Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

Roger Temam

Variétés inertielles dans le cas non auto-adjoint. Applications aux variétés lentes

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1991-1992), exp. n° 20, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1991-1992____A20_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1991-1992

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

VARIETES INERTIELLES DANS LE CAS NON AUTO-ADJOINT APPLICATIONS AUX VARIETES LENTES

Roger TEMAM

Exposé n° XX

21 Avril1992

Introduction

Les systèmes dynamiques de dimension infinie associés à des équations aux dérivées partielles non linéaires dissipatives ont fait l'objet, ces dernières années, d'un regain d'intérêt important.

Les résultats obtenus démontrent que les comportements à t infini des solutions de tels systèmes sont souvent de **dimension finie**. D'une part il a été démontré que les attracteurs globaux de tels systèmes étaient en général de dimension finie ; dans le cas des équations de Navier Stockes en dimension deux ou trois d'espace, des estimations fines de la dimension de l'attracteur global ont permis de retrouver et de démontrer rigoureusement des parties de la théorie de la turbulence de Kolmogorov et Kraichnan, (cf [2], [4], [5]).

D'autre part le concept de **variété inertielle** a été introduit et l'existence de telles variétés a été prouvée pour certaines classes d'équations.(cf [8], [18]). Lorsqu'elle existe, une variété inertielle est une variété régulière de dimension finie (Lipschitzienne au moins), qui est positivement invariante par le flot et qui attire toutes les orbites à une vitesse exponentielle. Une telle variété fournit une description fine du régime permanent d'un écoulement et, du point de vue de la physique théorique, elle fournit un modèle de turbulence sous la forme d'une loi d'interaction entre les hautes et basses fréquences [19]. D'autre part les variétés inertielles et leurs approximations fournissent des algorithmes nouveaux prometteurs pour la simulation numérique des écoulements turbulents (cf [11], [12], [7], [16]).

Notre objet dans cet exposé est de présenter quelques résultats récents sur les variétés inertielles.

Nous commençons dans la section 1 par des rappels sur les équations dissipatives, sur les attracteurs et sur les variétés inertielles. Les résultats nouveaux sont présentés en section 2. Les motivations de ces nouveaux résultats sont expliqués en début de section 2. Elles sont doubles. D'une part il s'agit de développer la théorie des variétés inertielles dans le cas où l'opérateur linéaire apparaissant dans l'équation n'est plus auto-adjoint et ses valeurs propres sont complexes. D'autre part le cadre développé et les résultats ainsi obtenus permettent de faire le lien entre les variétés inertielles et les variétés lentes utilisées en météorologie. En fait il s'avère que les variétés lentes de la météorologie sont un cas particulier de variétés inertielles et nous établissons ainsi des propriétés des variétés lentes pressenties en météorologie. Nous concluons en section 3 par des indications sur d'autres développements récents ou en cours concernant les variétés inertielles.

1 Rappels sur les Variétés Inertielles et les Attracteurs

Nous nous intéressons à une équation d'évolution écrite sous la forme

$$\frac{du}{dt} + Au = R(u) \ . \tag{1.1}$$

L'espace H est un espace de Hilbert (produit scalaire $(.,.)$, norme $|.|$) et u est une fonction de $\mathbf{R}_+$ ou un intervalle de $\mathbf{R}$ à valeur dans H. L'opérateur A est linéaire non borné dans H de domaine $D(A) \subset H$; il est positif, fermé auto-adjoint et son inverse A^{-1} est compact. L'opérateur R est une application $\mathcal{C}^1$ compacte de $D(A)$ dans H qui vérifie des hypothèses supplémentaires qui seront précisées quand nécessaire. L'équation (1.1) englobe des équations du type réaction-diffusion ou du type de Navier-Stokes ; dans ce dernier cas

$$R(u) = f - B(u,u)$$

où $B(.,.)$ est bilinéaire compact de $D(A) \times D(A)$ dans H.

