

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

MOUEZ DIMASSI

Développements asymptotiques des perturbations lentes de l'opérateur de Schrödinger périodique

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1991-1992), exp. n° 10,
p. 1-11

[<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1991-1992____A10_0>](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1991-1992____A10_0)

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1991-1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

*CENTRE
DE
MATHEMATIQUES*

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)

Tél. (1) 69 33 40 91

Fax (1) 69 33 30 19 ; Tél. 601.596 F

Séminaire 1991-1992

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES DES PERTURBATIONS LENTES DE L'OPERATEUR DE SCHRÖDINGER PERIODIQUE

Mouez DIMASSI

Introduction et énoncé des résultats

Nous allons ici étudier le spectre d'opérateurs du type suivant :

$$(1) \quad P_{A,\varphi} = \sum_{i=1}^n (D_{y_i} + A_i(hy))^2 + V(y) + \varphi(hy) (h \rightarrow 0).$$

Où $A_1, \dots, A_n, V, \varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ $V\Gamma$ -périodique, Γ étant un réseau de \mathbf{R}^n , φ est bornée ainsi que toutes ses dérivées. Les dérivées d'ordre non nul des $A_i, 1 \leq i \leq n$ sont bornées.

Buslaev [Bu], Guillot - Ralston - Trubowitz [Gu.R.T.] ont utilisé

$$(2) \quad \tilde{P}_{A\varphi} = (hDx + Dy + A(x))^2 + V(y) + \varphi(x)$$

pour l'étude des solutions de l'équation :

$$(3) \quad P_{A,\varphi} u = \lambda u$$

En considérant $\tilde{P}_{A,\varphi}$ comme opérateur h -pseudo-différentiel en x de symbole à valeur opérateurs, ils ont construit des solutions approchées (BKW) de l'équation (3).

C.Gérard - A. Martinez - J.Sjostrand [G.M.S.] ont utilisé la même idée pour une réduction spectrale de l'opérateur $P_{A,\varphi}$. Ils ont prouvé que l'étude du spectre $\sigma(P_{A,\varphi})$ de $P_{A,\varphi}$ au voisinage d'un point λ_0 , se ramène à celui d'un système $N \times Nh$ -pseudo-différentiel $E_{-+}^W(x, hD_x + A(x), \lambda, h)$ défini sur V_o^N où $V_o = \{u = \sum_{\gamma \in \Gamma} C_\gamma \delta(x - h\gamma), (C_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \in \ell^2(\Gamma\sigma)\}$

D'après la théorie de Floquet, $\sigma(P) = \bigcup_{k=0}^{+\infty} J_k$ $J_k = \lambda_k(\mathbf{R}^n/p^*)$, où $\lambda_k(\xi)$, sont les valeurs propres de Floquet associées à $P = -\Delta + V, \Gamma^*$; le réseau dual de Γ . On fixe un intervalle I qui ne rencontre pas le spectre de P .

Nencin [Ne], Avron-Simon ont démontré que pour tout compact $K \subset I$, il existe $h_K > 0$ tel que $K \cap \sigma(P_{A_{10}}) = \phi Vh \in]0, h_K]$.

Donc, si J est l'ensemble des valeurs d'adhérences de φ à l'infini et si

$$(4) \quad K \cap (\sigma(P) + J) = \phi.$$

alors

$$\sigma(P_{A,\varphi}) \cap K \text{ est discret.}$$

Soit $f \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ tel que $\text{supp } f \subset K$. Alors on va démontrer

Théorème 1.— Si K est un compact vérifiant (4) alors :

$$\text{tr } f(P_A, \varphi) \sim h^{-n} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k h^K (h \rightarrow 0)$$

avec

$$a_0 = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}_x^n} \int_{E^*} \sum_{k=0}^{+\infty} f(\varphi(x) + \lambda_k(\xi)) d\xi dx$$

Ici $\lambda_k(\xi)$, $k \geq 0$ désignent les valeurs propres de Floquet associées à l'opérateur $P = -\Delta + V(g)$. \sharp

Dans le cas d'une bande simple, on donne explicitement les $(a_j)_{j \geq 0}$ du théorème 1. Plus précisément on suppose :

(H_1) Pour un $k = k_0$ fixé $\lambda(\xi) = \lambda_{k_0}(\xi)$ est simple pour $\xi \in \mathbf{R}^n/\Gamma^*$, et la bande d'énergie $j_{k_0} = \{\lambda_{k_0}(\xi), \xi \in \mathbf{R}^n/\Gamma^*\}$ est disjointe des autres bandes, c'est à dire que $\lambda_j(\xi) \in \mathcal{I}_{k_0}$, si $j \neq k_0$ $\xi \in \mathbf{R}^n/\Gamma^*$.

