ (près de 0), $a_m(x\ ;\ \xi)$ s'annule sur le conormal de la partie lisse $\mathcal{A}_{\text{reg}}$ de $\mathcal{A}$ et que 0 adhère à $S \cap \mathcal{A}_{\text{reg}}$ (c'est le cas si $f(0,x') = D(x_1,\cdots,x_k)$). Alors $\exists\ j \in \{1,\cdots,m\}$ tel que $\mathcal{A}$ et $\Pi(\Lambda_j) = K^j$ coïncident dans un petit voisinage de 0. De plus $\forall i \in \{1,\cdots,m\}$ il existe un voisinage ouvert U de $0 \in \mathcal{C}^{n+1}$ tel que $N(K^i)$ (voir def. 0.0) et Λ_i coïncident dans $\Pi^{-1}(\sqcup) \simeq T^*\sqcup$. Enfin $(0,\cdots,0\ ;\ \lambda_i,1,0,\cdots,0)$ appartient à $N(K^i)$.

Remarque : Le conormal à la queue d'aronde T n'a qu'une seule direction au-dessus de l'origine. Ce fait crucial et l'hypothèse faite sur l'équation (0.5) permettent (par la géométrie symplectique complexe) de construire $\Lambda_1,\cdots,\Lambda_m$ et donc $K^1 = \Pi(\Lambda_1),\cdots,K^m = \Pi(\Lambda_m)$.

L'un des résultats principaux de cet article est le théorème suivant

Théorème 0.2.— *(Avec les notations précédentes). Soient $-w$ un entier naturel et U [resp. W] un voisinage ouvert de l'origine dans $\mathcal{C}^{n+1}$ [resp. $\mathcal{C}^n$]. Alors il existe un voisinage ouvert V inclus dans U de $0 \in \mathcal{C}^{n+1}$ vérifiant $V \cap S \subset W$ et tel que pour* *tous opérateurs différentiels linéaires $P_{s,\ell}(x' \; ; \; D_{x'})$ d'ordre inférieur ou égal à $s - w$ (où $0 \leq s \leq m-1$ et $0 \leq \ell \leq k$) à coefficients holomorphes sur W, pour tous opérateurs différentiels linéaires $Q_{j,\ell}(x \; ; \; D_x)$ d'ordre inférieur ou égal à $-w+m-1$ (où $1 \leq j \leq m$ et $0 \leq \ell \leq k$) à coefficients holomorphes sur U, pour tout point $x^0 = (0, x'^0)$ de $S \cap V \backslash T$ et tout germe holomorphe en x'^0 $x' \to z(x')$ solution de l'équation (0.2), le problème (0.1) défini avec les données de Cauchy suivantes :*

$$
(0.8) \qquad
\begin{aligned}
u_s(x') &= \sum_{\ell=0}^{k} P_{s,\ell}(x' \; ; \; D_{x'})(z^\ell(x')) \quad 0 \leq s \leq m-1 \\
v(x) &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{\ell=0}^{k} Q_{j,\ell}(x \; ; \; D_x)(z_j^\ell(x))
\end{aligned}
$$

où $z_j(x) = z(g_1^j(x), \cdots, g_k^j(x))$ est le germe holomorphe en $x^0 = (0, x'^0)$ solution de l'équation $(0.7)_j$ du théorème 0.1 vérifiant $z_j(0, x') = z(x')$; le problème (0.1) admet pour solution un germe en x^0 holomorphe $u(x)$ qu'on peut prolonger holomorphiquement le long de tout chemin issu de $(0, x'^0)$ tracé dans $V \backslash \bigcup_{j=1}^{m} K^j$ et ne rencontrant pas les queues d'arondes caractéristiques $K^1, \cdots, K^m$. En outre le germe solution $u(x)$ est de la forme :

$$
u(x) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{\ell=0}^{k} R_{j,\ell}(x \; ; \; D_x)(z_j^\ell(x))
$$

où les $R_{j,\ell}(x \; ; \; D_x)$ sont des opérateurs différentiels linéaires d'ordre $-w$ à coefficients holomorphes sur V.