Nous supposons que le problème de valeur initiale constitué de (1.1) et

$$u(0) = u_0 \ , \tag{1.2}$$

($u_0 \in H$) est bien posé. Nous appelons $S(t)$ l'opérateur,

$$S(t) : u_0 \in H \to u(t) \in H, \quad t > 0 \ ;$$

les opérateurs $\{S(t)\}_{t \geq o}$ forment un semi-groupe d'opérateurs dans H.

La dissipativité de l'équation (1.1) s'exprime du point de vue physique par la décroissance de l'énergie en l'absence d'apport énergétique extérieur. Du point de vue mathématique, on adopte comme définition de la dissipativité (dans H), l'existence d'un ensemble absorbant (dans H).

Définition 1.1

Un ensemble $\mathcal{B}_0 \subset H$ est dit absorbant dans H pour l'équation (1.1) (ou pour le semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq o}$) si pour tout borné $\mathcal{B} \subset H$, il existe $t_0 = t_0(\mathcal{B})$ tel que pour tout $t \geq t_0(\mathcal{B})$

$$S(t)\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_0$$

(cf. Figure 1.1)

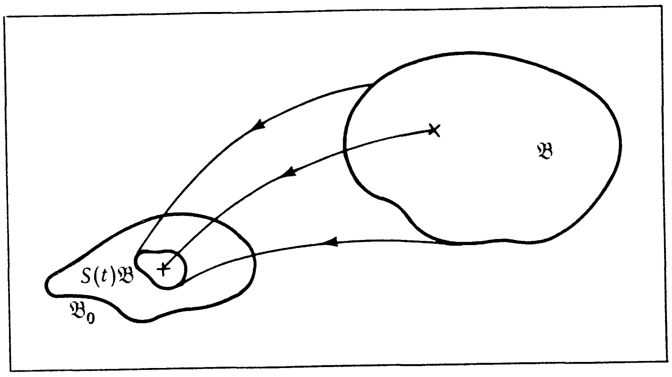

Fig.1.1 Ensemble Absorbant $\mathcal{B}_0$

De telles équations se distinguent bien sûr des équations conservatives pour lesquelles les orbites peuvent remplir des ouverts de l'espace des phases H.

Pour les équations dissipatives, un concept important est celui d'attracteur global, aussi appelé attracteur maximal ou attracteur universel.

Définition 1.2

On appelle attracteur global de l'équation (1.1) (ou du semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$), un ensemble $\mathfrak{A} \subset H$, compact tel que

(i) $S(t)\mathfrak{A} = \mathfrak{A}, \ \forall t \geq 0,$

(ii) $\mathfrak{A}$ attire les bornés,

au sens que pour tout borné B et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $t = t(B, \varepsilon)$ tel que, pour $t \geq t(B, \varepsilon), S(t)B$ soit inclus dans le voisinage de $\mathfrak{A}$ d'ordre ε.

Les conditions (i) et (ii) font que l'attracteur global, s'il existe, est unique.

Pour de nombreuses équations du type (1.1), on a montré durant ces dix dernières années, l'existence d'un attracteur global et le fait que sa dimension (de Hausdorff ou fractale) était **finie**. De tels résultats ont été établis en particulier par Ladyzhenskaya, Babin-Vishik, Mañé, Constantin-Foias-Manley et l'auteur. Dans le cas des équations de Navier-Stokes, comme il a été dit plus haut, les estimations de la dimension de l'attracteur de [2], [4], [5] sont assez fines pour avoir un intérêt physique et pour retrouver des éléments de la théorie de la turbulence de Kolmogorov et Kraichman. Pour toutes ces questions le lecteur pourra se reporter aux livres de Babin-Vishik [1], Hale [10] ou Temam [20] ou aux articles cités dans les bibliographies.

La dimension de l'attracteur $\mathfrak{A}$ étant finie pour de nombreuses équations dissipatives, on a voulu aller plus loin et on s'est posé les questions suivantes :

1) Est-il possible de plonger $\mathfrak{A}$ dans une variété régulière de dimension finie ?

2) Est-il possible de trouver un système dynamique de dimension finie qui donne le même comportement pour $t \to \infty$?

