Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

Jacques Magnen
Vincent Rivasseau

# Groupe de renormalisation autour d'une sphère

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1991-1992), exp. nº 4, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1991-1992____A4_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (École Polytechnique), 1991-1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
*Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

*CENTRE*
*DE*
*MATHEMATIQUES*

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1991-1992

---

# EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

# GROUPE DE RENORMALISATION AUTOUR D'UNE SPHERE

Jacques MAGNEN et Vincent RIVASSEAU

Exposé n° I V

17 Décembre 1991

# Groupe de renormalisation autour d'une sphère

Jacques Magnen et Vincent Rivasseau*
Centre de Physique Théorique
Ecole Polytechnique
F-91128 Palaiseau Cedex
FRANCE

Résumé

Nous exposons deux problèmes de physique du solide dont la structure mathématique peut se ramener à l'étude fine d'une singularité localisée sur une sphère dans l'espace des moments. Pour résoudre d'une manière générale ce type de problèmes nous nous proposons, en collaboration avec J. Feldman et E. Trubowitz, d'adapter les méthodes dites du groupe de renormalisation en théorie constructive des champs.

A.124.1291 Décembre 1991

* Conférence donnée au séminaire EDP Ecole Polytechnique par V. Rivasseau

## I. Supraconductivité

Le premier problème consiste à étudier un ensemble d'électrons dans un solide. Ces électrons interagissent entre eux, d'une part bien sûr par leur répulsion coulombienne mais aussi par l'intermédiaire de leur couplage avec les "phonons" ou modes de vibration du réseau cristallin. L'une des principales questions que l'on peut se poser est la suivante: l'état fondamental d'un tel système est un liquide de Fermi, c'est à dire analogue au système libre, ou bien est il différent? Nous verrons que dans le cas générique l'on s'attend à un état supraconducteur qui est différent du liquide de Fermi. Cet état, moins symétrique que l'état libre, conduit à l'existence d'une transition de phase à basse température lorsque le système se "gèle" dans cet état fondamental. Il existe une bonne théorie heuristique de ce phénomène, connue en physique sous le nom de théorie BCS. Notre but est de créer une version mathématiquement rigoureuse de cette théorie.

Le formalisme mathématique est le suivant. L'espace des états à un électron est comme il est d'usage en mécanique quantique, l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$ pour la dépendence dans la position de la fonction d'onde, tensoriel un espace de dimension deux pour le spin, qui peut prendre les deux valeurs notées $\uparrow$ et $\downarrow$.

Pour représenter un grand nombre d'électrons on construit de la manière habituelle un espace somme directe de produits tensoriels antisymmétrisés (lélectron étant un fermion), appelé espace de Fock. On considère un système dont la densité d'électrons est maintenue constante dans la limite thermodynamique d'un grand volume (ce qui est naturel pour un métal dont le nombre d'électrons "libres" est constant par atome). Pour imposer cette contrainte on introduit une constante $\mu$, appelée potentiel chimique, associée à cette densité, et on considère que dans $F$ l'état particulier vide à partir duquel tous les autres sont construits, noté $\Omega$ et appelé *mer de Fermi*, est un état dans lequel chaque état électronique à une particule d'énergie inférieure ou égale à $\mu$ est rempli. A partir du vide les autres états de $F$ sont engendrés par application d'opérateurs de création d'électrons ou de "trous". Donc $F = \oplus_{p,q=0}^{\infty} F_{p,q}$ dans lequel $p$ représente le nombre de particules et $q$ le nombre de trous. L'énergie d'un électron est purement cinétique (en l'absence de champs moyens électrique ou magnétique) et vaut $\epsilon(k) = k^2/2m$ où $m$ est la masse d'un électron. L'opérateur $a_{k,\sigma}, k \in \mathbb{R}^d, \sigma \in \{\uparrow, \downarrow\}$ crée un trou de moment $-k$ et de spin $\sigma$ si $k^2/2m < \mu$ et annihile un électron de moment $k$ et de

spin $\sigma$ si $k^2/2m > \mu$. De même $a^*_{k,\sigma}, k \in \mathbb{R}^d, \sigma \in \{\uparrow, \downarrow\}$ annihile un trou de moment $-k$ et de spin $\sigma$ si $k^2/2m < \mu$ et crée un électron de moment $k$ et de spin $\sigma$ si $k^2/2m > \mu$.

