

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

A. GRIGIS

## Analyse semi-classique de l'opérateur de Schrödinger sur la sphère

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1990-1991), exp. n° 24,  
p. 1-9

<[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1990-1991\\_\\_\\_\\_A24\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1990-1991____A24_0)>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1990-1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

*CENTRE  
DE  
MATHEMATIQUES*

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)

Tél. (1) 69 33 40 91

Fax (1) 69 33 30 19 ; Tél. 601.596 F

Séminaire 1990-1991

---

## EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

### ANALYSE SEMI-CLASSIQUE DE L'OPERATEUR DE SCHRODINGER SUR LA SPHERE

A. GRIGIS



## I - Introduction

Nous étudions l'opérateur de Schrödinger :

$$(1) \quad P = -\Delta + V(x)$$

où  $-\Delta$  est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la sphère  $S^2$  et  $V$  un potentiel de régularité  $\mathcal{C}^\infty$ , ou réel-analytique pour certains résultats plus précis. Le spectre de cet opérateur est discret et assez proche du spectre de  $-\Delta$ , qui est connu explicitement.

$$(2) \quad -\Delta \varphi_{k,\ell}^0 = k(k+1) \varphi_{k,\ell}^0 \quad -k \leq \ell \leq k$$

Si  $H_k$  est l'espace propre engendré par les  $\varphi_{k,\ell}^0$ ,  $-k \leq \ell \leq k$  on a

$$(3) \quad \dim H_k = 2k + 1$$

Pour l'opérateur  $P$  on a

$$(4) \quad (-\Delta + V) \varphi_{k,\ell} = (k(k+1) + \mu_{k,\ell}) \varphi_{k,\ell}$$

La valeur propre  $k(k+1)$  de  $-\Delta$  éclate en  $2k+1$  valeurs propres et on étudie la répartition des  $\mu_{k,\ell}$ , que l'on range de façon que  $\mu_{k,\ell} \leq \mu_{k,\ell+1}$ . Notre étude est asymptotique pour  $k \rightarrow +\infty$ .

De nombreux travaux antérieurs ont abordé ce problème (entre autres [CV],[G],[U],[W]). L'objectif principal de ces travaux est la conjecture suivante, que nous attribuons à V. Guillemin et qui n'est toujours pas résolue.

**Conjecture de Guillemin** :  $-\Delta + V_1$  et  $-\Delta + V_2$  ont le même spectre si et seulement si il existe une isométrie  $O$  de  $S^2$  telle que  $V_2 = V_1 \circ O$ .

Ici nous reformulons le problème de l'étude asymptotique des  $\mu_{k,\ell}$  dans un cadre semi-classique. Nous arrivons naturellement, comme cela était vu d'ailleurs dans [U],[CV], sur la sphère  $S^2$ , considérée maintenant comme espace de phase. Quantiquement nous sommes alors confrontés à un problème en dimension 1 pour lequel un certain nombre d'outils ont été développés récemment ([HS],[S],[M]).

Ceci permet d'aborder un problème d'effet tunnel. En effet dans [CV] il était remarqué que le symbole principal de l'opérateur réduit est toujours pair car c'est la transformée de Radon de  $V$ , et à cause de cette symétrie les valeurs de  $\mu_{k,\ell}$  vont par paire et on a des estimations du type :

$$(5) \quad \mu_{k,\ell+1} - \mu_{k,\ell} = O(k^{-\infty})$$

Dans l'étude des problèmes d'effet tunnel en dimension 1, il est bien connu que ce  $O(k^{-\infty})$  est en fait de la forme  $O(e^{-kS})$ . C'est ce que nous montrons dans un cas particulier.

Nous considérons l'exemple

$$(6) \quad V(x) = 4x_1 x_2$$

(en notant  $S^2 = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ ).

Dans cet exemple il y a une symétrie supplémentaire qui entraîne  $\mu_{k,-\ell} = -\mu_{k,\ell}$  et en particulier  $\mu_{k,0} = 0$ . Nous obtenons une asymptotique très précise pour  $\mu_{k,\ell}$  notamment dans la région  $\frac{|\ell|}{k} < \varepsilon$ .

Ceci permet une estimation de la fonction de comptage

$$(7) \quad N_k(\mu) = \# \{ \mu_{k,\ell} < \mu \}$$

Il était connu ([W]) que

$$(8) \quad \frac{1}{2k+1} N_k(\mu) = \text{mes} \{ \text{Rad } V \leq \mu \} + O(1)$$

mais près de  $\mu = 0$  le premier terme admet une singularité et le reste n'était pas connu, jusqu'à des travaux récents d'Ivrii.

