

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

C. E. CANCELIER

J. Y. CHEMIN

**Sous-ellipticité d'opérateurs intégrro-différentiels vérifiant
le principe du maximum**

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1990-1991), exp. n° 22,
p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1990-1991____A22_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1990-1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

*CENTRE
DE
MATHEMATIQUES*

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)

Tél. (1) 69 33 40 91

Fax (1) 69 33 30 19 ; Tél. 601.596 F

Séminaire 1990-1991

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

SOUS-ELLIPTICITE D'OPERATEURS INTEGRO-DIFFERENTIELS VERIFIANT LE PRINCIPE DU MAXIMUM

C.E. CANCELIER et J.Y. CHEMIN

Nous démontrons dans cet article, l'ellipticité de tout opérateur pseudo-différentiel d'ordre non entier, à noyau positif ne s'annulant pas trop, et la sous-ellipticité des opérateurs $P = \sum_j X_j^* X_j$ d'ordres ≤ 2 pourvu qu'il existe un commutateur itéré des opérateurs pseudo différentiels X_j qui soit elliptique.

In this paper, we prove the ellipticity of pseudo-differential operators with non integer order and positive kernels not vanishing too much, and the subellipticity of operators $P = \sum_j X_j^* X_j$ of order ≤ 2 when there exists an elliptic commutator of the pseudo-differential operators X_j .

0. Introduction

On s'intéresse à des opérateurs intégro-différentiels de type Waldenfels c'est à dire à des opérateurs vérifiant le principe du maximum positif, s'écrivant sous la forme $W = P + S$ où P est un opérateur différentiel du second ordre elliptique éventuellement dégénéré, à coefficient d'ordre 0 négatif et S un opérateur pseudo-différentiel réel d'ordre strictement inférieur à 2, à noyau-distribution positif parce que

- ils sont de bons candidats à être des générateurs infinitésimaux de semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés, fortement continus, contractants (Bony, Courrège et Priouret [2], Cancelier [3])

- ils modélisent les processus de diffusion avec saut (Gimbert et Lions [4] Mikulevicius et Pragarauskas [10])

L'étude de leur sous-ellipticité a conduit aux théorèmes 0.1 et 0.2 qui étendent aux cas d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre ≤ 1 les résultats de sous-ellipticité pour des opérateurs différentiels sommes de carrés de champs de vecteurs ou plus généraux de Kohn [7], de Hörmander [5], de Oleinik et Radkevich [12], de Bolley, Camus et Nourrigat [1].

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$ et S un opérateur pseudo-différentiel réel, proprement supporté, d'ordre strictement inférieur à 2, appartenant à la classe $L_{1,0}^{2-\alpha}(\mathbf{R}^n)$ de Hörmander ($\alpha > 0$). Compte tenu des estimations bien connues sur son noyau distribution $K(x, z)$, on a pour $u \in C^2(\mathbf{R}^n)$ à support contenu dans Ω et $x \in \Omega$:

$$(0.1) \quad Su(x) = \int_{\Omega} K(x, x - y)[u(y) - u(x) - \langle du(x), y - x \rangle] dy + Au(x)$$

où A est un opérateur différentiel du premier ordre à coefficients $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ et $\langle du(x), y - x \rangle = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$. On suppose que le noyau-distribution de S est une fonction positive sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$.

Par définition, on dira que S vérifie la **propriété de non annulation d'ordre $2 - \alpha$** si pour tout $x \in \Omega$, il existe un cône ouvert convexe $\mathcal{C}$ et une constante $\varepsilon > 0$ tels que

$$(0.2) \quad \forall z \in B(0, \varepsilon) \cap \mathcal{C} \quad K(x, z) \geq \varepsilon |z|^{-n-2+\alpha}$$

Théorème 0.1.—

Soit S un opérateur pseudodifférentiel réel vérifiant les hypothèses ci-dessus et la propriété de non annulation ; alors S est un opérateur elliptique.

