C. E. Cancelier
J.-Y. Chemin
C. J. Xu

Calcul de Weyl et opérateurs sous-elliptiques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1991-1992), exp. nº 22, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1991-1992____A22_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1991-1992

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

CALCUL DE WEYL ET OPERATEURS SOUS-ELLIPTIQUES

C.E. CANCELIER J.-Y. CHEMIN C.J. XU

Exposé n° XXII

17 Mars 1992

Introduction

Dans cet exposé, on considère une suite $(p_j), 1 \le j \le q$, de symboles classiques réels de $S^1(\Omega \times \mathbf{R}^n), \Omega$ étant un ouvert de $\mathbf{R}^n$. On suppose que la condition de sous-ellipticité de Hörmander est vérifiée à l'ordre 2 : pour tout compact K de Ω, il existe deux constantes $c, C > 0$, telles que tout $X = (x, \xi) \in K \times \mathbf{R}^n$, $|\xi| > C$, l'on ait

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{q} p_j^0(X)^2 + \sum_{i,j=1}^{q} \{p_i^0, p_j^0\}(X)^2 \ge c|\xi|^2,$$

p_j^0 désignant le symbole principal de $p_j, 1 \le j \le q$.

Soit P_j une réalisation proprement supportée de $p_j, 1 \le j \le q$, on considère l'opérateur laplacien généralisé

$$(2) \qquad \Delta_H = \sum_{j=1}^{q} P_j^* P_j.$$

On sait que Δ_H est sous-elliptique ([7], [2], [5]). On se propose de démontrer que Δ_H admet localement une paramétrixe qui est un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole a une croissance régie par une métrique et un poids convenables. Cette démarche est bien connue lorsque les opérateurs $P_j, 1 \le j \le q$, sont des champs de vecteurs réels réguliers ([7], [9], [10]). Elle nécessite ici le calcul de Weyl. Plus précisément :

Théorème A.—

Sous les hypothèses précédentes, il existe un symbole $b \in S^{-1}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\Omega \times \mathbf{R}^n)$ tel que, B étant une réalisation proprement supportée de b, $\mathrm{Id} - \Delta_H B = \mathrm{Id} - B\Delta_H$ soit un opérateur infiniment régularisant.

De plus, pour tout compact K de Ω, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^{2n}$, il existe une constante C telle que

$$(3) \qquad \forall (x,\xi) \in K \times \mathbf{R}^n \ |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta b(x,\xi)| \le C \ m(x,\xi)^{-2-|\beta|-|\alpha|} < \xi >^{|\beta|}$$

avec $m(x,\xi) = \left(\sum_{j=1}^{q} p_j^0(x,\xi)^2 + < \xi > \right)^{1/2}$.

Remarques :

• Aux points $X = (x, \xi)$ où le système est elliptique, on a alors $m(X) \geq$ Cte $< \xi >$ et l'estimation (3) est du type $S^{-2}_{1,o}$.

• Un poids de ce type a été introduit par R. Beals dans [1].

Le texte sera organisé de la manière suivante : Dans la *section 1*, on décrit les classes de symboles de Hörmander que l'on utilisera et l'on rappelle quelques unes de leurs propriétés de base. Dans la *section 2*, on énoncera et on démontrera un théorème d'inversion exacte. La démonstration nécessite l'introduction de l'espace de Sobolev associé à un poids m et à une métrique g déterminés par le système d'opérateurs pseudo-différentiels considéré. Dans la *section 3*, on déduira le théorème A du théorème d'inversion exacte démontré dans la précédente section et enfin la *section 4* sera consacrée à des résultats d'inclusion dans L^p des espaces de Sobolev associés à un système sous-elliptique de champs de vecteurs.

Les démonstrations omises dans ce texte sont détaillées dans [7].

Remerciements :

Nous tenons à remercier J.-M. Bony, J. Camus, N. Lerner et G. Métivier pour de fructueuses discussions.

1 - Classes de symboles

On commencera par rappeler les résultats classiques du calcul de Weyl ([8]) repris dans l'article [4], puis on démontrera un lemme utilisé à la section 2.