Remarque :

1] Les précisions sur les ordres des opérateurs $P_{s,\ell}, Q_{j,\ell}, R_{j,\ell}$ montrent que le théorème 0.2 précise la nature des singularités de la solution $u(x)$ en fonction des singularités des données.

2] La queue d'aronde T est définie dans un système de coordonnées locales $x_1, \cdots, x_k$. Si (de manière plus intrinsèque) on considère une queue d'aronde $T' \subset S$ de sommet 0 telle que pour tout $(0 \; ; \; \xi') \in N(T') \backslash 0$ l'équation $a_m(0, \cdots, 0 \; ; \; \xi_0, \xi') = 0$ possède m racines simples alors on obtient des résultats analogues aux théorèmes 0.1 et 0.2.

Dans [15] et [16] nous avons étudié divers types de problèmes de Cauchy Ramifié, à chaque fois nous appliquons le programme suivant (voir aussi [17]) composé de quatre points :

1] si $u(x)$ est holomorphe ramifiée autour d'une hypersurface analytique K de $\mathcal{C}^{n+1}$, les singularités (microlocales) de u vivent dans une lagrangienne complexe de $T^*\mathcal{C}^{n+1}$: le conormal $N(K)$ de K. Lorsque K est singulière il faut préciser de quel conormal il s'agit et étudier sa géométrie.

2] Le flot hamiltonien Φ du symbole principal $a_m(x\ ;\ \xi)$ propage les singularités de $u(x)$ suivant des lagrangiennes caractéristiques (les conormaux des hypersurfaces caractéristiques sont invariants sous l'action de Φ).

3] On considère des régions où on a une représentation de $u(x)$ (i.e. une expression explicite du revêtement sur lequel $u(x)$ devient uniforme).

4] On résoud l'équation $a(x\ ;\ D)u(x) = v(x)$ en utilisant les représentations du 3] par la méthode de l'optique géométrique. Le choix des opérateurs d'intégration et des normes (pour établir la convergence des séries) dépend de manière cruciale de la géométrie de la lagrangienne $N(K)$ considérée au point 1].

Maintenant nous allons décrire la structure des preuves des théorèmes 0.1 et 0.2 en indiquant comment nous avons appliqué ce programme. Les détails de ces preuves sont donnés dans [18].

Une étude de la géométrie de la queue d'aronde T permet de voir que $N(T)$ admet une paramétrisation de la forme :

$$\begin{cases} x_1 = -kz^{k+1} + (k-2)x_k z^{k-1} + \cdots + x_3 z^2 \\ x_2 = (k+1)z^k - (k-1)x_k z^{k-2} + \cdots - 2x_3 z \\ x_3 = x_3 \\ \quad \vdots \\ x_n = x_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi_1 = \lambda & \xi_{k+1} = 0 \\ \xi_2 = z\lambda & \quad \vdots \\ \quad \vdots & \xi_n = 0 \\ \xi_k = z^{k-1}\lambda & \end{cases}$$

où $(x_3, \cdots, x_n, z, \lambda)$ décrit $\mathcal{C}^{n-2} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}^*$

Par ailleurs nous montrons qu'il existe des polynômes $N_i(x_2, \cdots, x_k), 2 \leq i \leq k$ tels que $(z, z^2 - N_2(x_2, \cdots, x_k), \cdots, z^k - N_k(x_2, \cdots, x_k))$ soit solution sur un voisinage de l'origine d'un $\mathcal{D}$-module holonôme dont la variété caractéristique est incluse dans la réunion de $N(T)$ et de la section nulle. $N(T)$ ne possède qu'une seule codirection au-dessus de l'origine : celle conormale à x_1, il n'y a pas de phénomène d'étalement des singularités pour cette géométrie. Comme le laisse prévoir les points 1] et 4] du programme, l'opérateur de primitivation par rapport à x_1 jouera un rôle clef.