(H_2) On suppose que

$$S < \min \left\{ \inf_{\xi \in \mathbf{R}^n/\Gamma^*} \lambda_{k_0+1}(\xi) - \sup_{\xi \in \mathbf{R}^n/\Gamma^*} \lambda_{k_0}(\xi), \inf_{\xi \in \mathbf{R}^n/\Gamma^*} \lambda_{k_0-1}(\xi) - \sup_{\xi \in \mathbf{R}^n/\Gamma^*} \lambda_{k_0}(\xi) \right\}$$

où $S = \varphi_+ - \varphi_-$, $\varphi_+ = \sup_{x \in \mathbf{R}^n} \varphi(x)$, $\varphi_- = \inf_{x \in \mathbf{R}^n} \varphi(x)$ Où on montre en particulier :

Théorème 2.— Sous les hypothèses (H_1)(H_2) on a :

$$(7) \quad \text{tr } f(P_{A,\varphi}) = (2\pi h)^{-n} \int_{\mathbf{R}_x^n} \int_{E^*} f(\varphi(x) + \lambda_{k_0}(\xi)) d\xi dx + o(h^{2-n})$$

(c'est à dire $a_1 = 0$)

Esquisse de la démonstration du théorème 1

On définit :

$$\Gamma^* = \{\gamma^* \in \mathbf{R}^n \mid e^{i\gamma\gamma^*} = 1 \ \forall \gamma \in \Gamma\}$$

E resp E^* un domaine fondamental borné du réseau Γ resp $\Gamma^*V_0 = \{u \in S'(\mathbf{R}^n) \text{ tq } u(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma \delta(x - h\gamma), (f_\gamma) \in \ell^2(\Gamma, \mathbf{C})\}$ V_0 est donc un espace hilbertien unitairement équivalent à $\ell^2(\Gamma, \mathbf{C})$.

Rappelons maintenant qu'à un symbole $Q(x, \xi, h) \in S^0(\mathbf{R}^{2n})$ i.e. vérifiant : $\exists h_0 > 0$ tq $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{N}^n, \exists C_{\alpha, \beta}$ tq $\forall (x, \xi) \in \mathbf{R}^{2n} |O_x^\alpha D_\xi^\beta Q(x, \xi, h)| \leq C_{\alpha, \beta} \forall h \in]0, h_0]$ on peut associer un opérateur pseudo-différentiel (son h-quantifié de Weyl)

$$(8) \quad (Q^w(x, hD_x, h)u)(x) = (op_h^w Q(x, \xi)u)(x) = (2\Pi h)^{-n} \int e^{i/n(x-y) \cdot \xi} Q\left(\frac{x+y}{2}, \xi, h\right) u(y) dy d\xi.$$

Pour $Q(x, \xi) \in S^0(\mathbf{R}^{2n})\Gamma^*$ -périodique en ξ on démontre que les coefficients $Q(\alpha, \beta)$ de la matrice associée à $op_h^w Q(x, \xi)$ (en identifiant V_0 à $\ell^2(\Gamma, \mathbf{C})$) :

$$(9) \quad Q(\alpha, \beta) = \int_{E^*} e^{i\langle \alpha - \beta, \xi \rangle} Q\left(h \frac{\alpha + \beta}{2}, \xi\right) \frac{d\xi}{\text{vol}(E^*)}$$

Si de plus $K = \Pi_x(\text{supp } Q)$ est compact alors $op_h^w Q$ est à trace et :

$$(10) \quad \text{tr } Q^w(x, hD_x) = (2\Pi h)^{-n} \int_{\mathbf{R}_x^n} \int_{E^*} Q(x, \xi) d\xi dx + O(h^\infty)$$

(Par $0(h^\infty)$ on désigne une quantité qui est $0(h^N).h \rightarrow 0$ pour tout $N \geq 0$). On note :

$$H_0 = \{u \in L_{\text{loc}}^2(\mathbf{R}^n) / u(y + \gamma) = u(y) \ \forall \gamma \in \Gamma\} = L^2(\mathbf{R}^n / \Gamma)$$

$$H_{m, \xi} = \{u \in H_0 / (Dy + \xi)^\alpha u \in H_0 \ \forall |\alpha| \leq m\}.$$

Remarquons ici que simplement la norme de $H_{m, \xi}$ dépend de ξ , de plus on a :

$$\|u\|_{H_{m, \xi}} \leq C < \xi - \eta >^m \|u\|_{H_{m, \eta}} \ \forall u \in H_{m, 0} \ \xi, \eta \in \mathbf{R}^n \text{ (ici } < x >^2 = (| + |x|^2)).$$

Pour $(x, \xi) \in \mathbf{R}^{2n}$ fixé on pose :

$$(11) \quad P(x, \xi) = (Dy + \xi)^2 + V(y) + \varphi(x),$$

l'opérateur auto-adjoint non borné sur H_0 .