L'Hamiltonien d'un système d'électrons libres agit sur l'espace de Fock $F$ par la formule:

$$H_0 = \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \epsilon(k) a^*_{k,\sigma} a_{k,\sigma} \tag{I.1}$$

L' Hamiltonien complet avec interaction est du type:

$$H = H_0 + \sum_{\alpha,\beta=\uparrow,\downarrow} \int \prod_{i=1}^{4} \frac{d^d k_i}{(2\pi)^d} (2\pi)^d \delta(k_1 + k_2 - k_3 - k_4)$$
$$\lambda \hat{V}(k_3 - k_1) a^*_{k_1,\alpha} a^*_{k_2,\beta} a_{k_4,\beta} a_{k_3,\alpha} \tag{I.2}$$

où $\hat{V}$ est la transformée de Fourier d'un potentiel à deux corps $V(x-y)$ engendré par les phonons (et la répulsion électrostatique) et $\lambda$ est une constante de couplage, qui nous permettra ensuite par développement en série entière de définir le développement perturbatif de la théorie.

L' opérateur nombre de fermions est $N = \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} a^*_{k,\sigma} a_{k,\sigma}$, et l'on s'intéresse par exemple à l'énergie libre du système par unité de volume, qui est le minimum du spectre de l'opérateur $K = H - \mu N$. On voudrait également savoir s'il y a un trou dans le spectre entre l'état fondamental et le premier état excité, etc...

La formulation hamiltonienne de la mécanique quantique est lourde à manipuler et l'on sait que l'information sur le système est codée d'une façon plus simple dans les fonctions de Green, qui correspondent aux valeurs moyennes dans le vide des produits ordonnés dans le temps des opérateurs de champ. Plus précisément on cherchera à construire la continuation analytique de ces fonctions de Green à des temps imaginaires ou fonctions de Green euclidiennes (appelées aussi fonctions de Schwinger en théorie des champs).

Les opérateurs de champ (à temps imaginaires) sont définis par

$$\psi(\xi) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} a_{k,\sigma} e^{ik\cdot x} e^{-e(k)\cdot t} \tag{I.3}$$

$$\bar{\psi}(\xi) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} a^*_{k,\sigma} e^{-ik\cdot x} e^{+e(k)\cdot t} \tag{I.4}$$

où $\xi = (x, t, \sigma)$, $e(k) = \epsilon(k) - \mu = (k^2/2m) - \mu$.

Ces opérateurs satisfont aux règles d'anticommutation habituelles pour des variables de Grassmann. La fonction à deux points, ou propagateur, s'écrit alors, si $T$ est l'opérateur d'ordre temporel:

$$
\begin{aligned}
C(\xi_1, \xi_2) &= - < \Omega, T(\psi(\xi_1)\bar{\psi}(\xi_2))\Omega > \\
&= -\chi(|k| - \sqrt{2m\mu})\delta_{\sigma_1\sigma_2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ik\cdot(x_1 - x_2)} e^{-e(k)\cdot(t_1 - t_2)} \text{ si } t_1 > t_2 \\
&= \chi(\sqrt{2m\mu} - |k|)\delta_{\sigma_1\sigma_2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ik\cdot(x_1 - x_2)} e^{-e(k)\cdot(t_1 - t_2)} \text{ si } t_2 \geq t_1 \\
&= \delta_{\sigma_1\sigma_2} \int \frac{d^{d+1}k}{(2\pi)^{d+1}} \frac{e^{ik\cdot(\xi_1 - \xi_2)}}{ik_0 - e(k)}
\end{aligned}
\tag{I.5}
$$

en utilisant une intégrale de contour.

Remarquons que la transformée de Fourier du propagateur, $\hat{C}$, a une singularité sur une variété **S** qui est dans l'espace des moments le produit de la sphère spatiale $S^{d-1}$ de rayon $k_F = \sqrt{2m\mu}$ (ou sphère de Fermi) par le point origine $k_0 = 0$. (Cette différence entre le temps et l'espace reflète la natue non-relativiste du problème. En théorie des champs euclidienne ordinaire on a pour des bosons de masse nulle des propagateurs euclidiens tels que $1/p^2$ dont la singularité est le simple point $p = 0$. Remarquons aussi que la codimension d'un point est $d$ alors que la codimension de **S** est 2, donc indépendante de $d$. Ceci explique le fait que, contrairement à la théorie des champs, la théorie BCS devrait être dans une certaine mesure indépendante de la dimension.

Les fonctions de Schwinger d'un système libre sont simplement des produits de fonctions à deux points, la structure étant celle d'un déterminant dû à la nature anticommutante des champs:

$$
S^0_{2p}(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{2p-1}, \xi_{2p}) = \det C(\xi_{2i-1}, \xi_{2j}) \equiv \int \psi(\xi_1)\bar{\psi}(\xi_2)...\psi(\xi_{2p-1})\bar{\psi}(\xi_{2p}) d\mu_C(\psi, \bar{\psi})
\tag{I.6}
$$

où la mesure libre de Berezin de propagateur $C$, $d\mu_C(\psi, \bar{\psi})$, est définie par ses moments précisément à l'aide de la formule (I.6).