Pour prouver le théorème 0.1 nous construisons la lagrangienne caractéristique Λ_j (conformément au point 2] du programme) en propageant par le flot Φ le lieu caractéristique (pour $a(x\ ;\ D)$) constitué de points voisins de $(0,\cdots,0\ ;\ \lambda_j,1,0,\cdots,0)$ et de la forme $(0,x'\ ;\ \xi_0,\xi')$ où $(x'\ ;\ \xi') \in N(T)$. Pour démontrer l'existence des fonctions $g_\ell^j(x)$ vérifiant $g_\ell^j(0,x') = x_\ell$ (ce qui est crucial pour notre objet) nous devons reprendre en les précisant certains résultats d'Arnold (voir [1], [2]) de la théorie des singularités.

Nous montrons que

$$\Pi(\Lambda_j(x_0)) = \{x'/(x_0,x') \in \Pi(\Lambda_j)\}$$

est la projection sur la base d'une legendrienne $\mathcal{L}(x_0)$ de $\{(x_1,\cdots,x_n\ ;\ p_2,\cdots,p_n)\}$ muni de la structure (complexe) de contact standard par la 1-forme $dx_1 - p_2\, dx_2 \cdots - p_n\, dx_n$.

Nous montrons qu'on peut paramétrer $\mathcal{L}(x_0)$ à l'aide d'une fonction génératrice $S(x_0,z,x_3,\cdots,x_n)$ dépendant du paramètre x_0. Le fait que $\Pi(\Lambda_j)$ soit une queue d'aronde repose alors sur un théorème qui affirme qu'on peut écrire $S(x_0,z,x_3,\cdots,x_n) - zx_2$ sous la forme $Z^{k+1} - X_k Z^{k-1} \cdots - X_1$ où Z [resp. $X_\ell, 1 \le \ell \le k$] est fonction de $(x_0,z,x_2,\cdots,x_n)$ [resp. $(x_0,x_2,\cdots,x_n)$]. La preuve de ce théorème reprend un argument de Martinet [19] (voir aussi [1] page 124) : nous utilisons la versalité infinitésimale du déploiement $S(0,z,x_3,\cdots,x_n) - x_2 z - x_1$ de z^{k+1} et le théorème de préparation de Weierstrass. Les queues d'aronde K^j que nous avons construites sont définies sur de "très petits voisinages ouverts de 0", en utilisant les résultats de Hauser [9] on devait pouvoir construire des queues d'aronde K^j définies sur des ouverts beaucoup plus gros. Par ailleurs nous prouvons le 2] du théorème 0.1 (i.e. les K^j sont "essentiellement" les seules hypersurfaces analytiques caractéristiques issues de T) en utilisant des résultats de géométrie analytique locale et le fait que T et le discriminant $D(x_1,\cdots,x_k)$ induisent en l'origine des germes irréductibles.

Pour démontrer le théorème 0.2 nous devons - au préalable - étudier la géométrie (qui est à la fois riche et compliquée) de l'algèbre $A = \mathcal{O}_X[z]$ où z est solution de l'équation (0.2) et $\mathcal{O}_X$ designe l'algèbre des germes $u(x)$ holomorphes en l'origine. Dans le cas simple de l'équation $z^2 = x_1$ les éléments de A qui sont de la forme $\sqrt{x_1}u(x)$ sont singuliers et leur somme suivant les deux racines est nulle. cette remarque nous conduit - dans le cas général - à poser pour $u(x,z) \in A$.

$$\Pi u(x,z) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} u(x,z_i)$$

où $z_1,\cdots,z_{k+1}$ désigne la liste des racines de l'équation (0.2), et à introduire l'ensemble φ des éléments u de A vérifiant $\Pi u \equiv 0$. φ et Π possèdent une interprétation géométrique agréable : notons $\mathcal{R}$ le revêtement "uniformisant" la solution z de l'équation (0.2), le groupe σ_{k+1} des automorphismes de $\mathcal{R}$ s'identifie au groupe des permutations d'un ensemble à $k+1$ éléments, pour une fonction holomorphe (uniforme) u sur $\mathcal{R}$ on pose :

$$\Pi u = \frac{1}{(k+1)!}\sum_{g\in\sigma_{k+1}} u \circ g$$

Si u provient d'un élément de A les deux définitions coïncident. Vu la deuxième définition il est clair que Π commute avec l'action des opérateurs différentiels en x et ainsi : $\Pi u = 0$ (i.e. $u \in \varphi$) entraîne $\partial_{x_j} u \in \varphi$ $1 \leq j \leq n$.