1.1 Rappels

A une distribution tempérée a définie sur l'espace des phases $\mathbf{R}^{2n}_X = \mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^n_\xi$, la quantification de Weyl associe un *opérateur* $a^w \ : \ \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ par la formule

$$a^w u(x) = (2\pi)^{-n} \int\int e^{i(x-y)\cdot\xi} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y)\ dy\ d\xi. \tag{1.1}$$

L'opération $\#$ de composition des symboles, définie par $(a\#b)^w = a^w b^w$ conduit au moins dans le cas où a et b appartiennent à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$, au résultat :

$$a\#b(X) = \pi^{-2n} \int\int e^{-2i[Y-X, Z-X]} a(Y)\ b(Z)\ dY\ dZ, \tag{1.2}$$

où $[\cdot,\cdot]$ désigne la forme symplectique $[X,Y] = y.\xi - x.\eta \quad ; \quad X = (x,\xi), Y = (y,\eta) \in \mathbf{R}^{2n}$.

Soit g une métrique riemannienne, c'est-à-dire la donnée, pour tout $X \in \mathbf{R}^{2n}$, d'une forme quadratique définie positive $g_X(\cdot)$. On note g_X^σ la métrique duale de g_X pour la dualité définie par la forme symplectique. Alors

$$g_X^\sigma(T) = \sup_{W \neq 0} \frac{[T,W]^2}{g_X(W)} \qquad T \in \mathbf{R}^{2n}. \tag{1.3}$$

On dira que g est une métrique de Hörmander si l'application $X \to g_X$ dépend mesurablement de X et si elle satisfait les trois propriétés suivantes :

g est une *métrique lente* : il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait

$$g_X(X-Y) \leq 1/C \Rightarrow (g_Y(\cdot)/g_X(\cdot))^{\pm} \leq C. \tag{1.4}$$

g vérifie le *principe d'incertitude* : $g_X(\cdot) \leq g_X^\sigma(\cdot)$, ce qui revient à dire que

$$\lambda_g(Y) = \inf_{W \neq 0} (g_Y^\sigma(W)/g_Y(W))^{1/2} \geq 1. \tag{1.5}$$

g est une *métrique tempérée* : il existe une constante $C > 0$ et un entier N tels que l'on ait

$$(g_Y(\cdot)/g_X(\cdot))^{\pm 1} \leq C(1 + g_Y^\sigma(Y-X))^N. \tag{1.6}$$

Soit M une fonction strictement positive, définie sur $\mathbf{R}^{2n}$. On dira que M est un *poids admissible* pour g s'il existe une constante $\widetilde{C}$ et un entier $\widetilde{N}$ tels que l'on ait

$$\begin{aligned} g_X(X-Y) \leq 1/C \quad &\Rightarrow \quad (M(Y)/M(X))^{\pm 1} \leq \widetilde{C} \qquad X,Y \in \mathbf{R}^{2n}, \\ (M(Y)/M(X))^{\pm 1} \quad &\leq \quad \widetilde{C}(1 + g_Y^\sigma(Y-X))^{\widetilde{N}} \qquad X,Y \in \mathbf{R}^{2n}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Une fonction a de classe $C^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ appartient à la *classe de symboles* $S(M,g)$ si toutes les semi-normes suivantes sont finies :

$$||a||_{k;S(M,g)} = \sup_{\substack{\ell \leq k \ ; \ X \in \mathbf{R}^{2n} \\ g_X(T_j) \leq 1}} |\partial_{T_1} \cdots \partial_{T_\ell} a(X)|/M(X), \tag{1.8}$$

en notant ∂_T la dérivée directionnelle $d \to < da, T >$.

Lorsque $a \in S(M,g)$, l'opérateur a^w est borné de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ dans lui-même, de $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ dans lui-même et, si $M = 1$, de $L^2(\mathbf{R}^n)$ dans lui-même. De plus les classes $S(M,g)$ forment une algèbre graduée, par le groupe multiplicatif des poids, pour l'opération $\#$.

1.2 Enoncé et démonstration du lemme 1.2.1

Soit a un symbole classique, positif, de $S^2(\mathbf{R}^{2n})$. Considérons les fonctions m et g_X définies par

$$m(X) = (a(X) + < \xi >)^{1/2} \qquad X \in \mathbf{R}^{2n}, \tag{1.9}$$

$< \xi >$ désignant $(1 + |\xi|^2)^{1/2}$,

$$g_X(dx, d\xi) = m^{-2}(X)(< \xi >^2 dx^2 + d\xi^2) \qquad X \in \mathbf{R}^{2n}. \tag{1.10}$$

Lemme 1.2.1.—

Soient a un symbole classique, positif de $S^2(\mathbf{R}^{2n})$, m et g les fonctions définies en (1.9) et (1.10), alors

1) g est une métrique de Hörmander, m un poids admissible pour g,

2) a appartient à $S(m^2, g)$.