Le problème de construction des fonctions de Schwinger du modèle en interaction se ramène alors plus généralement à définir les moments de la mesure en interaction d'expression formelle:

$$\frac{1}{Z}e^{-\lambda \mathbf{V}}d\mu_C(\psi,\bar{\psi}) \tag{I.7}$$

$$\mathbf{V} = \int \prod_{i=1}^{4} d\xi_i \;\; V(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)\,\bar{\psi}(\xi_1)\bar{\psi}(\xi_2)\psi(\xi_4)\psi(\xi_3) \tag{I.8}$$

où l'interaction quartique $\mathbf{V}$ à pour noyau une fonction $V(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)$ invariante par translation et intégrable sur trois des variables. (Le cas d'un potentiel à deux corps est un cas particulier de cette situation). Dans (I.8) on utilise la notation

$$\int d\xi = \sum_{\sigma\in\{\uparrow,\downarrow\}} \int_{\mathbb{R}} d\tau \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x}. \tag{I.9}$$

Par exemple l'énergie libre par unité de volume dont il est question plus haut s'exprime, dans cette théorie des champs euclidienne comme $E \equiv \lim_{\Lambda\to\infty}\frac{1}{\Lambda}\log Z(\Lambda)$ où $\Lambda$ est une boîte de taille finie que l'on fait tendre vers l'infini (limite thermodynamique) et $Z(\Lambda)$ est la normalisation de la théorie dans un volume $\Lambda$.

Pour définir l'intégrale fonctionnelle (I.7) on peut utiliser un développement en série entière de l'interaction et les règles de calcul des moments de la mesure libre (I.6). On obtient ainsi les fonctions de Schwinger sous la forme d'une série formelle dont le terme d'ordre $n$ s'écrit comme une somme de contributions ou amplitudes associées à des graphes de Feynman à $n$ vertex:

$$\begin{aligned} S_{2p}(\xi_1,\xi_2,...,\xi_{2p-1},\xi_{2p}) &= \frac{1}{Z}\int \psi(\xi_1)\bar{\psi}(\xi_2)...\psi(\xi_{2p-1})\bar{\psi}(\xi_{2p})e^{-\lambda\mathbf{V}}d\mu_C(\psi,\bar{\psi}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n S_{2p,n}(\xi_1,\xi_2,...,\xi_{2p-1},\bar{\xi}_{2p}) \end{aligned} \tag{I.10}$$

$$S_{2p,n}(\xi_1,\xi_2,...,\xi_{2p-1},\xi_{2p}) = \sum_{G\in\mathbf{G}_{n,p}} A_G(\xi_1,\xi_2,...,\xi_{2p-1},\xi_{2p}) \tag{I.11}$$

Dans cette formulation les graphes $G$ sont faits de lignes orientées (à cause de la différence entre les $\psi$ et les $\bar{\psi}$), et les vertex correspondent à des insertions du potentiel $V$. L'ensemble $\mathbf{G}_{n,p}$ correspond à une certaine classe de tels graphes avec $n$ vertex et $p$ lignes externes, comptés

avec certains poids combinatoires qui peuvent être totalement explicités. L'amplitude $A_G$ associée à un graphe $G$ peut s'écrire formellement comme une intégrale sur un ensemble de moments indépendants, un par boucle du graphe. L'intégrant n'est autre que le produit sur toutes les lignes du graphe des propagateurs correspondant $\frac{1}{ik_0 - e(k)}$ (où $k$ est une somme des moments de boucles correspondnat au moment total circulant le long de la ligne), avec une règle particulière pour le signe du terme $ik_0$, qui dépend du sens de circulation de $k$ par rapport à l'orientation de la ligne. Ces "règles de Feynman" sont exposées dans [FT1], et la convergence des intégrales individuelles ainsi définies y est étudiée en détail. En particulier on peut montrer:

**Théorème I [FT1]**

Les amplitudes des graphes qui ne contiennent aucun sous graphe à deux lignes externes sont absolument convergentes. Les amplitudes des graphes qui ne contiennent ni sous graphe à deux lignes externes ni sous graphe à quatre lignes externes sont bornées par $K^n$, où $K$ est une constante universelle. Les amplitudes des graphes ne contenant pas de sous graphes à deux lignes externes mais contenant des sous graphes à quatre lignes externes sont bornées par $K^n f!$, où $f \leq n$ est le nombre maximal de sous graphes à quatre lignes externes non-"enchevêtrés" dans le graphe considéré.

Ce théorème présente une ressemblance frappante avec les bornes de grands ordres obtenues il y a une dizaine d'années dans le cadre de théorie des champs juste renormalisables [R]; mais, comme annoncé plus haut, ce type de comportement est ici valable à toute dimension, alors que pour une théorie des champs il n'y a qu'une dimension (en général $d = 4$) pour laquelle la théorie est juste renormalisable.