Par ailleurs en utilisant les relations entre coefficients et racines on montre (dans l'esprit des formules de Waring) qu'il existe des polynômes $N_\ell(x_2, \cdots, x_k) 2 \leq \ell \leq k$ tels que les fonctions $e_1 = z$ et $e_\ell = z^\ell - N_\ell(x_2, \cdots, x_k) 2 \leq \ell \leq k$ appartiennent à φ (i.e. leur somme suivant les $k+1$ racines de l'équation (0.2) est nulle). Ces fonctions $e_1, e_2, \cdots, e_k$ joueront un rôle fondamental dans notre étude.

Cela dit on a une décomposition $A = \mathcal{O}_X \oplus \varphi$ sur laquelle les dérivations ∂_{x_ℓ} opèrent de manière diagonale, de plus φ est un $\mathcal{O}_X$-module libre de rang k admettant $(e_1, e_2, \cdots, e_k)$ pour base. Un théorème montre que tout u de φ possède - dans φ - une unique primitive en x_1 notée $v = D^{-1}u$. De plus si pour $p \in \mathbf{N}$ on pose $A^p = \{u \in A / \partial_x^\alpha u \in A$ pour tout α de longueur $\leq p\}$ alors on montre que D^{-1} induit une bijection de $A^p \cap \varphi$ sur $A^{p+1} \cap \varphi$.

Conformément à ce que laissent prévoir les points 1] et 4] de notre programme, D^{-1} joue un rôle crucial. Si $h \in \mathbf{N}$ on pose $e_\ell^h = D^{-h} e_\ell$ et $e_\ell^{-h} = \partial_{x_1}^h e_\ell$; pour étudier les primitives itérées e_ℓ^h des $e_\ell (h \in \mathbf{N})$ il est très commode de travailler avec des matrices et d'introduire la matrice carrée d'ordre k $P(x)$ telle que :

$$\begin{bmatrix} e_1^1 \\ e_2^1 \\ \vdots \\ e_k^1 \end{bmatrix} = P(x) \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_k \end{bmatrix}$$

Une récurrence facile sur $h \in \mathbf{N}$ montre que

$$\begin{bmatrix} e_1^{h+1} \\ \vdots \\ e_k^{h+1} \end{bmatrix} = (Id + h\partial_{x_1} P)^{-1} P \begin{bmatrix} e_1^h \\ \vdots \\ e_k^h \end{bmatrix}$$

On peut alors facilement obtenir des majorations du type

$$|e_\ell^h| \leq \frac{C^{h+1}}{h!} r^h \text{ pour } |x| < r$$

Des théorèmes montrent alors qu'on peut décomposer chaque terme du type $\partial_x^\alpha e_\ell^{h+|\alpha|}$: suivant les e_i^{h+q} où $1 \leq i \leq k$ et $0 \leq q \leq |\alpha|$. On peut alors énoncer (et prouver) un théorème qui affirme que si $c(x\ ;\ D_x)$ est un opérateur différentiel d'ordre m caractéristique pour la queue d'aronde T alors les $c(x\ ;\ D_x) e_\ell^{m-1}$ s'expriment en fonction des $e_1, e_2, \cdots, e_k$ (et non pas de leurs dérivées). Ce théorème permet en outre de prouver que sur un voisinage de $0, (e_1, e_2, \cdots, e_k)$ est solution d'un $\mathcal{D}$-module holonome dont la variété caractéristique est incluse dans la réunion de $N(T)$ et de la section nulle.