La réponse à ces questions est fournie par le concept de **variété inertielle** introduit en [8].

Définition 1.3

Une variété inertielle pour l'équation (1.1) (ou le semi groupe associé $\{S(t)\}_{t \geq 0}$) est une variété Lipschitzienne de dimension finie $\mathcal{M}$ telle que ;

(i) $S(t)\mathcal{M} \subset \mathcal{M}, \; \forall t \geq 0,$

(ii) $\mathcal{M}$ attire toutes les orbites à une vitesse exponentielle.

La propriété (ii) signifie que

$$d(S(t)u_0, \mathcal{M}) \leq K_1 \quad \exp \quad (-K_2 t), \quad t > 0,$$

où les constantes K_1, K_2 dépendent de u_0 mais sont bornées sur les bornés de H.

Bien sûr lorsque $\mathcal{M}$ et $\mathfrak{A}$ existent,

$$\mathfrak{A} \subset \mathcal{M} \,. \tag{1.3}$$

Lorsqu' une variété inertielle $\mathcal{M}$ existe, la restriction de (1.1) à $\mathcal{M}$ produit un système dynamique de dimension finie qui a le même attracteur que (1.1), et qui est appelé **système inertiel**. Le système inertiel produit la même dynamique que le système initial et répond ainsi à la question 2) : cela est exprimé par la propriété de **complétude asymptotique** établie en [3].

Pour tout $u_0 \in H$, il existe $\overline{u}_0 \in \mathcal{M}$ et $\tau \in \mathbf{R}$ tels que

$$d(S(t+\tau)u_0, S(t)\overline{u}_0) \to \; 0, \quad \text{pour} \quad t \to +\infty. \tag{1.4}$$

Construction de la Variété Inertielle

Il est utile pour la suite de rappeler brièvement la construction de variété inertielle selon la méthode utilisée en [8], dite de Lyapunov - Perron.

L'opérateur A^{-1} étant compact auto-adjoint positif, il existe une base orthonormée de H formée de vecteurs propres de A :

$$A\omega_j = \lambda_j \omega_j, \; j \geq 1, \quad 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq, \cdots, \lambda_j \to +\infty \quad \text{pour} \quad j \to \infty \; .$$

Tout élément u de H est écrit sous la forme

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{u}_j \omega_j \; , \tag{1.5}$$

et, pour un m à préciser

$$u = y + z, \tag{1.6}$$

$$y = y_m = \sum_{j=1}^{m} \hat{u}_j \omega_j, \quad z = z_m = \sum_{j=m+1}^{\infty} \hat{u}_j \omega_j \; .$$

Nous appelons $P = P_m$ le projecteur orthogonal dans H sur l'espace $P_m H$ engendré par $w_1, \cdots, w_m; Q = Q_m = I - P_m$, est le projecteur orthogonal complémentaire. La plupart des constructions proposées de variété inertielle fournissent $\mathcal{M}$ comme le graphe d'une fonction Φ de $P_m H$ dans $Q_m H$.

Si $u_0 \in \mathcal{M}$, alors l'orbite $S(t)u_0$ est dans $\mathcal{M}$ et l'on a pour tout $t > 0$:

$$z(t) = \Phi(y(t)) \; , \tag{1.7}$$

c'est-à-dire que

$$\hat{u}_j(t) = \Phi_j(\hat{u}_1(t), \cdots, \hat{u}_m(t)), \forall j \geq m+1 \tag{1.8}$$

Si $u_0 \notin \mathcal{M}$, l'orbite $S(t)u_0$ tend alors vers $\mathcal{M}$, donc vers un état où (1.7), (1.8) ont lieu. C'est l'interprétation des variétés inertielles du point de vue de la **turbulence** : elles fournissent une loi d'asservissement des hautes fréquences par les basses fréquences.

De manière plus précise, nous supposons comme en [8] que, pour un $\alpha \in [0, 1[$:

$$R \text{ est } C^1 \text{ de } D(A^\alpha) \text{ dans } H \; . \tag{1.9}$$

En outre R doit vérifier des hypothèses techniques pour lesquelles nous renvoyons à [8]. Ces hypothèses garantissent en particulier que le problème de valeur initiale (1.1), (1.2), est bien posé.