## II - Réduction à un problème semi-classique

Le point de départ est un théorème de moyennisation dont des versions successives ont été données par Weinstein, Guillemin et Colin de Verdière, pour aboutir à l'énoncé suivant

*Théorème* ([W],[G],[CV]) :

Il existe un opérateur intégral de Fourier unitaire  $U$ , et un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0,  $Q$  tels que :

- 1)  $U^* (-\Delta + V) U = -\Delta + Q$
- 2)  $[-\Delta, Q] = 0$
- 3)  $q = \text{Rad } V$

Ici  $q$  est le symbole principal de  $Q$ , c'est-à-dire une fonction homogène de degré 0 sur  $T^*S^2$  et  $\text{Rad}$  est la transformée de Radon.

$$(9) \quad \text{Rad } V(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{V}(\varphi_t(x, \xi)) dt$$

où  $\varphi_t$  est le flot géodésique sur la sphère, ou encore le flot hamiltonien de  $\xi^2$  symbole de  $-\Delta$ . D'autre part  $\tilde{V}$  est la fonction homogène de degré 0 sur  $T^*S^2$  telle que  $\tilde{V}(x, \xi) = V(x)$ ,  $\forall (x, \xi) \in T^*S^2$ .

On a alors les remarques suivantes :

- 1) Si  $V$  est impaire,  $\text{Rad } V = 0$  et alors l'opérateur  $Q$  est d'ordre négatif, en fait  $-2$  d'après un calcul de [U].
- 2)  $\text{Rad } V$  est invariante par le flot géodésique donc est en fait une fonction définie sur les grands cercles de  $S^2$ . L'ensemble des grands cercles orientés est  $S^2$  (en identifiant un grand cercle avec son pôle). On peut donc considérer  $\text{Rad } V$  comme une fonction paire sur  $S^2$  (car  $\text{Rad } V(x, \xi) = \text{Rad } V(x, -\xi)$ ).

Les  $\mu_{k, \ell}$  sont donc les valeurs propres de la restriction de  $Q$  à  $H_k$ . L'étude de ces valeurs propres quand  $k \rightarrow +\infty$  se ramène à celles d'un opérateur pseudodifférentiel semi-classique à

espace de phase compact ; ce phénomène correspond à la finitude de  $\dim H_k$ . Ceci a été entrepris par Uribe [U] à partir d'un article de Berezin [B].

Soit  $A$  l'algèbre des OPD sur  $S^2$  commutant avec le laplacien. On associe à  $Q \in A$  un symbole sur  $S^2$  de la manière suivante.

Soit  $z \in S^2$  et  $(x_1, x_2, x_3)$  un système orthonormal de coordonnées sur  $\mathbb{R}^3$  tel que  $z = (0, 0, 1)$ . On note  $\phi_z^k = (x_1 + ix_2)_{|S^2}^k$  la fonction extrémale de  $H_k$ . On remarque que plus  $k$  est grand plus la fonction  $\phi_z^k$  est concentrée sur le grand cercle associé à  $z$ . On pose alors :

$$(10) \quad \langle Q \phi_z^k, \phi_z^k \rangle = \sigma(Q)(z, k)$$

Ce symbole qui est une fonction sur  $S^2 \times \mathbb{N}$  a un développement asymptotique en puissances négatives de  $k$ .

On choisit alors comme paramètre semi-classique  $h = k^{-1}$  ou mieux  $h = (k + \frac{1}{2})^{-1}$ . Ce dernier choix est plus cohérent avec la formule de Weyl et la condition de quantification de Bohr-Sommerfeld (voir [K-L-S]).

Les opérateurs de  $A$  correspondent donc à des symboles semi-classiques sur la sphère. Il existe un calcul symbolique (voir [U]) et pour le symbole principal

$$(11) \quad \sigma_0(Q_1 \# Q_2) = \sigma_0(Q_1) \sigma_0(Q_2)$$

On peut donc définir la variété caractéristique d'un opérateur comme l'ensemble des zéros du symbole principal.

Microlocalement, c'est-à-dire localement sur  $S^2$  on peut toujours se ramener à un ouvert de  $T^*\mathbb{R}$  par une transformation canonique et construire des solutions asymptotiques.

Dans [CV] Colin de Verdière étudie le spectre de l'opérateur  $Q$  associé à  $V$  près du minimum de  $q = \text{Rad } V$ , en supposant que ce minimum est atteint seulement en deux points symétriques et que ces points sont des minimum non dégénérés pour  $q$ .