D'après la théorie des opérateurs pseudo-différentiels à valeurs opérateurs voir [Ba], [GMS], $P(x, \xi) \in S^0(\mathbf{R}^{2n}, \mathcal{L}(K_{2, \xi}, K_0))$. On fixe maintenant $z_0 \in \mathbf{R}$.

Proposition 3.— ([GMS] voir aussi [He - Sj]) Il existe un entier $N \geq 0$, un voisinage complexe W de z_0 , et des fonctions $\varphi_j(x, y, \xi) \in C^\infty(\mathbf{R}_{x, \xi}^{2n}, H_{2, 0}) \cap C^\infty(\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_\xi^n \times \mathbf{R}^n)$ pour $j = 1, 2, \dots, N$ tels que pour tout $(x, \xi) \in \mathbf{R}^{2n}$ et pour tout $z \in \omega$ l'opérateur :

$$\mathcal{P}(x, \xi, z) = \begin{pmatrix} P(x, \xi) - z & R_-(x, \xi) \\ R_+(x, \xi) & 0 \end{pmatrix} H_{2, \xi} \oplus \mathbf{C}^N \rightarrow H_0 \oplus \mathbf{C}^N$$

vérifie les propriétés suivantes :

i) \mathcal{P} est bijectif, uniformément borné ainsi que toutes ces dérivées en x, ξ, z

$$\text{ii) } \mathcal{P}(x, \xi, z) \in S^0(\mathbf{R}^{2n}, j(H_{2,\xi} \oplus \mathbf{C}^N, H_0 \oplus \mathbf{C}^N))$$

iii)

$$(12) \quad (R_+(x, \xi)\mu)_j = \langle \mu, \varphi_j(x, \dots, \xi) \rangle H_0 \quad 1 \leq j \leq N$$

$$(13) \quad R_-(x, \xi)\mu^- = \sum_{j=1}^N \mu_j \varphi_j(x, \dots, \xi) \quad \mu^- = (u^-, \dots, \mu_N^-) \in \mathbf{C}^N.$$

De plus les fonctions φ_j vérifient (*)

$$(*) \quad \begin{cases} \|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \varphi_j\|_{H_{2,\xi}} \leq C_{\alpha,\beta} \quad \forall \alpha, \beta \\ \forall \gamma^* \in \Gamma^* \quad \varphi_j(x, y, \xi + \gamma^*) = e^{-i\langle y, \gamma^* \rangle} \varphi_j(x, y, \xi) \end{cases}$$

l'inverse

$$\mathcal{E}_0(x, \xi, z) = \begin{pmatrix} E^0(x, \xi, z) & E_+^0(x, \xi, z) \\ E_-^0(x, \xi, z) & E_{-+}^0(x, \xi, z) \end{pmatrix} : H_0 \oplus \mathbf{C}^N \rightarrow H_{z,\xi} \oplus \mathbf{C}^N$$

de $\mathcal{P}(x, \xi, z)$, vérifie (i) et appartient à $S^0(\mathbf{R}^{2n}, \mathcal{L}(K_0 \oplus \mathbf{C}^N, K_{2,\xi} \oplus \mathbf{C}^N))$

Proposition 4.— ([GMS]) Pour $z \in \omega$, h très petit, l'opérateur :

$$\begin{pmatrix} P_{A,\varphi} - z & \hat{R}_- \\ \hat{R}_+ & 0 \end{pmatrix} : H_{2,A} \times \ell^2(\Gamma_1 \mathbf{C}^N) \rightarrow \ell^2(\mathbf{R}^n) \times \ell^2(\Gamma_1 \mathbf{C}^N)$$

est uniformément borné, bijectif, d'inverse $\hat{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \hat{E} & \hat{E}_+ \\ \hat{E}_- & \hat{E}_{-1} \end{pmatrix}$ uniformément borné, $\hat{E}, \hat{E}_+, \hat{E}_-, \hat{E}_{-+}$, sont holomorphes en z , ici

$$\hat{R}_+ \mathcal{H}_{2,A} = \{\mu \in L^2(\mathbf{R}^n) / (D_y + A(hy))^a \mu \in L^2 V \mid |\alpha| \leq 2\} \rightarrow \ell^2(\Gamma, \mathbf{C}^N)$$

$$(\hat{R}_+ \mu)_j(\gamma) = \int \mu(\hat{y}) W_{A,h,j} \left(h \frac{\gamma + \hat{y}}{2}, \tilde{y} - \tilde{\gamma} \right) dy, \text{ pour } \gamma \in \Gamma,$$

$$W_{A,h,j}(x, y) = e^{-i\langle y, A(x) \rangle} \int_{E^*} e^{i\langle y, \eta \rangle} \varphi_j(x, y, \eta) \frac{d\eta}{\text{vol } E^*}, \quad \hat{R}_- = \hat{R}_+^*$$

La matrice de \hat{E}_{-+} est égale à la matrice de $E_{-+}^W(x, hD_x + A(x), z, h)$ définie sur V_0^N , où $E_{-+}(x, \xi, +A(x), z, h) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} h^j E_{-+}^j(x, \xi + A(x), z) \in S^0(\mathbf{R}^{2n}, \mathcal{L}(\mathbf{C}^N, \mathbf{C}^N)) E_{-+}^0(x, \xi, z), \varphi_j$ $1 \leq j \leq N$ sont donnés par la proposition 3.