Cette démonstration repose sur le fait que $S^1(\mathbf{R}^{2n})$ est inclus dans $S(m^2, g)$ et sur l'inégalité suivante, vérifiée pour toute fonction f positive de classe $C^2(\mathbf{R})$:

$$(\partial f/\partial x)^2 \leq 2 \sup(|\partial^2 f/\partial x^2|) f. \tag{1.11}$$

2 - Enoncé et démonstration du théorème global

Théorème 2.1.—

Soit a un symbole classique de $S^2(\mathbf{R}^{2n})$ dont la partie principale est positive. On suppose que a^w est inversible et que $a^w(x, D)^{-1}$ applique continûment $L^2(\mathbf{R}^n)$ dans $H^1(\mathbf{R}^n)$. Alors il existe un symbole $b \in S(m^{-2}, g)$ tel que $a \# b = b \# a = 1$ (m et g définis en (1.9) et (1.10)).

Avant de démontrer le théorème 2.1, on a besoin de plusieurs résultats démontrés dans [3] et [4], concernant en particulier les espaces de Sobolev associés à une métrique de Hörmander et l'inversibilité dans l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels d'opérateurs inversibles en tant qu'opérateurs entre espaces de Sobolev, vérifiés pour la métrique g du théorème 2.1. On a aussi besoin des deux lemmes 2.2 et 2.3 qui utilisent le concept de symboles confinés que nous allons rappeler.

Soit $U_{Y,r}$ la boule $\{X \mid g_Y(Y-X) < r^2\}$ où $r^2 < C^{-1}$ (C constante de lenteur (1.4)). Par définition, l'espace des *symboles confinés dans* $U_{Y,r}$ est l'espace $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$ muni de la famille de semi-normes

$$(2.1) \qquad ||d||_{k;\mathrm{Conf}(g,Y,r)} = \inf\{C \mid \partial_{T_1}\cdots\partial_{T_\ell} d(X)| \leq C(1+g_Y^\sigma(X-U_{Y,r}))^{-k/2}\},$$

où les vecteurs T_j vérifient

$$g_Y(T_j) \leq 1, \ell \leq k \text{ et } g_Y^\sigma(X-U_{Y,r}) = \inf_{W\in U_{Y,r}} g_Y^\sigma(X-W).$$

Une famille de symboles d_Y est dite *uniformément confinée dans les boules* $U_{Y,r}$ si les semi-normes $||d||_{k;\mathrm{Conf}(g,Y,r)}$ sont majorées par des constantes C_k indépendantes de Y.

• Il existe une g-partition de l'unité (théorème 3.1.3 de [3]), c'est-à-dire une famille uniformément confinée de fonctions φ_Y à support dans $U_{Y,r}$ vérifiant

$$(2.2) \qquad \int_{\mathbf{R}^{2n}} \varphi_Y |g_Y|^{1/2}\, dY = 1,$$

où $|g|$ désigne le déterminant de g.

Si M est un poids admissible pour g, on peut alors décomposer tout symbole $d \in S(M,g)$ sous forme intégrale en posant $d_Y = M^{-1}(Y)d\varphi_Y$ et

$$(2.3) \qquad d(X) = \int_{\mathbf{R}^{2n}} M(Y) d_Y(X) |g_Y|^{1/2} dY.$$

La famille d_Y est uniformément confinée et réciproquement si d_Y est une famille de symboles uniformément confinée, l'intégrale (2.3) converge et définit un élément de $S(M,g)$.

• Comme la métrique g est dominée par la métrique de Hörmander $\tilde{g}$ de type $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ((1.11), définition 7.1 de [4]), on a toutes les propriétés suivantes pour tous poids M et M_1 admissibles pour g et tout symbole $d \in S(M,g)$:

- On peut définir l'espace de Sobolev $H(M)$ (théorème 7.8 de [4]). $H(M)$ est l'espace des distributions $u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ vérifiant

$$(2.4) \qquad \int_{\mathbf{R}^{2n}} M^2(Y) ||\varphi_Y^w u||_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2} dY < \infty$$

(φ_Y partition de l'unité définie en (2.2)).

$H(M)$ est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H(M)} = \int_{\mathbf{R}^{2n}} M^2(Y)(\varphi_Y^w u, \varphi_Y^w v)_{L^2} |g_Y|^{1/2} dY. \tag{2.5}$$

On notera $|| \; ||_{H(M)}$ la norme associée.

- $H(1)$ est identique à $L^2(\mathbf{R}^n)$ (théorème 4.6 de [4]).