On peut rendre les graphes à deux lignes externes convergents par une procédure de soustraction appelée renormalisation. Nous savons maintenant que ce procédé n'est en réalité qu'une façon un peu obscure de calculer la loi d'évolution de la théorie lorsqu'on l'analyse à différentes échelles. Ce point de vue moderne sur la renormalisation, qui porte en physique le nom (hélas très mal choisi) de groupe de renormalisation, a une portée qu'on est tenté de dire universelle, dans la mesure où la physique consiste précisément à déduire le comportement macroscopique d'un système à partir de lois fondamentales agissant en général à une échelle microscopique.

Dans le cas qui nous intéresse il convient tout d'abord d'isoler, afin de l'analyser finement, la singularité du propagateur au voisinage de la variété critique **S**. C'est elle en effet qui est responsable des divergences associées aux sous graphes à deux lignes externes ou des grands effets (en $f!$) associés aux sous graphes à quatre lignes externes, annonciateurs d'une dynamique non-triviale du groupe de renormalisation.

Pour se donner d'emblée un outil puissant d'attaque de cette singularité, on divise le propagateur $\hat{C}$ en tranches correspondant à une loi géométrique d'approche. Cette méthode va nous fournir à la fois un cadre pour mettre en place le groupe de renormalisation et aussi une clé pour resommer les séries entières en $\lambda$ qui n'étaient jusqu'à présent que des séries formelles, donc pour donner un sens aux intégrales fonctionnelles (I.10).

Nous considérons donc un entier négatif $j = 0, -1, -2, \ldots$ La $j$-ième "tranche de moments" aura pour covariance un morceau de la covariance (I.5) correspondant à une tranche ou coquille d'épaisseur $M^j$ autour de la singularité. Le paramètre $M$ est un nombre arbitraire strictement plus grand que 1 de sorte que l'on approche de la singularité pour $j \to -\infty$. Le propagateur de cette $j$-ième tranche est donc

$$C^j(\xi_1, \xi_2) = \delta_{\sigma_1,\sigma_2} \int \frac{d^{d+1}p}{(2\pi)^{d+1}} \frac{e^{i<p,\xi_1-\xi_2>}}{ip_0 - e(\mathbf{p})} f_j(p), \tag{I.12}$$

où

$$f_j(p) = f\left(M^{-2j}\left(p_0^2 + e(\mathbf{p})^2\right)\right) \tag{I.13}$$

$f$ étant une fonction de $C_0^\infty([1, M^4])$ de sorte que $|ip_0 - e(\mathbf{p})|$ dans (I.12) soit d'ordre $M^j$. Dans notre modèle on peut restreindre le propagateur total (I.5) à valoir $\sum_{j\leq 0} C^j$. Cette procédure dite de "cutoff ultraviolet" élimine des grands moments $k$, auquels on ne s'intéresse pas car ils n'intervienent pas en physique du solide ordinaire et pour lesquels de toute façon l'approximation non-relativiste utilisée ici n'est pas valable.

On peut définir les fonctions de Schwinger de la théorie à volume fini $\Lambda$ (une boîte cubique que l'on fera tendre ensuite vers l'espace entier) et à indice $j$ fixé par les formules:

$$\mathbf{V}_\Lambda = \int_{\Lambda^4} \prod_{i=1}^{4} d\xi_i \;\; V(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)\, \bar{\psi}(\xi_1)\bar{\psi}(\xi_2)\psi(\xi_4)\psi(\xi_3) \tag{I.14}$$

$$S_{2p,j,\Lambda}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2p-1}, \xi_{2p}) = \frac{1}{Z_\Lambda^j} \int \psi(\xi_1)\bar{\psi}(\xi_1)\ldots\psi(\xi_p)\bar{\psi}(\xi_p) e^{-\lambda \mathbf{V}_\Lambda} d\mu_{C^j}(\psi, \bar{\psi})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n S_{2p,n,j,\Lambda}(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_p, \bar{\xi}_p) \tag{I.15}$$

$$S_{2p,n,j,\Lambda}(\xi_1, \bar{\xi}_1, ..., \xi_{2p-1}, \xi_{2p}) = \sum_{G \in \mathbf{G}_{n,p}} A_{G,j,\Lambda}(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{2p-1}, \xi_{2p}) \tag{I.16}$$

Montrer la convergence des séries formelles (I.15) n'est pas difficile, par exemple en utilisant une simple inégalité de Gram sur les déterminants, mais le résultat ainsi obtenu ne doit pas faire illusion. Par exemple on peut montrer facilement le lemme suivant:

**Lemme**

Les séries (I.15) sont analytiques dans un disque de rayon const $/M^{2j}|\Lambda|$.