Remarque 5

a- Les propositions 3.4 restent encore vraies si on remplace z_0 par un compact de \mathbf{R} .

b- De $\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{E}} = I$ et $\hat{\mathcal{E}}\hat{\mathcal{P}} = I$ on obtient

$$(14) \quad (P_{A,\varphi} - z)^{-1} = \hat{E} - \hat{E}_+ \hat{E}_{-+}^{-1} \hat{E}_-$$

$$(15) \quad \hat{E}_{-+}^{-1} = -\hat{R}_+ (P_{A,\varphi} - Z)^{-1} \hat{R}_-$$

$$(16) \quad \partial_z \hat{E}_{-+} = \hat{E}_- \hat{E}_+$$

c- Observons que z appartient au spectre de $P(x, \xi)$ ssi "zéro" appartient au spectre de $E_{-+}^0(x, \xi, z)$.

d- Comme \hat{R}_+, \hat{R}_- sont uniformément bornés en h alors :

$$\|\hat{E}_{-+}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\ell^2(\Gamma, \mathbf{C}^N))} = O(|Imz|^{-2})$$

e- $E_{-+}(x, \xi + A(x), z, h)$ est Γ^* périodique en ξ et $\|(E_{-+}^w(x, hD_x + A(x), z, h))^{-1}\| = O(|Imz|^{-1})_{\mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}^n), \mathbf{C}^N)}$,

$$\|E_{-1}^w(x, hD_x + A(x), z, h)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^n))} = O(|Imz|^{-1}). \quad \#$$

Soit $\tilde{f} \in C_0^\infty(\mathbf{C})$ une extension de f telle que $\partial \tilde{f}(z) = O(|Imz|^N)$ pour tout N . Alors

$$(18) \quad f(P_{A,\varphi}) = -(1/\pi) \int \bar{\partial} \tilde{f}(z) (z - P_{A,\varphi})^{-1} L(dz),$$

où L désigne la mesure de Leborgne sur $\mathbf{C} \simeq \mathbf{R}^2$.

La formule (14) et le fait que \hat{E} est holomorphe en z dans un voisinage de $\text{supp } \tilde{f}$ donnent

$$(19) \quad f(P_{A,\varphi}) = -(1/\pi) \int \bar{\partial} \tilde{f}(z) \hat{E}_+ \hat{E}_{-+}^{-1} \hat{E}_- L(dz)$$

Soit $\tilde{\varphi}(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ tel que :

- i) $K \cap (\sigma(P) + \{\tilde{\varphi}(x), x \in \mathbf{R}^n\}) = \emptyset$
- ii) $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ pour $|x| > R$ (R très grand).

On désigne par $\tilde{E}_{-+}^0(x, \xi, z)$ l'opérateur construit dans la proposition 3 associé à $\tilde{P}(x, \xi) = (Dy + \xi)^2 + v(y) + \tilde{\varphi}(x)$.

Posons $\tilde{E}_{-+}(x, \xi + A(x), z, h) = \tilde{E}_{-+}^0(x, \xi + A(x), z) + (E_{-+}(x, \xi + A(x), z, h) - E_{-+}^0(x, \xi + A(x), z, h))$ où $E_{-+}(x, \xi, z, h)$ est donné par la proposition 4.

Il résulte de (i), (ii) et la remarque 5-c que ; $\tilde{E}_{-+}(x, \xi + A(x), z, h)$, appartient à $S^0(\mathbf{R}^{2n}, L(\mathbf{C}^N, \mathbf{C}^N))$ et que c'est un opérateur elliptique uniformément en z dans ω (voisinage complexe de $\text{supp } \tilde{f}$), égal à $E_{-+}(x, \xi + A(x), z, h)$ pour $|x| > 2R$, dépend holomorphiquement de z dans ω .

D'après un résultat de R. Beals [Be] pour les opérateurs pseudo-différentiels, traduit par [He - Sj]2 dans le cadre semi-classique, on peut trouver $G^w(x, hD_x + A(x), z, h) \in \mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}^N, \mathbf{C}^N))$ holomorphe en $z \in \omega$ tel que $G(x, \xi + A(x), z, h) \in S^0(\mathbf{R}^{2n}, L(\mathbf{C}^N, \mathbf{C}^N))$ et

$$\tilde{E}_{-+}^w(x, hD_x + A(x), z, h) \circ G^w(x, hD_x + A(x), z, h) = G^w \circ \tilde{E}_{-+}^w = I.$$

On note \tilde{E}_{-+} , la matrice associée à l'opérateur $\tilde{E}_{-+}^w(x, hD_x + A(x), z, h)$ défini sur V_0^N , en identifiant V_0^N à $\ell^2(\Gamma, \mathbf{C}^N)$.