La démonstration de ce théorème fera l'objet du premier paragraphe. Si l'on cherche à étudier la sous-ellipticité de l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - x_1^{2p} S$, S vérifiant les hypothèses du théorème ci-dessus, l'ellipticité de S permet de l'écrire $S = LL^* + L_0$, où L et L_0 sont des opérateurs d'ordres inférieurs à 1. On est alors naturellement conduit au théorème suivant :

Théorème 0.2.—

Soient $(X_j)_{1 \leq j \leq \ell}$ une suite d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordres $(m_j)_{1 \leq j \leq \ell}$, à symboles principaux imaginaires purs, (x_0, ξ_0) un point de l'espace cotangent et Y un commutateur itéré des opérateurs $(X_j)_{1 \leq j \leq \ell}$, de longueur r et d'ordre μ strictement positif. Si Y est elliptique microlocalement en (x_0, ξ_0) , alors l'opérateur $P = \sum_{j=1}^{\ell} X_j^ X_j$ est sous elliptique microlocalement en (x_0, ξ_0) avec perte de $2(1 - \frac{\mu}{r})$ dérivées.*

La démonstration de ce théorème sera faite au second paragraphe.

Remarque : Si il existe un triplet (Y, μ, r) vérifiant les hypothèses du théorème ci-dessus, alors il en existe un tel que $\frac{\mu}{r}$ soit maximal.

Dans tout l'article $|\cdot|_s$ désignera la norme de l'espace de Sobolev $H^s(\mathbf{R}^n)$.

Remerciements : Nous tenons à remercier J.-M. Bony et C.J. Xu pour de fructueuses discussions.

1. Ellipticité d'opérateurs intégrro-différentiels vérifiant le principe du maximum.

Il s'agit de démontrer le théorème 0.1, à savoir l'ellipticité de tout opérateur pseudo-différentiel de type Lévi dont le noyau vérifie la propriété de non annulation (0.2).

Par un argument de perturbation classique on peut se ramener au cas où S est à coefficients constants.

$$(1.1) \quad Su(x) = \int_{\Omega} K(x-y)[u(y) - u(x) - \langle du(x), y-x \rangle] dy \quad (u \in C_0^\infty(\Omega)) .$$

Par définition de la transformée de Fourier, le symbole de S est égal à :

$$(1.2) \quad \sigma(\xi) = \int K(z)(e^{-iz \cdot \xi} - 1 + iz \cdot \xi) dz .$$

Sa partie réelle est égale à :

$$(1.3) \quad \operatorname{Re} \sigma(\xi) = \int K(z)(\cos z \cdot \xi - 1) dz .$$

Dans le cas particulier où K est homogène, on obtient en passant coordonnées polaires :

$$(1.4) \quad \operatorname{Re} \sigma(\xi) = \int_{S^{n-1}} K(\theta) N(\theta, \xi) d\theta$$

où

$$N(\theta, \xi) = \int_0^{+\infty} [\cos(r\theta \cdot \xi) - 1] r^{-3+\alpha} dr .$$

Il est clair que $N(\theta, \xi)$ est homogène de degré $2 - \alpha$ et que $N(\theta, \xi)$ est strictement négatif sur $S^{n-1} \times S^{n-1}$; le résultat est alors immédiat et l'hypothèse de non annulation est une condition nécessaire et suffisante d'ellipticité.