On se ramène à une situation où les données de Cauchy et le second membre $v(x)$ du problème (0.1) admettent des représentations (cf. point 3] de notre programme) du type $(0 \leq s \leq m - 1)$ suivant :

$$u_s(x') = \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h \geq w-m+1-s} u^h_{s,\ell}(x') e_\ell^{h+m-1}(x_1, \cdots, x_k)$$

$$v(x) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h \geq w+1-m} v_{j,\ell}^{h-m+1}(x) e^h_\ell(G_j(x))$$

où on a posé $G_j(x) = (g^j_1(x), \cdots, g^j_k(x))$. Rappelons que dans le théorème 0.2 les opérateurs différentiels $P_{s,\ell}$ [resp. $Q_{j,\ell}$] avec lesquels on définit $u_s(x')$ [resp. $v(x)$] sont d'ordre $\leq -w + s$ [resp. $\leq -w + m - 1$].

On définit - à l'aide de fonctions majorantes convenables - les espaces de Banach dans lesquels vivent les séries permettant de définir $v(x)$ et les $u_s(x')$.

Pour prouver le théorème 0.2, nous recherchons la solution $u(x)$ du problème (0.1) sous la forme :

$$u(x) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{h \geq w-m+1} b^h_{j,\ell}(x) e_\ell^{h+m-1}(G_j(x))$$

Conformément au point 4] de notre programme nous construisons $u(x)$ par la méthode de l'optique géométrique. Le fait que la queue d'aronde K^j soit caractéristique pour l'opérateur $a(x\ ;\ D)$ d'ordre m montre qu'on peut exprimer $a(x\ ;\ D)[b^h_{j,\ell}(x) e_\ell^{h+m-1}(G_j(x))]$ en fonction des $e^h_i(G_j(x))(1 \leq i \leq k)$.

L'hypothèse "à caractéristiques simples" faite sur l'équation (0.5) montre que dans l'expression obtenue en développant $a(x\ ;\ D)[b^h_{j,\ell}(x) e_\ell^{h+m-1}\ (G_j(x))]$ le coefficient de $\partial_{x_0} b^h_{j,\ell}(x) \times e^h_\ell(G_j(x))$ n'est pas nul pour $x = 0$.

On met alors en place un processus formel de résolution par la méthode de l'optique géométrique où $\partial_{x_0} b^h_{j,\ell}$ joue le rôle de terme pivot. Par ailleurs on ramène l'étude des données de Cauchy du problème (0.1) à l'étude d'une formule linéaire récurrente exprimant $b^h_{j,\ell}(0, x')$ après avoir inversé la matrice de Vandermonde définie par $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$; un procédé analogue a été utilisé par Wagschal dans [25]. On montre alors que le théorème 0.2 est conséquence d'un théorème qui établit l'existence - dans un espace de séries du type $\sum b^h_{j,\ell} e_\ell^{h+m-1}$ - d'une solution d'un gros système d'équations. Notre démonstration est effective : elle fournit un algorithme pour calculer de proche en proche les $b^h_{j,\ell}$.

Nous pensons (et espérons) que les méthodes développées dans [18] - notamment l'étude géométrique de $\mathcal{O}_X[z]$ - peuvent être utilisées pour construire des solutions ramifiées de certaines équations aux dérivées partielles venant de la physique (Euler, par exemple). A titre de motivation nous montrons dans [18] qu'il se produit pour l'équation de Burger un phénomène d'éclatement des singularités (typiquement <u>non-linéaire</u>) faisant apparaître des solutions algébriques ramifiées du type précédent.

Dans la théorie des singularités la queue d'aronde est appelée singularité (stable) de type A_k (voir [1], [2]). Il serait intéressant de généraliser les résultats de cet article aux singularités de type D_k ou E_k qui (elles aussi) sont stables.