Ce lemme n'est toutefois pas du tout satisfaisant du point de vue de l'analyse de la théorie complète puisque le rayon d'analyticité décroît à toute vitesse lorsque l'on s'approche de la singularité (et lorsque $\Lambda \to \mathbb{R}^{d+1}$). Un première tâche consiste donc à développer une méthode qui pour chaque tranche fournisse une borne uniforme, indépendante de $\Lambda$ et $j$. Pour l'instant nous ne savons le faire que pour une dimension $d = 2$ d'espace (si l'on excepte le cas de la dimension 1, beaucoup plus facile car la "sphère" de Fermi se réduit à deux points). Plus précisément on peut prouver:

**Théorème II [FMRT]**

En dimension $d = 2$ il existe une constante $K$ indépendante de $j$ et $\Lambda$, telle que

$$|||S_{2p,n,j,\Lambda}||| \leq \text{const}^{\,n+p} M^{(2-5p/2)j} |||V|||^n \tag{I.17}$$

où

$$|||S_{2p,n,j,\Lambda}||| = \max_k \sup_{\xi_k} \int \prod_{i \neq k} d\xi_i |S_{2p,n,j,\Lambda}(\xi_1, \cdots, \xi_{2p})|. \tag{I.18}$$

De plus les limites

$$S_{2p,n,j} = \lim_{\Lambda \to \mathbb{R}^3} S_{2p,n,j,\Lambda} \tag{I.19}$$

existent et les fonctions de Green à volume infini à l'échelle $j$

$$S_{2p}^{(j)} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n S_{2p,n,j} \tag{I.20}$$

sont analytiques dans le disque $|\lambda| < R = (\text{const}\, |||V|||)^{-1}$.

Sans donner la démonstration de ce théorème, mentionnons qu'il repose sur une propriété particulière à la dimension deux: les quadrilatères à côtés égaux y sont nécessairement des parallélogrammes (losanges). Ces quadrilatères interviennent lorsque quatre moments s'ajoutent en un vertex (par conservation des moments le quadrilatère est bien fermé). Le fait que les côtés sont approximativement égaux est dû à la nature sphérique de la singularité. Toutefois la conclusion (losange...) comme les prémices n'est vraie qu'approximativement. On peut découper de façon assez naturelle la coquille sphérique d'indice $j$ en $M^{-(d-1)j}$ boîtes approximativement cubiques de côté $M^j$, appelées secteurs, à l'aide d'une partition de l'unité

$$1 = \sum_{m=1}^{M^{-(d-1)j}} \eta_m(\mathbf{p}), \qquad \eta_m(\mathbf{p}) = \eta_m\left(\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}k_F\right)$$

de la surface de Fermi. $\eta_m$ a son support dans le secteur numéro $m$ et déborde un peu sur les voisins (dont le nombre est au plus $3^{d-1}-1$). On a alors le curieux résultat suivant [FMRT]:

**Lemme 2**

Fixons $m \in \mathbf{Z}^{d+1}$ et $\ell \geq 2$. Le nombre de $2\ell$-tuplets $\{S_1, \cdots S_{2\ell}\}$ de secteurs pour lesquels il existe $\mathbf{k}_i \in \mathbb{R}^d$, $i = 1, \cdots, 2\ell$ satisfaisant

$$\mathbf{k}'_i \in S_i, \quad |\mathbf{k}_i - \mathbf{k}'_i| \leq \text{const } M^j \ , \quad i = 1, \cdots, 2\ell \tag{I.21}$$

et

$$|\mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{k}_{2\ell}| \leq \text{const}\,(1 + |m|)\, M^j \tag{I.22}$$

est borné par

$$\text{const}^{\,\ell}(1 + |m|)^d M^{-(2\ell-1)(d-1)j} M^j \left\{1 + |j|\delta_{d,2}\delta_{\ell,2}\right\}. \tag{I.23}$$

En particulier, pour un vertex à quatre pattes, le nombre de 4-tuplets est au plus

$$\text{const}\,(1 + |n|)^d M^{(-3d+4)j} \left\{1 + |j|\delta_{d,2}\right\}. \tag{I.24}$$

$\mathbf{k}' = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$ désignant la projection de $\mathbf{k}$ sur la surface de Fermi. De plus on a une borne inférieure du même type.

A cause de ce résultat, et plus précisément du désagréable facteur $|j|$ dans (I.24) lorsque $d = 2$, on ne peut se contenter d'un découpage naïf et l'on doit faire un découpage assez

compliqué du propagateur en secteurs allongés et utiliser la décroissance spatiale anisotrope duale de ce découpage.