Nous rappelons alors, le

Théorème 1.1 ([8], [3]).—

Les hypothèses sont celles qui précèdent. Nous supposons en outre que

$$\lambda_{m+1} \geq K_4 \ , \tag{1.10}$$

$$\lambda_{m+1} - \lambda_m \geq K_3(\lambda_{m+1}^\alpha + \lambda_m^\alpha) \ , \tag{1.11}$$

où K_3, K_4 sont des constantes convenables dépendant de A et R.

Alors l'équation (1.1) possède une variété inertielle $\mathcal{M}$. En outre $\mathcal{M}$ possède la propriété de complétude asymptotique.

Nous renvoyons à [20] et [3] pour les exemples d'application. Ce théorème s'applique en particulier aux équations de réaction-diffusion (pour lesquelles $\alpha = 0$), à l'équation de Kuramoto-Sivashinsky, à l'équation de Cahn-Hilliard et à des équations de type Navier-Stokes avec viscosité renforcée. Il ne s'applique pas tel quel aux équations de Navier-Stokes : pour celles-ci $\lambda_m \sim cm$ en dimension deux et nous ne savons pas si la condition (1.8) dite d'écart spectral est satisfaite. Néanmoins un récent travail de Kwak [13] a permis d'établir l'existence de variété inertielle pour les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles sous certaines conditions.

2 Variétés Inertielles dans le cas non auto-adjoint

Comme il a été indiqué dans l'introduction nous voulons étendre la construction des variétés inertielles au cas où l'opérateur linéaire dans (1.1) n'est plus auto-adjoint (mais en est toutefois une perturbation). L'objet est d'étendre la construction des variétés inertielles et d'obtenir de nouvelles variétés inertielles ; nous suivons à présent [6].

L'équation que nous considérons est du type

$$\frac{dv}{dt} + \mathcal{A}v = \mathcal{R}(v), \tag{2.1}$$

$$v(0) = v_0 \ . \tag{2.2}$$

La fonction v est à valeurs dans H ; A et H sont comme ci-dessus et $\mathcal{A}$ est une perturbation de A au sens ci-après :

$$\mathcal{A} = A + b \tag{2.3}$$

où b est un opérateur linéaire non borné de H de domaine $D(b)$ et

$$D(A^\alpha) \subset D(b) \quad , bA^{-\alpha} \quad \text{est borné} \quad . \tag{2.4}$$

Nous supposerons, puisqu'on peut toujours s'y ramener, que $\mathcal{A} > 0$.

Il résulte alors de [9] que

(i) Le spectre de $\mathcal{A}$ est fait de valeurs propres $\nu_j, j \in \mathbf{N}$. Celles-ci étant ordonnées par valeurs croissantes de leur partie réelle on a

$$\text{Re } \nu_j \sim \lambda_j, \quad \text{pour} \quad j \to \infty \ . \tag{2.5}$$

(ii) Il existe un ensemble de vecteurs propres généralisés v_j associés,

$$\forall j \in \mathbf{N}, \exists k_j \geq 1, \ (\mathcal{A} - \nu_j)^{k_j} v_j = 0 \ , \tag{2.6}$$

et le système des $\{v_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ est total dans H.

Nous appelons alors $\mathcal{P}_m$ le projecteur linéaire dans H sur l'espace engendré par $v_1, \cdots, v_m$, parallèlement à l'espace engendré par les $v_j, j \geq m+1$; $\mathcal{Q}m = I - \mathcal{P}m$ est le projecteur sur le second espace parallèlement au premier ; bien sûr $\mathcal{P}mH$et$\mathcal{Q}mH$ ne sont pas, en général, orthogonaux.