C'est la situation du fond de puits, qui est bien connue et Colin obtient le résultat :

**Théorème** ([CV]) : Il existe un symbole

$$(12) \quad F(t,h) = F_0(t) + h F_1(t) + \dots$$

tel que

$$(13) \quad \mu_{k,-k+2\ell} \sim \mu_{k,-k+2\ell+1} \sim F\left(\frac{\ell}{k}, \frac{1}{k}\right)$$

$$(14) \quad \text{et} \quad \mu_{k,-k+2\ell+1} - \mu_{k,-k+2\ell} = O(k^{-\infty})$$

Il est clair, même si cela n'est pas écrit dans [CV] que si  $V$  est réel analytique, le symbole  $F$  est analytique. D'autre part il y a un splitting des valeurs propres appariées, dû à l'effet tunnel entre les deux fonds de puits. C'est cet effet que nous étudions dans le paragraphe suivant.



### III - Un résultat d'interaction

Nous considérons l'exemple (6)  $V(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2$ . Ainsi  $q = \text{Rad } V = -2x_1x_2$  admet 6 points critiques : 2 minima, 2 maxima et 2 points cols. Les valeurs critiques sont  $-1$ ,  $+1$  et  $0$ . Donc si  $\mu \in ]-1, 0[ \cup ]0, 1[$  la variété caractéristique  $q^{-1}(\mu)$  a 2 composantes connexes symétriques. Si  $\mu = +1$  ou  $-1$  elle est composée de 2 puits ponctuels. Si  $\mu = 0$  elle est composée de 2 grands cercles orthogonaux qui se coupent aux points cols.

Nous posons

$$(15) \quad C(\mu) = -2\pi + \text{aire } \{q \leq \mu\}$$

Des calculs élémentaires donnent le

**Lemme :**

1)  $C(\mu)$  est une fonction impaire, réel-analytique sur  $]0, 1[$  jusqu'au point 1.

$$(16) \quad C(\mu) = 2\pi - 4 \int_{\mu}^1 \sqrt{\frac{t-\mu}{t}} \sqrt{\frac{dt}{1-t^2}} \quad 0 < \mu \leq 1$$

$$C(0) = 0 \quad C(1) = 2\pi$$

2) La singularité en 0 de  $C(\mu)$  est donnée par

$$(17) \quad C(\mu) = 2 S(\mu) \text{Log} \frac{1}{\mu} + D(\mu)$$

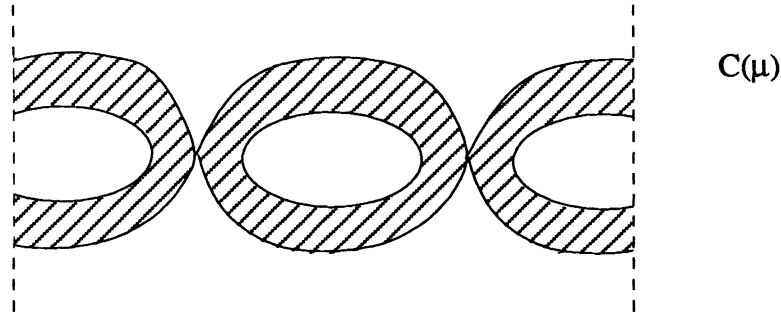
avec  $D(\mu)$  analytique, nulle en 0 et

$$(18) \quad S(\mu) = \frac{2\mu}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{t}} \sqrt{\frac{dt}{1-\mu^2 t^2}}$$

$$S'(0) = 1 \quad S(1) = \frac{2}{\pi} \text{Log} (3 + \sqrt{8})$$

$S(\mu)$  est analytique sur  $]-1, 1[$  mais a une singularité en  $+1$  et  $-1$ .

Pour étudier l'interaction nous envoyons une grande partie de la sphère sur  $T^*\mathbb{R}$  par une transformation canonique. Nous représentons  $C(\mu)$  sur cette image



Nous avons aussi représenté les cercles de  $q^{-1}(0)$ .

Quand  $\mu$  est proche de 0 nous pouvons étudier l'interaction entre les deux composantes de  $q^{-1}(\mu)$  par les méthodes utilisées dans [GG], [HS], [S], [M]. On se rend immédiatement compte que le calcul est exactement le même que dans le travail de März [M] qui étudiait l'équation de Hill semi-classique plus précisément le cas rencontré ici correspond à une énergie inférieure au maximum du potentiel dans l'équation de Hill.

Notre calcul de la fonction  $S(\mu)$  qui se prolonge analytiquement jusqu'à  $\mu = 1$  permet de calculer la distance d'Agmon entre les puits microlocaux, jusqu'au niveau des fonds de puits.