Pour l'instant nous ne savons pas comment généraliser le Théorème II au cas de la dimension 3. Mais par contre la suite de la théorie nous semble assez bien balisée. Le théorème II est un ingrédient qui doit permettre de contrôler rigoureusement le flot du groupe de renormalisation. Celui-ci a été étudié en détail dans [FT2]. Le flot des fonctions à deux points correspond à une simple redéfinition (ou renormalisation, dans le language des physiciens) du rayon de la sphère de Fermi. Le flot des fonctions à quatre points est beaucoup plus intéressant. La partie singulière correspond au cas d'un moment de transfert nul. Comme dans ce cas il reste encore deux moments indépendants sur la sphère, mais qu'il y a invariance par rotation globale de ces deux moments on a en fait une fonction non triviale sur la sphère à renormaliser. On peut utiliser par exemple l'analyse en harmoniques sphériques de cette fonction pour exprimer le flot correspondant en terme de la renormalisation d'une infinité de constantes de couplages. Le système dynamique ainsi obtenu est évidemment très complexe, mais dans le cas d'un potentiel suffisamment attractif (et même peut être sous des conditions génériques) on doit pouvoir prouver que ce système mène à une brisure de la symétrie du nombre de fermions. Le paramètre de brisure est défini par une équation d'autoconsistance connue en physique sous le nom d'équation BCS. Il écrante alors la singularité et "arrête" donc le flot. En ce sens le système n'est pas un liquide de Fermi. Il apparaît dans la théorie un mode de masse nulle ou boson de Goldstone associé à la brisure de cette symétrie abélienne, que l'on peut décrire explicitement. Le problème à longue distance créé par la singularité (ponctuelle cette fois) de ce propagateur à $p = 0$ rentre alors dans le cadre d'une analyse plus standard. On doit pouvoir démontrer la convergence infrarouge des fonctions contenant des propagateurs internes du boson de Goldstone à l'aide d'identités de Ward qui traduisent la présence de l'ancienne symétrie, pour $d + 1 > 2$, donc $d > 1$. De cette façon la construction des fonctions de Green de la théorie peut être achevée et l'on doit pouvoir montrer qu'elles ne décroissent pas exponentiellement à cause du boson de Goldstone. L'ensemble de ce programme est en préparation et nous semble réalisable rigoureusement en dimension 2 (et aussi en dimension 3 lorsque l'on disposera d'un analogue du Théorème II).

Pour en revenir au problème physique initial, mentionnons simplement que la brisure

du nombre de symétrie de fermions s'interpréte comme l'apparition de nouvelles particules formées de deux fermions de moments opposés (paires de Cooper). Ces particules peuvent transmettre le courant électrique sans aucune résistance et sont donc responsables du phénomène de supraconductivité. Ajoutons aussi que la dimension $d = 2$ n'est pas un cas d'école, l'intérêt des physiciens étant grand pour les aspects bidimensionnels de la théorie, notamment afin de comprendre la supraconductivité à haute température dans les céramiques.

## II Modèle d'Anderson dans le régime diffusif

La diffusion d'un électron unique dans un potentiel irrégulier est un deuxième problème de physique du solide auquel on peut essayer d'appliquer les mêmes méthodes. On souhaite par exemple connaître la conductivité électrique d'un matériau qui contient des impuretés ou présente des défauts aléatoires dans son réseau cristallin. On modélise de tels défauts par un potentiel aléatoire agissant sur l'électron. Le problème semble a priori plus simple puisque on se limite à la diffusion d'un seul électron, mais comme l'on veut moyenner sur les défauts du système on peut là aussi, bien qu'il s'agisse d'une simple équation de Schrödinger, introduire un formalisme de théorie des champs, et découvrir de nombreuses analogies avec le modèle précédent: groupe de renormalisation commandé par une singularité sphérique, brisure d'une symétrie abélienne U(1) par un paramètre fixé par une équation d'autoconsistance, et identités de Ward régularisant la divergence infrarouge du boson de Goldstone associé pour $d > 2$. Les différences principales viennent de la nature "bosonique" du développement de la résolvante pour une fonction de Green (et aussi du fait que la dimension totale est ici $d$, la dimension spatiale, et non $d + 1$).

Le modèle le plus simple à considérer s'appelle modèle d'Anderson. Il est défini comme suit. Soit un réseau $\mathbb{Z}^d$ et un potentiel aléatoire $V$ avec une distribution indépendante gaussienne identique à chaque site.

Le Hamiltonien est $H = -\Delta/2m + V$, où $\Delta = -2d\delta_{i,i} + \sum_{|i-j|=1} 1_{ij}$ est la représentation habituelle du Laplacien sur réseau par un opérateur aux différences finies ne s'étendant qu'aux plus proches voisins. $V$ est l'opérateur de multiplication par $V(x)$, donc un opérateur diagonal dans l'espace direct des $x$. L'équation de Schrödinger pour un électron dans ce potentiel s'écrit

$$i\frac{d}{dt}\psi = H\psi \tag{II.1}$$

On peut introduire les moyennes sur $V$ des résolvantes ou fonctions de Green:

$$< G_+(x,y,E) >= \lim_{\epsilon \to 0+, \Lambda \to \mathbb{Z}^d} \int d\mu_\Lambda(V) \frac{1}{-\Delta_{lattice} - (E+i\epsilon)I + \lambda V} \tag{II.2}$$

où $\Lambda$ est une boîte finie que l'on fait tendre vers l'infini (limite thermodynamique), $I$ est l'opérateur identité, et la mesure gaussienne normalisée correspondant au désordre est:

$$d\mu_\Lambda(V) = Z(\Lambda)^{-1} \prod_{x \in \Lambda \cap \mathbb{Z}^d} [e^{-V(x)^2} dV(x)]. \tag{II.3}$$

Les quantités moyennées du type $\lim_{\Lambda \to \mathbb{Z}^d} \int d\mu_\Lambda(V) f(V)$ seront notées $< f >$.