Pour $u \in H$, nous écrivons

$$u = y + z, \quad y = \mathcal{P}_m u, \ z = \mathcal{Q}_m u \ . \tag{2.7}$$

Notre objectif est à présent de trouver une variété inertielle comme graphe d'une fonction Φ de $\mathcal{P}_m H$ dans $\mathcal{Q}_m H$. Les hypothèses qui précèdent sont complétées par celles-ci :

(2.8) Il existe $c_1, p > 0$ tels que $\lambda_j \sim c_1 j^p$, lorsque $j \to \infty$,

$$p(1-\alpha) > 1 \ . \tag{2.9}$$

La condition la plus restrictive dans les applications est (2.9). On notera qu'elle implique la condition (1.8) d'écart spectral puisque (2.8) et (2.9) entraînent l'existence d'une sous-suite n_k telle que

$$\frac{\lambda_{n_k+1} - \lambda_{n_k}}{\lambda^\alpha_{n_{k+1}} + \lambda^\alpha_{n_k}} \to +\infty \ , \quad \text{lorsque} \quad n_k \to \infty \ . \tag{2.10}$$

Le résultat suivant est délicat à démontrer et joue un rôle essentiel.

Proposition 2.1.— *Il existe des constantes K_i telles que*

$$\begin{aligned}
&||e^{-\mathcal{A}t}\mathcal{P}_m||_{\mathcal{L}(H)} \leq K_5 e^{-\lambda t}, \forall t \leq 0, \\
&||\mathcal{A}^\alpha e^{-\mathcal{A}t}\mathcal{P}_m||_{\mathcal{L}(H)} \leq K_6 \lambda^\alpha e^{-\lambda t}, \forall t \leq 0 \ , \\
&||e^{-\mathcal{A}t}\mathcal{Q}_m||_{\mathcal{L}(H)} \leq K_7 e^{-\Lambda t}, \forall t \geq 0, \\
&||\mathcal{A}^\alpha e^{-\mathcal{A}t}\mathcal{Q}_m||_{\mathcal{L}(H)} \leq K_8 (\frac{1}{t^\alpha} + \lambda^\alpha_{m+1}), \forall \theta > 0
\end{aligned} \tag{2.11}$$

où $\lambda = \lambda_m + K_9 \lambda^\alpha_m, \Lambda = \lambda_{m+1} - K_9 \lambda^\alpha_{m+1}$.

Ces inégalités ne sont pas évidentes car $\mathcal{A}$ n'est pas auto-adjoint. Il n'est même pas évident que la norme des $\mathcal{P}_m$ et des $\mathcal{Q}_m$ reste bornée indépendamment de $m(t = 0$ dans la première inégalité)....

Le principe de la démonstration est le suivant : ces inégalités sont évidentes si l'on remplace $\mathcal{A}, \mathcal{P}_m$ et $\mathcal{Q}_m$ par A, P_m et Q_m (et l'on a alors $K_5 = K_6 = K_7 = 1, K_9 = 0$). On compare alors chaque opérateur à l'opérateur auto-adjoint similaire et on utilise les intégrales de Riesz. Par exemple

$$e^{-\mathcal{A}t}\mathcal{P}_m = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-\lambda t}(\mathcal{A} - \lambda)^{-1}d\lambda \ ,$$

$$e^{-At}P_m = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} e^{-\lambda t}(A - \lambda)^{-1}d\lambda$$

où Γ (resp. Γ') est un contour contenant $\nu_1, \cdots, \nu_m$(resp. $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$) et pas d'autre valeur propre de $\mathcal{A}$ (resp.A). Grâce à (2.4) et (2.10), il est possible, pour m grand, de trouver un contour Γ' identique à Γ et il faut ensuite estimer l'intégrale sur Γ de la différence ; cf [6].

Le résultat principal est ensuite le suivant :

Théorème 2.1 ([6]).—

Sous les hypothèses ci-dessus, il existe des m, pour lesquels il existe une fonction Φ de $\mathcal{P}_m H$ dans $\mathcal{Q}_m H$, de classe $\mathcal{C}^1$ et dont le graphe $\mathcal{M}$ est une variété inertielle pour (2.1).