Maintenant nous pouvons appliquer la formule $\hat{E}_{-+}^{-1} = \hat{\tilde{E}}_{-+}^{-1} - \hat{E}_{-+}^{-1}(\hat{E}_{-+} - \hat{\tilde{E}}_{-+}) \hat{\tilde{E}}_{-+}^{-1}$ et le fait que $\hat{\tilde{E}}_{-+}^{-1}$ est holomorphe en z pour obtenir :

$$f(P_{A,\varphi}) = (1/\pi) \int \bar{\partial} \tilde{f}(z) \hat{E}_+ \hat{E}_{-+}^{-1} (\hat{E}_{-1} - \hat{\tilde{E}}_{-+}) \hat{\tilde{E}}_{-+}^{-1} \hat{E}_- L(dz).$$

Comme $(\hat{E}_{-+} - \hat{\tilde{E}}_{-+})$ est à trace et que $\partial_z \hat{E}_{-+} = \hat{E}_- \hat{E}_+$ alors,

$$\text{tr } f(P_{A,\varphi}) = (1/\pi) \int \bar{\partial} \tilde{f}(z) \text{tr}[\partial_z \hat{E}_{-+} \hat{E}_{-+}^{-1} (\hat{E}_{-+} - \hat{\tilde{E}}_{-+}) \hat{\tilde{E}}_{-+}^{-1} L(dz)].$$

Si $\psi(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ vaut 1 sur un voisinage de $\pi_x(\text{supp}(E_{-1} - \hat{E}_{-1}))$ alors :

Lemme 6.— $\text{tr } f(P_{A,\varphi}) = -(1/\pi) \text{tr} [\int \bar{\partial} \tilde{f}(z) \partial_z \hat{E}_{-+} \hat{E}_{-+}^{-1} L(dz) \hat{\psi}] + 0(h^\infty)$ ($\hat{\psi}$ est la matrice associée à l'opérateur de multiplication $c\psi(x)$ défini sur V_0^N)

Preuve : Comme $\wedge = \pi_x(\text{supp } E_{-1}(x, \xi, +A(x), z, h) - \tilde{E}_+(x, \xi + A(x), z, h)) \cap \text{supp}(1 - \psi) = \phi_1$ alors à l'aide de (9), on démontre que les coefficients $N(\alpha, \beta)$ de la matrice $(\hat{E}_+ - \hat{\tilde{E}}_{-1}) \hat{\tilde{E}}_{-+}^{-1} (1 - \hat{\psi})$ vérifient

$$(22) \quad N(\alpha, \beta) = 0(h^M \left(\frac{1}{1 + \text{dist}(\alpha, \frac{\wedge}{h})} \right)^N \left(\frac{1}{1 + \text{dist}(\beta, \frac{\wedge}{h})} \right)^N) \text{ pour tous}$$

Donc $\text{tr } f(P_{A,\varphi}) = (1/\pi) \text{tr} (\int \bar{\partial} \tilde{f}(z) \partial_z \hat{E}_{-1} \hat{E}_{-+}^{-1} L(dz) \hat{\psi}) + 0(h^\infty)$ (on rappelle que $\hat{\tilde{E}}_{-+}^{-1}$ est holomorphe en z dans un voisinage de $\text{supp } \tilde{f}$).

Lemme 7.— L'opérateur $G(h) = -(1/\pi) \int \bar{\partial} \tilde{f}(z) \partial_z E_{-+}^w(x, hD_x + A(x), z, h) (E_{-+}^w(x, hD_x + A(x), z, h))^{-1} L(dz)$ est h -admissible (c'est-à-dire il existe une suite $a_j \in S^\circ(\mathbf{R}^{2n}, \gamma(\mathbf{C}^N, \mathbf{C}^N))$ et une suite $R_N \in \gamma(L^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^N))$ pour $N \geq N_0, N_0$ assez grand de sorte que $G(h) = \sum_0^N h^j \rho_h^w a_j + h^{N+1} R_N$ et $\sup_{h \in]0, h_0]} \|R_N(h)\| < +s$. Ici les $a_j(x, \xi)$ sont Γ^* périodiques en ξ , et

$$(23) \quad a_0(x, \xi) = -\frac{1}{\pi} \int \bar{\partial} \tilde{f}(z) \partial_z E_{-+}^0(x, \xi + A(x), z) (E_{-+}^0(x, \xi + A(x), z))^{-1} L(dz)$$