Il est aussi essentiel de considérer des moyennes de produits de fonctions de Green avec régulateurs opposés:

$$< G_+(x,y,E) G_-(x,y,E) >= \lim_{\epsilon \to 0+} < |\frac{1}{-\Delta_{lattice} - (E+i\epsilon)I + \lambda V}|^2 > \tag{II.4}$$

On peut étudier ce modèle de trois points de vue intimement reliés: le comportement des fonctions de Green moyennées, une information de nature probabiliste sur le spectre du Hamiltonien, et enfin les propriétés de transport moyen. Pour étudier ces dernières propriétés il faut introduire la quantité représentant l'éloignement moyen dans le temps d'un paquet d'ondes centré initialement à l'origine:

$$\bar{r}^2(t) =< \int dx x^2 |e^{itH} \psi_0|^2 > \tag{II.5}$$

où $\psi_0$ est une fonction d'onde dans $L^2$ centrée autour de l'origine, telle que $\delta(x=0)$ (pas de problèmes de régularisation puisqu'on est sur un réseau) ou bien du type $c \cdot e^{-x^2}$ (paquet d'ondes gaussien).

A l'aide d'une analyse heuristique basée en particulier sur le développement perturbatif de la résolvante, les physiciens s'attendent au comportement suivant pour ce modèle:

**A) Fonctions de Green; conjectures**

1) Pour d=1,2, ou pour d=3 et $\lambda$ assez grand, $< G_+ >$ and $< G_+ G_- >$ décroissent exponentiellement.

2) Pour d=3 et $\lambda$ petit, $< G_+ >$ décroît exponentiellement mais $< G_+G_- >$ ne décroît pas exponentiellement; plus précisément sa transformée de Fourier $K(p) = \int dx e^{ipx} < G_+(0,x)G_-(0,x) >$ se comporte comme $1/Dp^2$ si $p \to 0$, ce qui correspond à une décroissance en $1/x$ à trois dimensions.

**B) Spectre; conjectures**

1)Pour d=1,2, ou pour d=3 et $\lambda$ assez grand, avec probabilité un le spectre est dense et purement ponctuel et les fonctions propres décroissent exponentiellement.

2) Pour d=3 et $\lambda$ petit, avec probabilité un il y a du spectre absolument continu pour $E$ petit.

**C) Transport; conjectures**

1)Pour d=1,2, ou pour d=3 et $\lambda$ assez grand, il existe une constante $C$ telle que $\bar{r}^2(t) \leq C$.

2) Pour d=3 et $\lambda$ petit (non nul), il existe une constante $D$ telle que $\bar{r}^2(t) \simeq_{t\to\infty} D\cdot t$ (rappelons que pour $\lambda = 0$ on a génériquement $r^2(t) \simeq_{t\to\infty} K\cdot t^2$ (comportement ballistique)).

L'ensemble des comportements du type 1 porte le nom de *localisation* et correspond du point de vue de la conductivité électrique à un isolant; les comportements du type 2 s'appellent comportements diffusifs; par la formule de Kubo les physiciens définissent la conductivité électrique comme proportionnelle à la constante $D$; par conséquent dans le deuxième cas on a conduction pour des énergies $E$ dans une certaine région, ou bande. Cet aspect est essentiel pour la physique des semi-conducteurs.

Les résultats rigoureux jusqu'à présent concernent uniquement le régime de localisation. En dimension $d = 1$ ou à toute dimension $d$ pour $\lambda$ grand, on peut prouver qu'il y a bien localisation [S et references citées]. Si nous exceptons le cas $d = 1$ qui est très particulier, le résultat clé sur ce problème est la décroissance exponentielle des fonctions de Green à grand $\lambda$ ou grande énergie $E$, prouvée dans [FS] par une sorte de théorème KAM en probabilité. Dans ce régime c'est la partie non-diagonale de l'opérateur de Laplace sur réseau que l'on développe comme une perturbation de l'opérateur $2d + \lambda V$ (remarquons que presque sûrement cet opérateur a un spectre purement ponctuel dense avec des fonctions propres localisées exactement sur les sites du réseau).

Il n'y a pas encore de résultats rigoureux dans les cas $d = 3$, $\lambda$ petit ou $d = 2$, $\lambda$ grand. Enfin la zone intermédiaire pour $d = 3$ est très intéréssante puisque l'on devrait y observer une transition entre les comportements localisés et diffusifs (transition de Mott-Anderson).