De plus si $\mathcal{R}(0) = 0$, $D\mathcal{R}(0) = 0$ alors $0 \in \mathcal{M}$ et $\mathcal{M}$ est tangente en 0 à $\mathcal{P}_m H$.

Idée de la Démonstration

Le principe de la construction, fondé sur la méthode de Lyapunov-Perron est le même qu'en [8] mais la démonstration qui fait appel à la Proposition 2.1 est totalement différente.

Par projection sur $\mathcal{P}_m H$ et $\mathcal{Q}_m H$ l'équation (2,1) est équivalente à un système pour $y, z, \quad y = \mathcal{P}_m v, \quad z = \mathcal{Q}_m v$:

$$\text{(2.12)} \qquad \frac{dy}{dt} + \mathcal{A}y = \mathcal{P}_m\mathcal{R}(y + z), \quad \frac{dz}{dt} + \mathcal{A}z = \mathcal{Q}_m\mathcal{R}(y + z) \ .$$

Pour $b, \ell > 0$ donnés nous considérons à présent

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{b,\ell} = \{\psi, \psi : P_m D(A^\alpha) \to Q_m D(A^\alpha),$$

$$\sup_{y \in P_m D(A^\alpha)} |A^\alpha(\psi(y)| \le b \ , |A^\alpha(\psi(y_1) - \psi(y_2))|, \le \ell |A^\alpha(y_1 - y_2)|, \forall y_1, y_2 \in P_m D(A^\alpha)\}$$

Cet espace est métrique complet pour la distance,

$$d(\psi_1, \psi_2) = \sup_{y \in P_m D(A^\alpha)} |A^\alpha(\psi_1(y) - \psi_2(y))| .$$

Pour ψ dans $\mathcal{F}$ et y_0 dans $P_m D(A^\alpha)$ nous posons quand cela a un sens :

$$(\mathcal{T}\psi)(y_0) = \int_{-\infty}^{0} e^{\mathcal{A}s} \mathcal{Q}_m \mathcal{R}(\bar{y}(s) + \psi(\bar{y}(s)))ds$$

où $\bar{y}$ est la solution définie sur $\mathbf{R}$ de

$$\frac{d\bar{y}}{dt} + \mathcal{A}\bar{y} = \mathcal{P}_m \mathcal{R}(\bar{y} + \psi(\bar{y})), \quad \bar{y}(0) = y_0 \ , \tag{1.8}$$

(comparer à la première équation (2.12)).

Nous montrons que $\mathcal{T}$ envoie $\mathcal{F}$ dans lui-même et que c'est une contradiction stricte ; la fonction Φ est obtenue comme point fixe de $\mathcal{T}$. Il faut ensuite montrer que Φ est $\mathcal{C}^1$ et que son graphe $\mathcal{M}$ est invariant et attractif.

Variété lente

Nous terminons avec un exemple d'équation (2.1) lié à la météorologie.

Partant de l'équation (1.1) nous considérons une solution stationnaire u_s :

$$Au_s = R(u_s) \ ,$$

et posons $v = u - u_s$. L'équation vérifiée par v est du type (2.1) avec

$$\mathcal{A}v = Av - DR(u_s).v, \quad \mathcal{R}(v) = R(u_s + v) - R(u_s) - DR(u_s).v$$

où DR est la différentielle de Fréchet de R. On notera que

$$\mathcal{R}(0) = 0 \quad , \quad D\mathcal{R}(0) = 0 \ .$$

Lorsque le Théorème 2.1 s'applique, nous obtenons une variété inertielle qui contient l'origine et est tangente en 0 à $\mathcal{P}_m H$.

Dans des situations analogues en météorologie celle-ci s'appelle la **variété lente**, les ondes $\mathcal{P}_m H$ les ondes de Rossby (à l'échelle du globe) et les ondes $\mathcal{Q}_m H$ les ondes de gravité (à l'échelle de la hauteur de l'atmosphère) (cf.[6] pour de nombreuses références).