Preuve : Utilisant $\bar{\partial} \tilde{f}(z) = 0(|\operatorname{Im} z|^N)$ pour tout N , et la remarque 5-e, on obtient

$$(*) \quad G(h) = \int_{|\operatorname{Im} z|^2 \geq h} \bar{\partial} \tilde{f}(z) \partial_z E_{-1}^w(x, hD_x + A(x), z, h) (E_{-+}^w(x, hD_x + A(x), z, h))^{-1} L(dz) + 0(h^\infty)$$

à l'aide d'un résultat de Beals [Be] (voir aussi [Sj]) on démontre :

- i) Il existe $r(x, \xi, z, h) \in C^\infty(\mathbf{R}_{x, \xi}^{2n}, \mathcal{L}(\mathbf{C}^N, \mathbf{C}^N))$ pour z, h fixés dans $]0, h_0] \times \{z/|\operatorname{Im} z| \in]0, S_0], S_0 \text{ assez petit}\}$ tq

$$(24) \quad \|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_h^M r(x, \xi, z, h)\|_{\gamma(\mathbf{C}^N, \mathbf{C}^N)} \leq C_{\alpha, \beta, M} |\operatorname{Im} z|^{-1-2M-|\alpha|-|\beta|}$$

dans la zone $|\operatorname{Im} z|^2 \geq h$ et $\partial_z E_{-1}^w(x, hD_x + A(x), z, h) 0(E_{-+}^w)^{-1} = 0 \rho_h^w r(x, \xi, z, h)$

- ii) $r(x, \xi, z, h)$ admet un développement asymptotique en h .

Maintenant le lemme résulte de (*) et (24) (la périodicité des $a_j(x, \xi)$ en ξ découle de celle de $E_{-1}^w(x, \xi + A(x), z, h)$).

Les lemmes 6, 7 combinés avec la formule (10) donnent (10) donnent (5) du théorème 1, (23) implique :

$$(25) \quad \begin{aligned} (2\pi h)^n \operatorname{tr} f(P_{A, \varphi}) &= \int_{\mathbf{R}^n_x} \int_{E^*} -1/\pi \int \bar{\partial} \tilde{\varphi}(z) \\ \hat{\operatorname{tr}}[\partial_z E_{-+}^o(x, \xi + A(x), z) (E_{-+}^o(x, \xi + A(x), z))^{-1}] \psi(x) L(dz) d\xi dx &+ 0(h) \end{aligned}$$

($\hat{\operatorname{tr}}$: désigne la trace au sens matricielle).

La formule de Liouville ($\hat{\operatorname{tr}}[(\partial_z A)A^{-1}] = \frac{\partial_z \det A(s)}{\det A(z)}$ où $A(z) \in \gamma(\mathbf{C}^N, \mathbf{C}^N)$) et la périodicité de $E_{-+}^o(x, \xi + A(x), z)$ en ξ entraînent :

$$(26). \quad \begin{aligned} (2\pi h)^n \operatorname{tr} f(P_{A, \varphi}) &= \int_{\mathbf{R}^n_x} \int_{E^*} -1/\pi \int \bar{\partial} \tilde{\varphi}(z) \psi(x) \\ \frac{\partial_z \det E_{-+}^o(x, \xi, z)}{\det E_{-+}^o(x, \xi, z)} L(dz) d\xi dx &+ 0(h) \end{aligned}$$

D'après la remarque 5-c

$$(27) \quad \det E_{-+}^{\circ}(x, \xi, z) = 0 \text{ ssi il existe } k \geq 0 \text{ tq } z = \varphi(x) + \lambda_k(\xi) \\ (\lambda_k(\xi), \text{ désignent les fonctions propres de Floquet associées à } -\Delta + V).$$

Rappelons que pour une fonction holomorphe $g(z)$, de racines $(z_k)_{k \geq s}$ comptées selon leur multiplicité on a :

$$(28) \quad -\frac{1}{\pi} \int \bar{\partial} \tilde{f}(z) \frac{\partial_z g(z)}{g(z)} L(dz) = \sum_{k \geq 0} f(z_k)$$

Maintenant (26), (27) et (28), sans oublier que $\psi(x)$ vaut 1 sur $\bigcap_{k \geq 0} \pi_x \text{ Supp } (f(\varphi(x) + \lambda_t(z)))$, entraînent le théorème 1.