Nous voudrions commencer par l'étude du régime diffusif à $d = 3$, $\lambda$ petit, car c'est ce cas qui présente beaucoup de points communs avec le problème de la supraconductivité discuté plus haut. Dans ce régime, c'est l'opérateur $\lambda V$ qu'il convient de considérer comme une perturbation de l'opérateur Laplacien. Le développement de la résolvante ressemble alors beaucoup lorsque l'on intégre sur $V$ au développement perturbatif d'une théorie des champs du type $\phi^4$, mais techniquement les règles de combinatoire des graphes sont celles d'une théorie vectorielle à zéro composantes. Il n'y a plus d'antisymétrie dans le problème, donc on ne peut plus se servir de compensations de signes dans les déterminants pour donner un sens aux séries entières perturbatives. Toutefois l'analogie avec la théorie $\phi^4$ suggère que les méthodes constructives s'appliquent encore, mais que les sommations ordinaires dans le cas fermionique deviennent dans le cas bosonique des sommations au sens de Borel [R]. Ce point de vue a été récemment rendu rigoureux dans le cas tout à fait similaire d'un modèle de polymères ou chemins aléatoires avec interaction répulsive, et l'analogue du développement de la théorie constructive a été obtenu [AIM]. Nous avons donc bon espoir qu'il n y a pas là de difficultés insurmontables.

Pour montrer le lien entre les points de vue A) et C) nous indiquerons simplement comment l'étude statique (cas A) est reliée à l'étude de la dynamique dans le temps (cas C). La fonction d'onde nulle dans le passé et égale au temps $t$ à l'évolution dans le temps d'une fonction $\delta$ centrée à l'origine n'est autre que la transformée de Fourier par rapport à $E$ de la fonction de Green retardée $G_+(x, 0, E)$. Le calcul du module de la fonction d'onde fait intervenir la fonction complexe conjuguée de $G_+(x, 0, E)$, à savoir $G_-(x, 0, E')$. En posant $\omega = E - E'$ on trouve:

$$\bar{r}^2(t) = \int x^2 dx \int dE \int d\omega e^{i\omega t} < G_+(x, 0, E) G_-(x, 0, E + \omega) > \qquad \text{(II.6)}$$

Si l'on reprend l'analyse du boson de Goldstone faite à $\omega = 0$, on constate que ce

boson acquiert, au premier ordre en $\omega$ une partie imaginaire linéaire. Par conséquent

$$\int dx e^{iq\cdot x} < G_+(x,0,E)G_-(x,0,E+\omega) > \simeq_{\omega\to 0} \frac{1}{cq^2 - ic'\omega} \tag{II.7}$$

où $c$ et $c'$ sont deux constantes. On en déduit bien que le déplacement moyen $\bar{r}^2(t)$ doit se comporter comme $K.t$ pour $t$ grand (pour obtenir des quantités finies il faut toutefois tenir compte de la régularisation sur réseau, ou utiliser des paquets d'onde gaussiens).

Nous concluons que l'étude des fonctions de Green par une méthode inspirée de la théorie des champs permet donc aussi en principe de calculer les propriétés de transport moyen; toutefois pour transformer en théorème les conjectures indiquées plus haut (dans le cas $d = 3$ et $\lambda$ petit), nous aurons à construire un analogue tridimensionnel et bosonique du théorème 2 de la section I, car la sphère à considérer est dans ce cas une vraie sphère de dimension 2 et non un simple cercle. Pour l'instant nous ne savons pas plus résoudre ce problème dans le cas bosonique que dans le cas fermionique mais il nous semble que la solution (si elle existe...) est vraissemblablement la même dans les deux situations.

**Remerciements** Nous remercions Wei-Min-Wang pour des discussions sur le problème II.

**References**

[AIM] D. Arnaudon, D. Iagolnitzer et J. Magnen, "Weakly self avoiding polymers in four dimensions, rigorous results", preprint Ecole Polytechnique, à paraître dans Phys. Letters B

[FMRT] J. Feldman, J. Magnen, V. Rivasseau et E. Trubowitz, "An infinite Volume Expansion for Many Fermion Green's Functions", preprint ETH Zürich, à paraître dans Helvetica Physica Acta.

[FS] J. Fröhlich et T. Spencer, Commun. Math. Phys. **88**, 151 (1983)

[FT1] J. Feldman et E. Trubowitz, "Perturbation theory for Many Fermion Systems, Helvetica Physica Acta, Vol. 63 (1990).

[FT2] J. Feldman et E. Trubowitz, "The flow of an electron phonon system to the superconducting state", Helvetica Physica Acta, Vol. 64 (1991).

[R] V. Rivasseau, "From perturbative to constructive renormalization", Princeton University Press, 1991.

[S] T. Spencer, dans Comptes Rendus de l'Ecole d'été des Houches 1984, North Holland.