- Opérance dans les espaces de Sobolev (corollaire 4.5 de [4]) ; d^w applique continûment $H(M_1)$ dans $H(M_1/M)$.

- La condition suffisante d'inversibilité (corollaire 7.7 de [4]) : Pour qu'il existe $d' \in S(M^{-1}, g)$ tel que $d \# d' = d' \# d = 1$, il suffit que pour un poids admissible $\widetilde{M}$, l'opérateur d^w soit inversible en tant qu'opérateur de $H(\widetilde{M})$ dans $H(\widetilde{M}/M)$.

L'idée directrice de la démonstration du théorème 2.1 consiste à traiter le symbole a comme un symbole elliptique (de poids m^2) au sens suivant :

$$\exists (c,C) \in \mathbf{R}_+^2 \; \forall X \in \mathbf{R}^{2n} \; \lambda_g(X) \geq C \Rightarrow a(x) \geq cm^2(X). \tag{2.6}$$

Ceci suggère la décomposition de l'espace des phases $\mathbf{R}^{2n}$ en la réunion d'une zone dite sous-elliptique

$$\mathcal{S} = \{Y = (y,\eta) \in \mathbf{R}^{2n} \mid m(Y) \leq A < \eta >^{1/2}\} \tag{2.7}$$

et d'une zone dite elliptique $\mathcal{E} = \mathcal{S}^c$ ($A > 0$ désigne une constante assez grande que l'on va choisir ultérieurement).

Le théorème 2.1 résulte alors des deux lemmes suivants ; nous ne démontrerons que le lemme 2.2.

Lemme 2.2.—

Soit φ_Y une g-partition de l'unité (2.2). Il existe deux familles δ_Y et R_Y uniformément confinées dans les $U_{Y,r}$ telles que l'on ait pour $Y \in \mathcal{E}$

$$\varphi_Y = m^{-2}(Y)\delta_Y \# a + \lambda_g^{-1}(Y) R_Y. \tag{2.8}$$

Lemme 2.3.—

Soit θ_Y une famille de fonctions de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$ uniformément confinée. Alors pour tout poids M admissible pour g, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\int_{\mathbf{R}^{2n}} M^2(Y) ||\theta_Y^w u||_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2} dY \leq C ||u||_{H(M)}^2. \tag{2.9}$$

Démonstration du théorème 2.1

Comme $a \in S(m^2, g)$, a^w applique continûment $H(m^2)$ dans $L^2(\mathbf{R}^n)$. Donc en vertu de la condition suffisante d'inversibilité, il ne reste plus qu'à vérifier que

$$||u||_{H(m^2)} \leq \text{ Cte } ||a^w u||_{L^2}. \tag{2.10}$$

Or

$$\begin{aligned} ||u||_{H(m^2)} &= \int_{\mathbf{R}^{2n}} m^4(Y) ||\varphi_Y^w u||_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2} dY \\ &= \int_S m^4(Y) ||\varphi_Y^w u||_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2} dY + \int_{\mathcal{E}} m^4(Y) ||\varphi_Y^w u||_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2} dY \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Comme par hypothèse : $a^w(x, D)^{-1}$ applique continûment L^2 $(\mathbf{R}^n)$ dans $H^1(\mathbf{R}^n)$, on a pour le premier terme I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &\leq A^4 \int_{\mathbf{R}^{2n}} <\eta>^2 ||\varphi_Y^w u||_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2} dY \\ &\leq \text{ Cte } ||u||_{H^1(\mathbf{R}^n)}^2 \leq \text{ Cte } ||a^w u||_{L^2}^2. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Pour majorer I_2 on va décomposer φ_Y dans $\mathcal{E}$ (lemme 2.2) :

On a donc en quantifiant

$$\varphi_Y^w = m^{-2}(Y) \delta_Y^w a^w + \lambda_g^{-1}(Y) R_Y^w \tag{2.13}$$

et donc

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\mathcal{E}} m^4(Y) ||\varphi_Y^w u||_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2} dY \\ &\leq \text{ Cte } (\int_{\mathbf{R}^{2n}} ||\delta_Y^w a^w u||_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2} dY \\ &\quad + \sup_{Y \in \mathcal{E}} \lambda_g^{-2}(Y) \int_{\mathbf{R}^{2n}} m^4(Y) ||R_Y^w u||_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2} dY) \\ &\leq \text{ Cte } (a^w u||_{L^2}^2 + \frac{1}{A^2} ||u||_{H(m^2)}^2) , \end{aligned} \tag{2.14}$$

d'après le lemme 2.3 d'une part, et du fait que $\lambda_g(\cdot) \geq A$ dans $\mathcal{E}$ d'autre part.