Le nom de variété lente est justifié par le fait que celle-ci décrit les mouvements lents (à grande échelle) de l'atmosphère. De même, le nom de variété inertielle est justifié, dans le cas des équations de Navier-Stokes, par le fait que celle-ci décrirait alors les mouvements à grande échelle du fluide, là où les termes non linéaires (dits termes inertiels) sont prédominants par rapport aux termes linéaires (échelles visqueuses).

Références

[1] A.V. Babin, M.I. Vishik, Attractors of evolutions equations, North-Holland, Amsterdam, 1992.

[2] P. Constantin, C. Foias, O. Manley, R. Temam, Determining modes and fractal dimension of turbulent flows, J. Fluid Mech. 150, (1985), p.427-440.

[3] P. Constantin, C. Foias, B. Nicolaenko, R. Temam, Integral Manifolds and Inertial Manifolds for Dissipative Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York, (1989).

[4] P. Constantin, C. Foias, R. Temam, Attractors representing turbulent flows, Mem. Amer. Math. Soc., (1985), vol.53.

[5] P. Constantin, C. Foias, R. Temam, On the dimension of the attractors in two-dimensional turbulence, Physica D., 30, (1988), p.284-296.

[6] A. Debussche, R. Temam, Inertial manifolds and the slow manifolds in meteorology, Diff. Int. Equ., 4, (1991), p.897-931.

[7] T. Dubois, F. Jauberteau, R. Temam, Solutions of the incompressible Navier-Stokes equations by the nonlinear Galerkin Method, to appear.

[8] C. Foias, G.R. Sell, R. Temam, Variétés inertielles des équations différentielles dissipatives, C.R. Acad. Sci. Paris, Serie I, 301 (1985), 139-142. Inertial manifolds for nonlinear evolutionary equations, J. Diff. Eqs., 73 (1988), 309-353.

[9] I.C. Gohberg, M.G. Krein, Introduction to the Theory of Linear non Selfadjoint Operators, Translations of Mathematical Monographs, vol, 18. Amer. Math. Soc., 1969.

[10] J. Hale, Asymptotic behavior of dissipative systems, Mathematical Surveys and Monographs, vol 25, AMS Providence.

[11] F. Jauberteau, C. Rosier, R. Temam, The nonlinear Galerkin method in computational fluid dynamics, Applied Numerical Mathematics, 6,(1989) 190, p.361-370.

[12] F. Jauberteau, C. Rosier, R. Temam, A nonlinear Galerkin Method for the Navier-Stokes equations, Computer Math. in Appl. Mechanics and Engineering, 80, (1990), p.245-260.

[13] M. Kwak, Finite dimensional inertial forms for the $2D$ Navier-Stokes equations, University of Minnesota, AHPCRC, Preprint, 1991.

[14] O.A. Ladyzhenskaya, A dynamical system generated by the Navier-Stokes equation, J. Soviet Math. 3, n°4, (1975), p.458-479.

[15] O.A. Ladyzhenskaya, On the determination of minimal global B- attractors for semigroups generated by boundary value problems for nonlinear dissipative partial differential equations, Steklov Institute, Leningrad 1987.

[16] J. Lamini, F. Pascal, R. Temam, Implementation of finite element nonlinear Galerkin methods using hierarchical bases, J. Comp. Mech., to appear

[17] C.E. Leith, Nonlinear normal mode initialization and quasi-geostrophic theory, J. Atmos. Sci., 37, (1980), p.958-968.

[18] J. Mallet-Paret, G.R. Sell, Inertial manifolds,for reaction-diffusion equation in higher space dimension, J. Amer. Math. Soc., I, (1988), 805-866.

[19] R. Temam, Inertial manifolds, The mathematical Intelligencer, 12, n.° 4, (1990), p.68-74.

[20] R. Temam, Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics Applied Mathematical Sciences, vol. 68, Springer Verlag, New York, 1988.

[21] J.J. Tribbia, Nonlinear initialization on an equatorial Beta-plane, Mon. Wea. Rev., 107, (1979), 704-713.

Université Paris-Sud

Laboratoire d'Analyse Numérique

Bât. 425

91405 - Orsay cedex