Dans le cas général, il faut être un peu plus précis :

Soit $\xi_0 \in S^{n-1}$, il existe un voisinage conique U de ξ_0 et un ouvert conique V tels que pour tout $(z, \xi) \in V \times U$, on ait :

$$(1.5) \quad |z \cdot \xi| \geq C|z||\xi| \quad \text{et} \quad K(z) \geq \varepsilon|z|^{-n-2+\alpha} \quad \text{pour tout} \quad z \in B(0, \varepsilon) ;$$

et de plus si $|z \cdot \xi| \leq 1$ alors

$$\cos z \cdot \xi - 1 \leq -\frac{1}{4}(z \cdot \xi)^2 .$$

Donc

$$(1.6) \quad \operatorname{Re} \sigma(\xi) \leq -\frac{C}{4}|\xi|^2 \int_{B(0, \frac{1}{|\xi|}) \cap V} K(z)|z|^2 dz .$$

Par hypothèse

$$K(z) \geq \varepsilon |z|^{-n-2+\alpha} \quad \text{lorsque} \quad |z| \leq \frac{1}{|\xi|} \leq \varepsilon$$

donc

$$(1.7) \quad \operatorname{Re} \sigma(\xi) \leq -\varepsilon \frac{C}{4} |\xi|^2 \int_{B(0, \frac{1}{|\xi|}) \cap V} |z|^{-n+\alpha} dz,$$

d'où le résultat annoncé.

Le théorème 0.1 est aussi vrai pour tout opérateur S qui est une partie finie d'ordre $m - \alpha$ ($m \in \mathbf{N}^*$), à noyau positif vérifiant la propriété de non annulation à l'ordre $m - \alpha$.

2. Démonstration du théorème 0.2

On supposera, sans perte de généralité, que les opérateurs X_j , $1 \leq j \leq \ell$, sont définis globalement sur $\mathbf{R}^n$ et à noyaux distributions à supports compacts dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$.

Soit $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie graduée engendrée par les opérateurs pseudo-différentiels $X_1, \dots, X_\ell$ définis au paragraphe §0. Les opérateurs de $\mathcal{G}$ sont donc des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre $m \leq 1$ sur $\mathbf{R}^n$, anti-autoadjoints dont le noyau distribution est à support compact.

On peut en particulier associer à chaque $X \in \mathcal{G}$ d'ordre $m \leq 1$ un groupe à un paramètre $(e^{tx})_{t \in \mathbf{R}}$ d'opérateurs linéaires continus de $H^{-\infty}(\mathbf{R}^n)$ dans $H^{-\infty}(\mathbf{R}^n)$ et vérifier par interpolation le résultat classique : pour tout $\sigma \in [0, 1]$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$(2.1) \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad |e^{tx}u - u|_0 \leq Ct^\sigma |u|_{\sigma m}.$$

La proposition 2.1 va généraliser ce résultat.

Etant donnés un entier q strictement positif, ε une suite de $\{-1, 1\}^q$ et J une suite de $\{1, \dots, \ell\}^q$, on notera $\exp t\mathcal{X}^\varepsilon$ l'opérateur $e^{t\varepsilon_1 X_1} \dots e^{t\varepsilon_q X_q}$.

La proposition clef est la suivante :

Proposition 2.1.—

Soient Y un commutateur itéré de longueur r appartenant à $\mathcal{G}$ et N un entier positif, il existe un entier q , une suite ε de $\{-1, 1\}^q$ et une suite J de $\{1, \dots, \ell\}^q$ tels que l'opérateur H_t défini par

$$(2.2) \quad H_t = \exp t\mathcal{X}_J^\varepsilon e^{t^r Y}$$

vérifie

$$(2.3) \quad \forall \sigma \in [0, 1] \exists C \exists t_0 > 0 \quad \forall t \in [-t_0, t_0] \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \quad |H_t u - u|_0 \leq C t^{N\sigma} |u|_\sigma$$

Démonstration :

Elle comprend une partie d'algèbre et une partie d'analyse. L'algèbre présente dans la démonstration nécessite l'introduction du formalisme suivant, tel qu'il est présenté dans [1] :