Enfin il semble très probable que l'on puisse étendre les théorèmes 0.1 et 0.2 au cas d'un opérateur à caractéristiques multiples de multiplicité constantes, toutefois la solution $u(x)$ aura une structure beaucoup plus compliquée : elle ne sera plus (en général) à croissance lente et il faudra remplacer les opérateurs $R_{j,\ell}(x\ ;\ D_x)$ du théorème 0.2 par une somme "infinie" d'opérateurs différentiels.

[1] V. Arnold, A. Varchenko, S. Goussein-Zadé *Singularités des applications différentiables*, tome 1 Editions Mir, Moscou.

[2] D. Bennequin *Caustique mystique* Séminaire Bourbaki, Astéristique 133-134 (1986).

[3] A. D'Agnolo, P. Schapira Problème de Cauchy ramifié dans le cadre de la théorie des faisceaux, à paraître.

[4] R. et A. Douady *Algèbres et théories galoisiennes II* (Cedic/Fernand Nathan).

[5] J. Frisch *Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques*, Inventiones Math., 4, 2 (1967) page 118-138.

[6] P. Griffiths, J. Harris *principes of algebraic geometry* (Pure and Applied Maths, Wiley-Interscience).

[7] R. Gunning, H. Rossi *Analytic Functions of Several Complex Variables* (Prentice-Hall, INC).

[8] Y. Hamada, J. Leray, C. Wagschal *Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples : problème de Cauchy ramifié, hyperbolicité partielle* (J. Math. pures et appl. 1976).

[9] H. Hauser *La construction de la déformation semi-universelle d'un germe de variété analytique complexe* Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4° série, tome 18, 1985, p. 1 à 56.

[10] L. Hörmander *The analysis of linear partial differential operators I*, Springer.

[11] C. Houzel *Géométrie analytique locale, I* Séminaire Henri Cartan 13^e année, 1960/61, n°18.

[12] M. Kashiwara, S. Schapira *Sheaves on manifolds*, (Springer Verlag).

[13] L. Kaup, B. Kaup *Holomorphic Functions of Several Variables* (de Gruyter Studies in mathematics).

[14] E. Leichtnam *Construction de solutions singulières pour des équations aux dérivées partielles non linéaires* ; Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4$^{\text{ème}}$ série, tome 20, 1987, p. 137-170.

[15] E. Leichtnam *Le problème de Cauchy ramifié* ; Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4ème série, tome 23, 1990, p. 369-443.

[16] E. Leichtnam *Le problème de Cauchy ramifié semi-linéaire d'ordre deux* ; Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4ème série, tome 24, 1991, p. 189-214.

[17] E. Leichtnam *Thèse d'habilitation à diriger des recherches* (Université Paris-Sud, 1990).

[18] E. Leichtnam *Le problème de Cauchy ramifié linéaire pour des données à singularités algébriques* à paraître.

[19] J. Martinet *deploiements versels des applications différentiables et classifications des applications stables* Lecture Notes in Math. 535 p. 1-44, springer, berlin, 1976.

[20] Z. Mebkhout *Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les $\mathcal{D}_X$-modules cohérents* (travaux en cours, Editions Hermann).

[21] R. Narashiman *introduction to the theory of analytic spaces* Lecture Notes in Math. 25 Heidelberg : Springer Verlag 1966.

[22] Shatalov B. Sternin *On the solvability of the first cousin problem for a class of multivalued analytic functions* Math. USSR Izvestiga Vol 35 (1990) n° 2.

[23] B. Teissier *The hunting of invariants in the geometry of discriminants*, Proceedings Real and complex singularities, Oslo 1976.

[24] C. Wagschal *Une généralisation du problème de Goursat pour des systèmes d'équations intégro-différentielles holomorphes ou partiellement holomorphes* (J. Math. Pures et Appl., tome 53, 1974 p. 99).

[25] C. Wagschal *Sur le problème de Cauchy ramifié* (J. Math. Pures et Appl., tome 53, 1974, p. 174-164).

Ecole Normale Supérieure

45, rue d'Ulm

75230 PARIS CEDEX 05