Démonstration du lemme 2.2

Pour démontrer le lemme 2.2, il est nécessaire d'introduire la notion de biconfinement. On note $\Delta_r(X,Y)$ la quantité suivante qui mesure l'éloignement pour g^σ de deux g-boules.

$$\Delta_r(X,Y) = 1 + \sup\{g_X^\sigma(U_{X,r} - U_{Y,r}), g_Y^\sigma(U_{X,r} - U_{Y,r})\} \tag{2.15}$$

où

$$g_X^\sigma(U_{X,r} - U_{Y,r}) = \inf\ \{g_X^\sigma(X' - Y') \mid X' \in U_{X,r}, Y' \in U_{Y,r}\}.$$

Δ_r vérifie la propriété d'intégration (théorème 3.2.2 de [3], section 2.3 de [4]) :

$$\exists C, \exists N, \forall X \qquad \int_{\mathbf{R}^{2n}} \Delta_r^{-N}(X,Y)\ |g_Y|^{1/2} dY \leq C. \tag{2.16}$$

Le théorème de biconfinement suivant (théorème 3.2.1 de [3]) donne une estimation du reste $d \# h - dh$ que l'on notera $\lambda_g^{-1}(Y)R(d,h)$:

Soient d et h deux fonctions de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$, on a alors l'estimation suivante pour le reste $R(d,h)$ défini ci-dessus :

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad \forall N \in \mathbf{N} \quad \exists \ell \in \mathbf{N} \quad \exists C > 0 \quad ||R(d,h)||_{k;\mathrm{Conf}(g,Y,r)}$$

$$\leq C||d||_{\ell;\mathrm{Conf}(g,Y,r)}||h||_{\ell;\mathrm{Conf}(\delta,Z,r)}\Delta_r^{-N}(Y,Z). \tag{2.17}$$

En particulier si (d_Y) et (h_Y) sont deux familles de symboles uniformément confinées dans les boules $U_{Y,r}$, pour chaque entier N, la famille $\Delta_r^{-N}(Y,Z)R(d_Y,h_Z)$ est uniformément confinée dans les $U_{Y,r}$ et dans les $U_{Z,r}$.

Pour obtenir la décomposition (2.8) dans $\mathcal{E}$, on écrit φ_Y sous la forme du produit

$$\varphi_Y(X) = (\varphi_Y(X)/a(X))a(X) \qquad X \in \mathbf{R}^{2n}, \tag{2.18}$$

puis à l'aide de la forme intégrale (2.3) de a

$$\varphi_Y(X) = m^{-2}(Y)\tilde{\delta}_Y(X) \int_{\mathbf{R}^{2n}} m^2(Z)a_Z(X)|g_Z|^{1/2}dZ, \tag{2.19}$$

avec

$$\tilde{\delta}_Y(X) = (m^2(Y)\varphi_Y(X)/a(X)). \tag{2.20}$$

La famille a_Z est uniformément confinée dans les boules $U_{Z,r}$ (2.3) et la famille δ_Y définie par

$$\delta_Y = \begin{cases} \tilde{\delta}_Y & \text{si } Y \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est uniformément confinée dans les boules $U_{Y,r}$.

D'après le théorème de biconfinement (2.17) on a :

$$\delta_Y a_Z = \delta_Y \# a_Z + \lambda_g^{-1}(Y)\ \widetilde{R}\ (\delta_Y, a_Z). \tag{2.21}$$

De plus la famille $\Delta_r^{-N}(Y,Z)\widetilde{R}(\delta_Y, a_Z)$ est uniformément confinée pour tout N, Δ_r vérifie la propriété d'intégration (2.16), il s'ensuit alors que la famille définie pour tout $X \in \mathbf{R}^{2n}$ par

$$R_Y(X) = \begin{cases} m^{-2}(Y) \displaystyle\int_{\mathbf{R}^{2n}} m^2(Z)\widetilde{R}(\delta_Y, a_Z)(X)|g_Z|^{1/2}dZ & \text{si } Y \in \mathcal{E} \\ 0 \quad \text{sinon,} \end{cases} \tag{2.22}$$

est uniformément confinée dans les $U_{Y,r}$, ce qui achève la démonstration du lemme 2.2.

3 - Localisation

Il s'agit de démontrer le théorème A qui n'est rien d'autre qu'une version locale du théorème 2.1. On va préalablement construire une paramétrixe sur chaque compact de Ω.