On désigne par $S(\mathcal{G})$ l'algèbre non commutative des séries formelles à une indéterminée $t \in \mathbf{R}$, à coefficients dans $\mathcal{G}$ de la forme

$$(2.4) \quad S \sim \sum_{j=1}^{\infty} a_j t^j \quad a_j \in \mathcal{G}.$$

On dira qu'une série formelle $S \in S(\mathcal{G})$ est nulle à l'ordre $N \geq 1$ si $a_j = 0$ pour $j \leq N - 1$. Soit $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ l'algèbre non commutative des opérateurs dans $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ de la forme suivante :

$$(2.5) \quad P = \sum_{|\alpha| \leq p} a_\alpha X^\alpha \quad a_\alpha \in \mathbf{C}, \quad p \in \mathbf{N}$$

où pour toute suite finie $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ d'entiers $\alpha_j \in \{1, \dots, \ell\}$, on note $|\alpha| = q$ et $X^\alpha = X_{\alpha_1} \dots X_{\alpha_q}$.

Soit $S(\mathcal{U}(\mathcal{G}))$ l'algèbre non commutative des séries formelles Σ une indéterminée $t \in \mathbf{R}$, à coefficients dans $\mathcal{U}(\mathcal{G})$, muni de la loi produit usuel des séries formelles. A toute série $S \in S(\mathcal{G})$ on peut associer une série formelle $e^S \in S(\mathcal{U}(\mathcal{G}))$. D'après la formule de Campbell-Hausdorff, (voir par exemple [13]) pour tous S_1 et $S_2 \in S(\mathcal{G})$, il existe une unique série $S_{12} \in S(\mathcal{G})$ telle que dans $S(\mathcal{U}(\mathcal{G}))$:

$$(2.6) \quad e^{S_1} e^{S_2} = e^{S_{12}}$$

et l'on a

$$(2.7) \quad S_{12} = S_1 + S_2 + \frac{1}{2}[S_1, S_2] + \dots$$

Le lemme clef est le suivant :

Lemme 2.2.—

Soient Y un commutateur itéré de longueur r appartenant à $\mathcal{G}$ et N un quelconque entier positif, il existe un entier q , une suite ε de $\{-1, 1\}^q$ et une suite J de $\{1, \dots, \ell\}^q$ tels que $\exp t \mathcal{X}_J^\varepsilon = e^S$, la série $S - t^r Y$ étant nulle jusqu'à l'ordre $N - 1$.

Démonstration :

Pour $N = r + 1$, voir [1]. Lorsque $r = 2$, rappelons simplement que la formule de Campbell-Hausdorff assure que

$$e^{tX_1}e^{tX_2}e^{-tX_1}e^{-tX_2} = e^S$$

avec

$$S = t^2[X_1, X_2] + \sum_{k \geq 3} S_k$$

où S_k est somme d'un nombre fini de commutateurs itérés de X_1 et X_2 de longueur k .

En suivant la même démarche que dans [1], on obtient l'existence de q , de ε et de J tels que

$$\exp t\mathcal{X}_J^\varepsilon = e^S \quad \text{avec} \quad S = t^r Y + \sum_{k \geq r+1} t^k S_k$$

où S_k est une somme finie de commutateurs itérés de longueur k , appartenant à $\mathcal{G}$.

En s'inspirant alors de [5], on applique ceci à S_{r+1} lui même ; on en déduit l'existence de q_1, ε^1 , et J^1 tels que $\exp t\mathcal{X}_{J^1}^{\varepsilon^1} = e^{S^{(1)}}$

$$\text{avec} \quad S^{(1)} = t^r Y + \sum_{k \geq r+2} S_k^{(1)},$$

où $S_k^{(1)}$ est une somme finie de commutateurs itérés de longueur k , appartenant à $\mathcal{G}$.

En itérant le procédé jusqu'à $N - 1$, on obtient le lemme.