Esquisse de la démonstration du théorème 2

Dans le cas d'une bande simple $J_{k0} = \{\lambda_{k0}(\xi), \xi \in \mathbf{R}^n/\Gamma^*\}$ Nenciu [Ne]2, Helffer et Sjöstrand [He - Sj]3, ont construit une fonction $\psi(\xi) = \psi(y, \xi) \in \text{Ker}(P_{\xi} - \lambda_{k0}(\xi))$ ($P_{\xi} = (Dy + \xi)^2 + V(y)$; l'opérateur non borné sur H_0 de domaine $H_{2,\xi}$) tel que :

- i) $\psi(\xi)$ est une fonction C^{∞} en ξ à valeurs dans H_0 .
- ii) $\|\psi(\xi)\|_{H_0} = 1$ pour tout ξ dans \mathbf{R}^n/Γ^* .
- iii) $\psi(\xi + \gamma^*) = e^{-ij\gamma^*} \psi(\xi)$ pour tout γ^* dans Γ^* .
- iv) $\bar{\psi}(y, \xi) = \psi(y, -\xi)$.

On pose $R_{-}^{\circ}(\xi) : \mathbf{C} \rightarrow H_0, R_{+}^{\circ}(\xi) : H_0 \rightarrow \mathbf{C}$ défini par : $R_{-}^{\circ}(\xi)u_{-} = u_{-}\psi(y, \xi)$
 $(R_{+}^{\circ}(\xi)u)_{-} = \int_E \bar{\psi}(y, \xi)u(y)dz.$

A l'aide des hypothèses $(H_1)(H_2)$ on démontre facilement :

Lemme 8.— L'opérateur $\mathcal{P}(x, \xi, z) = \begin{pmatrix} P(x, \xi) - z & R_{-}^{\circ}(\xi) \\ R_{+}^{\circ}(\xi) & 0 \end{pmatrix} : H_{2,\xi} \oplus \mathbf{C} \rightarrow H_0 \oplus \mathbf{C}$ est inversible pour $(x, \xi, z) \in \mathbf{R}_{x,\xi}^{2n} \times \omega$ avec un inverse $\mathcal{E}_0(x, \xi, z) = \begin{pmatrix} E_0(x, \xi, z) & E_{+}^0(x, \xi, z) \\ E_{-}^0(x, \xi, z) & E_{-+}^0(x, \xi, z) \end{pmatrix}$ uniformément borné ainsi que toutes ces dérivées dans $\gamma(H_0 \oplus \mathbf{C}, H_{2,\xi} \oplus \mathbf{C})$ en $(x, \xi, z) \in \mathbf{R}_{x,\xi}^{2n} \times \omega$. De plus on a :

$$\begin{aligned} E_{-+}^0(x, \xi, z) &= z - (\lambda_{k0}(\xi) + \varphi(x)) \\ E_{+}^0(x, \xi, z) &= E_{+}^0(\xi) = R_{-}^0(\xi) \\ E_{-}^0(x, \xi, z) &= R_{+}^0(\xi) \\ E^0(x, \xi, z) &= (1 - R_{-}^0(\xi)R_{+}^0(\xi))(P(x, \xi) - z)^{-1}(1 - R_{-}^0(\xi)R_{+}^0(\xi)) \# \end{aligned}$$

Le lemme 8, donne explicitement $E_{-+}(x, \xi + A(x), z, h)$ et d'après la démonstration du théorème 1 on peut calculer à l'aide de $E_{-+}(x, \xi + A(x), z, h)$ tous les termes du développement asymptotique (5).

Utilisant un calcul symbolique classique on obtient :

$$\begin{aligned} \text{tr } f(P_{A,\varphi}) &= \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{\mathbf{R}^n_x} \int_{E^*} f(\varphi(x) + \lambda_{k0}(\xi)) d\xi dx + h(2\pi h)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n_x} \int_{E^*} f'(\varphi(x) \\ &+ \lambda_{k0}(\xi)) \int C(x, \xi)(y) \bar{\psi}(y, \xi) dy d\xi dx + 0(h^{2-n}) = (1) + h(2\pi h)^{-n}(2) + 0(h^{2-n}) \end{aligned}$$

avec $C(x, \xi)(y) = \frac{1}{2i} < \partial_\xi P(x, \xi), B(x) \partial_\xi R_-^0(\xi) > + \frac{1}{2i} < \lambda_\xi, B(x) \partial_\xi R_-^0(\xi) > - \frac{1}{i} < \partial_\xi R_-^0(\xi), \partial_x \varphi(x) >$, ou $B(x) = {}^t \partial_x A(x) - \partial_x A(x)$

$$\begin{aligned} (2) &= \frac{1}{i} \int_{\mathbf{R}^n_x} \int_{E^*} f'(\varphi(x) + \lambda_{k0}(\xi)) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_E ((D_{y_i} + \xi_i) \partial_{\xi_j} \psi(y, \xi)) \bar{\psi}(y, \xi) dg d\xi dx \\ &+ \frac{1}{2i} \int_{\mathbf{R}^n_x} \int_{E^*} f'(\varphi(x) + \lambda_{k0}(\xi)) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\partial_{x_i} A_j - \partial_{x_j} A_i) \lambda'_{\xi_i} \int_E \partial_{\xi_j} \psi(y, \xi) \bar{\psi}(y, \xi) dg d\xi dx \\ &+ \int_{\mathbf{R}^n_x} \int_{E^*} f'(\varphi(x) + \lambda_{k0}(\xi) - \frac{1}{i} \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} \varphi(x)) \int_E \partial_{\xi_j} \psi(y, \xi) \bar{\psi}(y, \xi) dg d\xi dx \\ &= (3) + (4) + (5) \end{aligned}$$