Soit K un compact de Ω (on utilise les notations de l'introduction), on pose

$$A_K = \sum_{j=1}^{q}(\varphi_K P_j)(\varphi_K P_j^*) - \sum_{j=1}^{n}(1-\tilde{\varphi}_K)\partial_j^2(1-\tilde{\varphi}_K), \tag{3.1}$$

où φ_K et $\tilde{\varphi}_K$ sont deux fonctions $C_0^\infty(\Omega)$ telles que $\tilde{\varphi}_K$ vaille identiquement 1 près de K et soit supportée à l'intérieur de l'ensemble où φ_K vaut 1.

L'opérateur A_K est un opérateur positif, globalement sous-elliptique avec perte d'une dérivée, donc il existe deux constantes c et C positives telles que

$$||u||_{H^1(\mathbf{R}^n)} \leq C||(A_K + c \text{ Id})u||_{L^2}. \tag{3.2}$$

Le symbole principal $a_K + c$ de $A_K + c$ Id est positif ; on peut lui appliquer le théorème 2.1 avec m_K et g_K définis par (1.9) et (1.10). Donc il existe un symbole $p_K \in S(m_K^{-2}, g_K)$ tel que

$$(a_K + c) \# p_K = p_K \# (a_K + c) = 1. \tag{3.3}$$

De (3.3) on obtient

$$(3.4) \qquad \begin{aligned} u &= p_K^w A_K u &&+ c\, p_K^w u \\ &= p_K^w A_K u &&+ c\, p_K^w (p_K^w A_K u + c p_K^w u) \\ &= p_K^w A_K u &&+ c\, (p_K^w)^2 A_K u + c^2 (p_K^w)^2 u, \end{aligned}$$

ainsi de suite, d'où pour chaque $j \in \mathbf{N}^*$ un symbole b_j défini par

$$b_j = c^{j-1} p_K^{\#j} \in S(m_K^{-2j}, g_K).$$

Admettons un instant le lemme suivant :

Lemme 3.1.—

Soient g une métrique de Hörmander, M un poids admissible pour cette métrique, (b_j) une suite de symboles telle que $b_j \in S(M^{k_j}, g)$ où k_j est une suite strictement décroissante tendant vers $-\infty$ lorsque j tend vers $+\infty$. Alors il existe un symbole $b \in S(M^{k_0}, g)$ tel que $b - \sum_{j<N} b_j \in S(M^{k_N}, g)$.

Il en résultera l'existence d'un symbole $\tilde{b}_K \in S(m_K^{-2}, g_K)$ tel que :

$$(3.5) \qquad A_K \tilde{b}_K^W(x, D) - \text{ Id et } \tilde{b}_K^W A_K - \text{ Id opèrent de } \mathcal{E}'_K \text{ dans } C_0^\infty(\Omega).$$

Le théorème 18.5.10 de [8] assure par ailleurs l'existence du symbole b'_K de $S(m_K^{-2}, g_K)$ tel que $b_K^W = b'_K(x, D)$. Soit alors b_K défini par $b_K(x, \xi) = \varphi(x) b'_K(x, \xi)$, il est clair que

$$(3.6) \qquad \Delta_H b_K(x, D) - \text{ Id et } b_K(x, D)\Delta_H - \text{ Id opèrent de } \mathcal{E}'_K \text{ dans } C_0^\infty(\Omega).$$

Considérons maintenant un recouvrement (Ω_j) localement fini (de Ω) tel que $K_j = \bar{\Omega}_j$ soit un compact de Ω. Soient $(\varphi_j)_{j\in\mathbf{N}}$ une partition de l'unité associée à ce recouvrement et $(\chi_j)_{j\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions $C_0^\infty(\Omega_j)$ telles que, pour tout j, χ_j vaille 1 près du support de φ_j. On pose $B = \sum_{j\in\mathbf{N}} \chi_j b_{K_j}(x, D)\varphi_j$.