On considère un entier q , une suite ε et une suite J donnés par le lemme algébrique 2.2. Soit $H_t = \exp t\mathcal{X}_J^\varepsilon e^{t^r Y}$. Le point essentiel de la partie d'analyse de la démonstration consiste en la preuve du lemme suivant :

Lemme 2.3.—

L'opérateur H_t est, modulo un opérateur infiniment régularisant, un opérateur intégral de Fourier dont le symbole appartient à $C^\infty([0, t_0] ; S_{1,0}^1)$ et la phase φ vérifie

$$\exists \psi \in C^\infty([0, t_0] ; S_{1,0}^1) \quad \varphi(t, x, \xi) = \langle x, \xi \rangle + t^N \psi(t, x, \xi) .$$

Démonstration :

On commence par démontrer qu'il existe $Z \in C^\infty([0, t_0] ; S_{1,0}^1)$ tel que

$$(2.8) \quad \frac{d}{dt} H_t = Z(t) H_t .$$

Cela résulte du fait suivant. Soit $(A_i(t))_{1 \leq i \leq 2} \in C^\infty([0, t_0] ; S_{1,0}^1)$ antiautoadjoint, on considère $(F_i(t))_{1 \leq i \leq 2}$ solution de l'équation $F_i'(t) = A_i(t)F_i(t)$ avec $F_i(0) = Id$; $F_1 \circ F_2(t)$ est alors solution de $F'(t) = A_{12}(t)F(t)$ avec $F(0) = Id$, où

$$A_{12}(t) = A_1(t) + F_1(t)A_2(t)F_1(t)^{-1} .$$

L'application répétée de cette remarque assure (2.8).

Le lemme algébrique 2.2 joint à la relation (2.8) assure que $Z(t)$ a un développement de Taylor en zéro nul jusqu'à l'ordre $N - 1$.

D'après la théorie des opérateurs intégraux de Fourier (voir [6] et [8]) la phase φ de H_t vérifie :

$$\begin{cases} \partial_t \varphi(t ; x, \xi) = Z(t ; x, \partial_x \varphi(t, x, \xi)) \\ \varphi(0 ; x, \xi) = \langle x, \xi \rangle \end{cases}$$

Le lemme en résulte clairement par intégration.

Pour conclure la démonstration de la proposition 2.1, il suffit d'appliquer le lemme suivant, démontré dans [1] p.219.

Lemme 2.4.—

Soit H_t un opérateur intégral de Fourier dont le symbole appartient à $C^\infty([0, t_0] ; S_{1,0}^1)$ et dont la phase φ est telle que

$$\varphi_t(x, \xi) = \langle x, \xi \rangle + t^N \psi_N(t ; x, \xi) ; \quad \text{avec} \quad \psi_N \in C^\infty([0, t_0] ; S_{1,0}^1)$$

alors, pour tout $\sigma \in [0, 1]$; il existe C telle que

$$\forall u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \quad |H_t u - u|_0 \leq C t^{N\sigma} |u|_\sigma .$$

Corollaire 2.5.—

Sous les hypothèses de la proposition 2.1, alors, pour toute $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$

$$|(e^{t^r Y} - Id)^2 u|_0 \leq C \left(\sum_{j=1}^t |(e^{tX_j} - Id)^2 u|_0 + t^{N\sigma} |u|_\sigma \right)$$

Démonstration : voir [1].

Pour démontrer le théorème 0.2 on aura besoin de quelques résultats d'interpolation ([1] p.209 et [9] p.55).

Soient $Y \in \mathcal{G}$ un commutateur itéré, $(\tilde{Y}, D(\tilde{Y}))$ le générateur infinitésimal du groupe unitaire $(e^{tY})_{t \in \mathbf{R}}$ dans $L^2(\mathbf{R}^n)$. On définit pour $\beta \in]0, 2[$ un espace de moyenne entre $D(\tilde{Y}^2)$ et $L^2(\mathbf{R}^n)$ par

$$(2.9) \quad D_\beta(\tilde{Y}) = \{u \in L^2(\mathbf{R}^n) ; \int_0^{+\infty} \frac{|(e^{tY} - I)^2 u|_0^2}{t^{2\beta}} \frac{dt}{t} < +\infty\}.$$

D_β sera muni de sa norme canonique. On peut démontrer que lorsque $\beta \in]0, 1[$, l'espace $D_\beta(\tilde{Y})$ coïncide avec l'interpolé holomorphe $[L^2(\mathbf{R}^n), D(\tilde{Y})]_\beta$ et pour $\beta = 1$, $D_1(\tilde{Y})$ est isomorphe (algébrique et topologique) à $D(\tilde{Y})$ muni de la norme du graphe.