(5) = $-\frac{1}{i} \int_{E^*} \int_E \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} \psi(y, \xi) \bar{\psi}(y, \xi) dy \int_{\mathbf{R}^n_x} \partial_{\xi_j} (f(\varphi(x) + \lambda_{k0}(\xi))) dx d\xi$ est nulle (car $f(\varphi(x) + \lambda_{k0}(\xi))$ est à support compact en x).

Remarque 9 : Puisque $\bar{\psi}(y, \xi) = \psi(y, -\xi)$ alors : $(*) \partial_\xi \bar{\psi}(y, \xi) = -\partial_\xi \psi(y, -\xi)$. En utilisant (*) et le fait que $B(x)$ est antisymétrique on montre que les fonctions :

$$\alpha(x, \xi) = \int_E < B(x) \partial_\xi \psi(y, \xi), \partial_\xi \bar{\psi}(y, \xi) > dy,$$

$$\beta(x, \xi) = \int_E < (\lambda_{k0}(\xi) + \varphi(x) - P(x, \xi)) B(x) \partial_\xi \psi(y, \xi), \partial_\xi \bar{\psi}(y, \xi) > dy$$

sont impaires en ξ .

Par intégration par parties en ξ , on démontre :

$$(4) = -\frac{1}{2i} \int_{\mathbf{R}^n_x} \int_{E^*} f(\varphi(x) + \lambda_{k0}(\xi)) \alpha(x, \xi) d\xi dx$$

De même à l'aide de la formule

$$\frac{\partial P}{\partial \xi}(x, \xi) \psi(y, \xi) = \lambda'_\xi \psi(y, \xi) + (\lambda_{k0}(\xi) + \varphi(x) - P(x, \xi)) \frac{\partial \psi}{\partial \xi}(y, \xi)$$

On obtient

$$(3) = (4) - \frac{1}{2i} \int_{\mathbf{R}^n_x} \int_{E^*} f'(\varphi(x) + \lambda_{k0}(\xi)) \gamma(x, \xi) d\xi dx$$

La remarque 9 entraîne que $(3) = (4) = 0$, ce qui achève la démonstration du théorème 2.

Bibliographie

- [Ba] A. Balezard - Konlein : Calcul fonctionnel pour les opérateurs h -admissibles à symbole opérateur et application, Thèse 3ème cycle, Nantes (1985).
- [Be] R. Beals : Characterization of pseudo-differential operators and applications Duke Math. J. Vol. 44 n°1 (1977) 45-47.
- [Bu] V.S. Buslaev : Semi-classical approximation for equation with periodic coefficients Russian Math. Surveys 42, 6 (1987) 97-125.
- [G.M.S.] C. Gérard - A. Martinez - J. Sjöstrand : A mathematical approach to the effective Hamiltonien in perturbed periodic-problem. Comm. Math. Phy. Vol. 144, 2, (1991) 217-244.
- [Gu. Ra. T.] Guillot - J. Rabiton - Trubowitz : Semi-classical method in solid state physics. Comm. Math. Phy. 116, (1988) 401-415.
- [He. Sj.] B. Helffer - J. Sjöstrand :
 - [1] Equation de Schrödinger avec champ magnetique fort et equation de Harper. preprint juin (1988).
 - [2] Analyse semi-classique pour l'équation de Harper. Bull. S.M.F. Mémoire n°34, T 116, Fasc. 4 (1988).
 - [3] On diamagnetisme and de Haas - Van Alphen effect, Ann. Inst, Henri Poincaré (physique théorique) Vol 52, n°4, (1990). 303-375.
- [Ne] C. Nencin
 - [1] Stability of energy gap under variation of the magnetic field letters in Mathematical physics 11 (1986), 127-132.
 - [2] Existence of the exponentially localised Wannik fonction. Comm. in Math. Phy. 91, (1983), 81-85.

[Av. Si.] J. Avron - B. Simon : Stability of gaps for periodic potentials under variation of a magnetic field. J. Phy. A. Math. Gen. 18, (1985) 2199-2205.

[Sj.] J.Sjöstrand : Microlocal analysis for the periodic magnetic Schrödinger equation and related questions C.I.M.E. lectures Eté 1989, 237-332, Springer L.N. in Math 1495 (1991).

Département de Mathématiques

Université Paris-Sud

91405 ORSAY cedex