Il est évident que le symbole b de B appartient à $S^{-1}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\Omega \times \mathbf{R}^n)$. Reste à vérifier que $\Delta_H B -$ Id est un opérateur infiniment régularisant. On a :

$$(3.7) \qquad \Delta_H B = \sum_{j\in\mathbf{N}} \chi_j \Delta_H B \varphi_j + \sum_{j\in\mathbf{N}} (1 - \chi_j) \Delta_H B \varphi_j.$$

Le symbole de $\sum_j (1-\chi_j)\Delta_H B\varphi_j$ appartient à $S^{-\infty}(\Omega\times\mathbf{R}^n)$, il est donc infiniment régularisant ; alors

$$
(3.8)\qquad
\begin{aligned}
\Delta_H B &\equiv \sum_{j,k\in\mathbf{N}} \chi_j \Delta_H \chi_k b_{K_k}(x,D)\varphi_k\varphi_j\\
&\equiv \sum_{j,k\in\mathbf{N}} \chi_j \Delta_H b_{K_k}(x,D)\varphi_k\varphi_j\\
&\equiv \sum_{j,k\in\mathbf{N}} \chi_j \ \mathrm{Id}\ \varphi_k\varphi_j\\
&\equiv \mathrm{Id}
\end{aligned}
$$

(où l'on a noté $A\equiv B$ si et seulement $A-B$ opère de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans $C^\infty(\Omega)$).

Les estimations (3) de l'introduction résultent immédiatement de l'unicité des paramétrixes $b_K(x,D)$ (3.6) modulo un opérateur infiniment régularisant.

Démontrons alors l'unicité annoncée, ce qui achèvera la démonstration du théorème A :

Pour tout compact K de $\Omega, A\equiv B_{(K)}$ signifie $A-B$ opère de $\mathcal{E}'_K$ dans C_o^∞. Soient b_K et c_K deux paramétrixes vérifiant (3.6), alors

$$
\begin{aligned}
b_K - c_K &\equiv b_K\Delta_H c_K - c_K\Delta_H b_K\\
&\equiv c_K - b_K,
\end{aligned}
$$

d'où l'unicité.

Pour conclure, reste à démontrer le lemme 3.1 qui prouvera l'existence d'un symbole $b_K\in S(m_K^{-2},g_K)$ tel que $b_K-\sum_{j<N} b_j\in S(m_K^{-2N},g_K)$.

Démonstration du lemme 3.1

Soit $\chi\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ égale à 0 dans un petit voisinage de l'origine, et à 1 pour $|x|\geq 1$. On pose $\tilde b_j=\chi(M/t_j)b_j$ où (t_j) est une suite de nombres réels >0 vérifiant la condition (3.3). On se propose de démontrer que $b=\sum_{j\in\mathbf{N}}\tilde b_j$ répond à la question. t_j doit être choisi vérifiant la condition $\quad\forall\alpha,\beta\in\mathbf{N}^n\quad |\alpha|+|\beta|\leq j$

$$
(3.10)\qquad |\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta\tilde b_j(X)|\leq 2^{-j}M^{k_{j-1}}(X)<\xi>^{|\beta|}M^{-|\alpha|-|\beta|}(X)
$$

Or

$$\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta(\chi(M(X)/t_j)b_j(X)) = \sum_{\substack{\alpha'\leq\alpha \\ \beta'\leq\beta \\ \alpha',\beta'\in\mathbf{N}^n}} C_\alpha^{\alpha'} \; C_\beta^{\beta'} \partial_\xi^{\alpha-\alpha'} \partial_x^{\beta-\beta'}(\chi(M(X)/t_j)\partial_\xi^{\alpha'} \partial_x^{\beta'} b_j(X),$$

$$\partial_\xi^{\alpha-\alpha'} \partial_x^{\beta-\beta'}(\chi(M(X)/t_j) =$$

$$\sum_{q\geq 1} \sum_{\substack{\gamma_1+\cdots+\gamma_q=\alpha-\alpha'+\beta-\beta' \\ |\gamma_i|\geq 1 \\ \gamma_i\in\mathbf{N}^n}} t^{-q}\partial^{\gamma_1}M(X)\cdots\partial^{\gamma_q}M(X)\chi^{(q)}(M(X)/t_j),$$

alors tout d'abord

$$|\partial_\xi^{\alpha-\alpha'} \partial_x^{\beta-\beta'}(\chi(M(X)/t_j) \leq \text{ Cte}_{\alpha,\beta} \; t_j^{-q} \; M^q(X) < \xi >^{|\beta-\beta'} \mid M^{-|\alpha-\alpha'|-|\beta-\beta'|}(X)$$

puis

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta(\chi(M(X)/t_j)b_j(X)) \leq \text{ Cte}_{\alpha,\beta} \; M^{k_j-|\alpha|-|\beta|}(X) < \xi >^{|\beta|}$$

car $M \leq t_j$ sur le support de $\chi^{(q)}$

$$\begin{aligned} &\leq \text{ Cte}_{\alpha,\beta} M^{k_{j-1}} M^{k_j-k_{j-1}-|\alpha|-|\beta|} < \xi >^{|\beta|} \\ &\leq \text{ Cte}_{\alpha,\beta} M^{k_{j-1}} t^{k_j-k_{j-1}} M^{-|\alpha|-|\beta|} < \xi >^{|\beta|} \end{aligned}$$

car $M \geq \frac{1}{2}t_j$ sur le support de $\chi(M(X)/t_j)p_j(X)$.