Le lemme suivant permet de comparer $|u|_{D_\beta(\tilde{Y})}$ aux normes $|X_j u|_0$ et $|u|_\sigma$.

Lemme 2.6.—

Soient $Y \in \mathcal{G}$ un commutateur itéré de longueur r et $\sigma \in]\frac{1}{N}, 1]$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$(2.10) \quad |u|_{D_{\frac{1}{r}}(\tilde{Y})} \leq C \left[\sum_{j=1}^{\ell} |X_j u|_0^2 + |u|_\sigma \right].$$

Démonstration : Nous rappelons brièvement ici la preuve donnée dans [1].

$$|u|_{D_{\frac{1}{r}}(\tilde{Y})}^2 = |u|_0^2 + \int_0^{+\infty} \frac{|(e^{tY} - I)^2 u|_0^2}{t^{2/r}} \frac{dt}{t}.$$

Par changement de variable ($t = s^r$) on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{|(e^{tY} - I)^2 u|_0^2}{t^{2/r}} \frac{dt}{t} \\ & \leq C \left[\sum_{j=1}^{\ell} \int_0^{+\infty} \frac{|(e^{tX_j} - I)^2 u|_0^2}{t^2} \frac{dt}{t} + \int_0^{t_0} \frac{t^{2N\sigma}}{t^2} |u|_\sigma^2 \frac{dt}{t} + |u|_0^2 \right] \end{aligned}$$

en vertu du corollaire 2.5.

L'intégrale $\int_0^{t_0} t^{2N\sigma-3} dt$ est convergente puisque $\sigma > \frac{1}{N}$ et de plus

$$\int_0^{+\infty} \frac{|(e^{tX_j} - I)^2 u|_0^2}{t^2} \frac{dt}{t} \leq |u|_{D_1(\tilde{X}_j)}^2 \leq C[|X_j u|_0^2 + |u|_0^2], \text{ d'où le résultat.}$$

Démonstration du théorème 0.2

Soit $Y \in \mathcal{G}$ un commutateur itéré de longueur r , d'ordre μ , elliptique en (x_0, ξ_0) . Alors il existe donc un voisinage compact K de x_0 , un opérateur pseudo différentiel $\psi(x, D)$ d'ordre 0, elliptique en (x_0, ξ_0) , nul pour $x \notin V$ où V est un voisinage de x_0 , relativement compact dans $\mathring{K}$ et une constante $C > 0$ tels que

$$(2.11) \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \quad |\psi(x, D)u|_\mu \leq C [|Yu|_0 + |u|_0] .$$

Comme $\psi(x, D)$ est un opérateur d'ordre 0, donc linéaire continu de $L^2(\mathbf{R}^n)$ dans $L^2(\mathbf{R}^n)$, on déduit par interpolation qu'il est borné de l'interpolé holomorphe $[L^2(\mathbf{R}^n), D(\tilde{Y})]_{\frac{1}{r}} = D_{\frac{1}{r}}(\tilde{Y})$ dans l'interpolé holomorphe $[L^2(\mathbf{R}^n), H^\mu(\mathbf{R}^n)]_{\frac{1}{r}} = H^{\frac{\mu}{r}}(\mathbf{R}^n)$ d'où

$$(2.12) \quad |\psi(x, D)u|_{\frac{\mu}{r}}^2 \leq C |u|_{D_{\frac{1}{r}}(\tilde{Y})}^2$$

$$\leq C \left[\sum_{j=1}^{\ell} |X_j u|_0^2 + |u|_\sigma^2 \right] \quad \text{pour } \sigma \in]\frac{1}{N}, 1] \quad (\text{lemme 2.6})$$

La proposition 2.1 laisse toute latitude sur le choix de N , donc il est possible de choisir N pour que $\frac{1}{N} < \frac{\mu}{r}$. D'où le théorème 0.2.