Nous obtenons le résultat suivant que nous exprimons en considérant que  $\mu_{k,\ell}$  et  $\mu_{k,\ell+1}$  sont couplées (si  $k$  est pair, c'est vrai pour  $\ell$  pair, si  $k$  est impair çà l'est pour l'impair).

**Théorème** : On a les estimations asymptotiques suivantes pour  $k \rightarrow +\infty$ ,  $C_1$  et  $C_2$  étant des constantes convenables.

$$1) \quad \text{si } 0 < \mu < \frac{C_1}{k}$$

$$\mu_{k,\ell+2} - \mu_{k,\ell+1} \sim \frac{2}{k} \log k \operatorname{Arc} \cos \left( \left( 1 + e^{-2S(\mu)k + O\left(\frac{1}{k}\right)} \right)^{-1/2} \right)$$

$$\mu_{k,\ell+1} - \mu_{k,\ell} \sim \frac{2}{k} \log k \operatorname{Arc} \sin \left( \left( 1 + e^{-2S(\mu)k + O\left(\frac{1}{k}\right)} \right)^{-1/2} \right)$$

$$2) \text{ si } C/k < \mu < C_2$$

$$\mu_{k,\ell+2} - \mu_{k,\ell} \sim \frac{-\pi}{k} \frac{2}{C'(\mu)}$$

$$\mu_{k,\ell+1} - \mu_{k,\ell} \sim \frac{-4}{k C'(\mu)} \text{Arc sin} \left( \left( 1 + e^{-2S(\mu)k + O\left(\frac{1}{k}\right)} \right)^{-1/2} \right)$$

3) si  $C_2 < \mu$

$$\mu_{k,\ell+2} - \mu_{k,\ell} \sim \frac{-\pi}{k} \frac{2}{C'(\mu)}$$

$$\mu_{k,\ell+1} - \mu_{k,\ell} \sim \frac{-4k}{C'(\mu)} e^{-S(\mu)k}$$

En particulier dans le théorème de Colin de Verdière pour ce cas particulier on peut remplacer  $O(k^{-\infty})$  par  $O(e^{-S(1)k})$ .

La démonstration est trop longue pour être exposée ici. Elle repose en particulier sur l'étude du branchement de singularités (voir [H-S] [G-G]).

Ce modèle est assez proche de la toupie quantique étudiée dans [K-L-S] et pour laquelle des calculs numériques des fonctions propres ont été effectués.

Dans ce cas particulier simple nous avons pu calculer l'interaction car il a été facile de calculer  $S(\mu)$  c'est-à-dire la distance d'Agmon entre les puits, qui ici étaient au nombre de deux. Dans un cas plus général, par exemple si  $q = \text{Rad } V$  est une fonction de Morse, il y aura plusieurs puits et les interactions mutuelles sont sans doute sinon incalculables, du moins difficiles à exprimer.

*Remerciements : Je tiens à remercier Yves Colin de Verdière qui m'a signalé l'existence de ce problème d'interaction sur la sphère.*

## Références

- [B] BEREZIN F.A. : General concept of quantization, CMP **40** (1975) p. 153-174.
- [CV] COLIN de VERDIERE Y. : Spectre conjoint d'opérateurs pseudo-différentiels qui commutent. II. Le cas intégrable, Math. Z. **171** (1980) p. 51-73.
- [G-G] GERARD C. et GRIGIS A. : Precise estimates of tunneling and eigenvalues near a potential barrier, J. of Diff. E. **72** (1) (1988) p. 149-177.
- [G] GUILLEMIN V. : Band asymptotics in two dimensions, Advances in math. **42**, (1981) p. 248-282.
- [H-S] HELFFER B. et SJÖSTRAND J. : Semi-classical analysis for Harper equation III, Bulletin de la SMF mémoire n°39 (1989).
- [K-L-S] KURCHAN P., LEOEUF P., SARACENO M. : Semi-classical approximation in the coherent state representation, Phys. Rev. A **40** (12) (1989), p. 6800-6813.
- [M] MÄRZ C. : Spectral asymptotics for Hill's equation near the potential maximum, thèse Orsay (1990) et à paraître dans Asymptotic Analysis.
- [S] SJÖSTRAND J. : Density of states for oscillating Schrödinger operators ; the de Haas-Van Halphen effect, à paraître dans Proceeding of Conference on PDE and Math. Physic Alabama (1990).
- [U] URIBE A. : A symbol calculus for a class of pseudo-differential operators on  $S^n$  and band asymptotics, J.F.A. **59** (1984) 535-556.
- [W] WEINSTEIN A. : Asymptotics of eigenvalue clusters for the Laplacian plus a potential, Duke Math. J. **44** (4) (1977) p. 883-892.