La condition (3.3) se trouve alors réalisée si $t^{k_j-k_{j-1}} \leq$ Cte 2^{-j}. Par ailleurs la somme $\sum_{j\in\mathbf{N}} \tilde{b}_j$ est localement finie, donc $b \in C^\infty$.

Et enfin pour tout triplet (α,β,ℓ), on peut choisir N de telle sorte que $N \geq |\alpha|+|\beta|$, $k_{N-1} \leq k_\ell$, d'où

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta(b - \sum_{j<N} \tilde{b}_j)| \leq M^{k_\ell}(X) < \xi >^{|\beta|} M^{-|\alpha|-|\beta|}(X)$$

$$b - \sum_{j\leq\ell} b_j = b - \sum_{j<N} \tilde{b}_j + \sum_{\ell+1\leq j<N} \tilde{b}_j + \sum_{j\leq\ell}(b_j - \tilde{b}_j)$$

vérifie

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta(b - \sum_{j\leq\ell} b_j)| \leq \text{Cte}_{\alpha,\beta,\ell} \; M^{k_\ell}(X) < \xi >^{|\beta|} M^{-|\alpha|-|\beta|}$$

puisque $b_j \in S(M^{k_{j-1}}, g)$ et que pour $j \leq \ell$, $\quad b_j - \tilde{b}_j \in S(M^{k_\ell}, g)$.

4 - Inclusion dans les espaces L^p

On se propose de démontrer, dans le cas d'une somme de carrés de champs de vecteurs, le théorème 4.1 d'inclusion dans les espaces L^p. On utilisera les résultats de la section 4.6 de [4] que nous allons rappeler après avoir énoncé le théorème 4.1.

Théorème 4.1.—

On suppose que les opérateurs $P_j, 1 \leq j \leq q$, sont des champs de vecteurs à coefficients C^∞. On note Ω_ℓ l'ouvert

(4.1) $\Omega_\ell = \{x \in \mathbf{R}^n$; *le système* $P_1(x,\xi), \cdots, P_q(x,\xi)$ est de rang ℓ en $x\}$.

Soit $p > 2$; on pose

$$h_{s,p}(x) = \Big(\int (1 + p_j^0(x,\xi)^2 + <\xi>)^{-sp/(p-2)} d\xi\Big)^{(p-2)/2p}. \tag{4.2}$$

Pour tout compact K de Ω, pour tous s, p, ℓ tels que $s > (n - \ell/2)(1 - 2/p)$, il existe $c > 0$ tels que l'on ait :

$$||h_{s,p}^{-1} u||_{L^p(\Omega_\ell \cap K)} \leq C \, ||u||_{H(m_K^s)} \tag{4.3}$$

pour m_K et g_K définis par (1.9) et (1.10).

Démonstration

La métrique g_K est scindée c'est-à-dire qu'il existe des formes quadratiques définies positives $g_{1,X}$ et $g_{2,X}$ sur $\mathbf{R}^n$ telles que

$$g_K(dx, d\xi) = g_{1,X}(dx) + g_{2,X}(d\xi). \tag{4.4}$$

On a alors le théorème suivant (théorème 4.7 de [4]) que l'on rappelle pour la commodité du lecteur :

Soient M un poids admissible pour g et $p \in]2, +\infty[$. On note Ω_p l'ensemble des $x \in \mathbf{R}^n$ tels que la quantité

$$h_p(x) = ||M^{-1}(x,\xi)||_{L^{2p/(p-2)}(d\xi)}$$

soit finie.

Si la mesure de Ω_p est > 0, alors l'application $u \to h_p^{-1} u|_{\Omega_p}$ définie sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ se prolonge en une application définie sur $H(M)$ vérifiant

$$||h_p^{-1} u||_{L^p(\Omega_p)} \leq \text{ Cte } ||u||_{H(M)}.$$

On observe alors qu'un changement de variable ramène, via le théorème 4.7 de [4] ci-dessus, à l'étude évidente de la convergence de l'intégrale

$$\int (1 + \xi_1^4 + \cdots + \xi_\ell^4 + \xi_{\ell+1}^2 + \cdots + \xi_n^2)^{-sp/(2(p-2))} d\xi.$$