Pour conclure, démontrons l'existence d'un triplet (Y_m, μ_m, r_m) tel que $\frac{\mu_m}{r_m}$ soit maximal. Soit (Y, μ, r) un triplet vérifiant l'hypothèse du théorème 0.2. Tout triplet (Y', μ', r') tel que $\frac{1}{r'} < \frac{\mu}{r}$ donne lieu à un quotient $\frac{\mu'}{r'} < \frac{\mu}{r}$; donc le triplet réalisant le quotient $\frac{\mu}{r}$ maximal est à chercher dans un ensemble fini; d'où l'existence de (Y_m, μ_m, r_m) .

Bibliographie :

- [1] P. Bolley, J. Camus et J. Nourrigat : La condition de Hörmander-Kohn pour les opérateurs pseudo-différentiels, Comm. in P.D.E., 7 (2), 197-221 (1982).
- [2] J.-M. Bony, P. Courrège et P. Priouret : Semi-groupes de Feller sur une variété à bord compacte et problèmes aux limites intégral-différentiels du second ordre donnant lieu au principe du maximum, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 18, 2 (1968), 369-521.
- [3] C.E. Cancelier : Problèmes aux limites pseudo-différentiels donnant lieu au principe du maximum, Comm. in P.D.E., 11 (15), 1677-1726 (1986).
- [4] F. Gimbert et P.L. Lions : Existence and regularity results for solutions of second order, elliptic, integro-differential operators, Ricerche di Matematica, vol.XXXIII, fasc. 2 (1984).
- [5] L. Hörmander : Hypoelliptic second order differential equations. Acta Math. 119 (1967) 147-171.

- [6] L. Hörmander : The analysis of linear partial differential operators IV Springer-Verlag, 1985.
- [7] J.J. Kohn : Pseudo-differential operators and non-elliptic problems, Pseudo differential operators (C.I.M.E. Streza, 1968), Edizioni Cremonese, Rome, 1969, pp 157-165 MR 41 # 3972.
- [8] H. Kumano-Go : A calculus of Fourier integral operators on $\mathbf{R}^n$ and the fundamental solution for an operator of hyperbolic type. Comm. in Partial Differential equations 1 (1), 1-44 (1976).
- [9] J.L. Lions et J. Peetre : Sur une classe d'espaces d'interpolation. Institut des Hautes Etudes Scientifiques - Publications mathématiques n°19-1964.
- [10] R. Mikulevicius et H. Pragarauskas : On the existence and uniqueness of solutions to the martingale problem, à paraître.
- [11] J. Nourrigat : Subelliptic estimates for systems of pseudo-differential operators. Notas de curso. Instituto de Matemática. Universidad federal de Pernambuco. Recife 1982.
- [12] O.A. Oleinik and E.V. Radkevich : Second order equations with nonnegative characteristic form, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, Plenum Press, 1973.
- [13] J.P. Serre : Lectures given at Harvard University. Lie algebras and Lie groups. W.A. Benjamin, Inc. New-York Amsterdam 1965.

C.E. Cancelier

Université des Antilles et de la Guyane

Département de Mathématiques

B.P. 592

97167 Pointe-à-Pitre cedex

Ecole Polytechnique

Centre de Mathématiques

91128 Palaiseau cedex

J.-Y. Chemin

Ecole Polytechnique

Centre de Mathématiques

91128 Palaiseau cedex