Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

F. Helein

Sur la régularité des applications faiblement harmoniques entre une surface et une variété riemannienne

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1990-1991), exp. nº 10, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1990-1991____A10_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES
Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE
F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 601.596 F

Séminaire 1990-1991

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

SUR LA REGULARITE DES APPLICATIONS FAIBLEMENT HARMONIQUES ENTRE UNE SURFACE ET UNE VARIETE RIEMANNIENNE

par F. HELEIN

Exposé n°X

19 Février 1991

Dans cet exposé nous abordons la question suivante : étant donnée une application faiblement harmonique entre deux variétés riemanniennes, cette application est-elle régulière ? En général la réponse est non si la dimension de la variété de départ est supérieure ou égale à 3. Par contre si la variété de départ est une surface de dimension 2, nous allons voir que la réponse est oui.

Donnons une définition des applications harmoniques entre variétés : $(\mathcal{M}, g)$ sera la variété de départ, de dimension m, et $(\mathcal{N}, h)$ la variété d'arrivée, de dimension n. Comme $\mathcal{N}$ est supposée compacte, donc nous pouvons supposer que $\mathcal{N}$ est plongée isométriquememt dans un espace plat $\mathbf{R}^k$ grâce au théorème de Nash-Moser. L'espace fonctionnel est :

$$H^1(\mathcal{M},\mathcal{N}) = \{u \in H^1(\mathcal{M},\mathbf{R}^k) \mid u(x) \in \mathcal{N} \text{ p.p.}\}.$$

Sur cet espace, on définit la fonctionnelle de Dirichlet

$$E(u) = \int_{\mathcal{M}} e(u)(x)\, dv_g(x) \ ,$$

où, dans des coordonnées locales,

$$e(u)(x) = \frac{1}{2}\, h_{ij}[u(x)]\, g^{\alpha\beta}(x)\, u^i_\alpha u^j_\beta$$

est la densité d'énergie de u au point x, et

$$dv_g(x) = \sqrt{\det g_{ij}(x)}\, dx^1 \cdots dx^m$$

est l'élément de volume riemannien. Introduisons un voisinage tubulaire V de $\mathcal{N}$ dans $\mathbf{R}^k$ sur lequel il existe une rétraction $\mathrm{C}^\infty\, r \ : V \to \mathcal{N}$. Etant donnée u dans $H^1(\mathcal{M},\mathcal{N})$, pour toute fonction test φ dans $C^\infty_c(\mathcal{M},\mathbf{R}^k)$ et pour ε réel suffisamment petit, on a

$$u + \varepsilon\varphi \in V \ .$$

On peut donc considérer l'application $r(u + \varepsilon\varphi) \in H^1(\mathcal{M},\mathcal{N})$. On dit que u est faiblement harmonique si et seulememt si

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{E(r(u+\varepsilon\varphi)) - E(u)}{\varepsilon} = 0 \ ,$$

pour toute fonction test φ. L'équation d'Euler associée est

$$\Delta_{\mathcal{M}} u + A(u)(\nabla u, \nabla u) = 0 \ , \tag{1}$$

où $\Delta_{\mathcal{M}}$ est le laplacien sur $\mathcal{M}$, et A est la seconde forme fondamentale du plongement de $\mathcal{N}$ dans $\mathbf{R}^k$. Notons que u satisfait (1) au sens des distributions.

Notre résultat principal est le suivant :

Théorème 1.— *Toute application faiblement harmonique d'une surface de dimension 2 dans une variété riemannienne compacte est régulière.*

Remarques

a. Sous certaines hypothèses supplémentaires, on connaissait des résultats de régularité : si u est minimisante (C. B. Jr. Morrey [Mo]), si u est faiblement conforme (M. Grüter [G]), si la différentielle de Hopf $\omega = [|u_x|^2 - |u_y|^2 - 2\,i < u_x, u_y >]$ de u est holomorphe (R. Schoen [Sc 1]), si u a son image contenue dans une boule géodésique convexe (S. Hildebrandt, H. Kaul, K.J. Widman [H-K-W]).

De plus, dans [S-U], J. Sacks et K. Uhlenbeck montrent que si une application d'énergie finie est harmonique régulière sur une surface sauf peut-être en des points isolés, alors cette application peut être prolongée de façon régulière et harmonique sur toute la surface.

b. Des théorèmes de régularité dans des situations critiques analogues ont été prouvés dans [Tr] par N. S. Trudinger (problème de Yamabe), dans [W] par H. Wente et [Hz] par E. Heinz (surfaces à courbure moyenne prescrite).

Nous allons exposer deux preuves du Théorème 1. La première n'est valable que si $(\mathcal{N}, h)$ est homogène, c'est-à-dire symétrique au sens suivant : il existe un groupe de Lie Γ qui agit transitivement et par isométries sur $(\mathcal{N}, h)$. Ceci est vrai en particulier si $(\mathcal{N}, h)$ est la sphère munie de la métrique canonique [Hl 1]. Cette méthode fut trouvée avant la deuxième et est utilisée dans [Hl 2] (voir aussi [Sc 2]). La seconde méthode s'applique au cas général (voir [Hl 3]).

Dans le cas symétrique, la méthode utilisée donne lieu en dimension supérieure ou égale à 2 au résultat suivant (démontré dans [Hl 2]).

Théorème 2.— *Toute application faiblement harmonique u de $(\mathcal{M}, g)$ dans $(\mathcal{N}, h)$ est régulière dès que :*

(i) ∇u *appartient à* $L^m(\mathcal{M})$,

(ii) $(\mathcal{N}, h)$ *est homogène.*

Encore une remarque : L'ingrédient essentiel des deux preuves fait appel à un phénomène de compensation. H. Wente [W] et H. Brezis et J.M. Coron [B-C] ont remarqué que si a et b sont deux fonctions dans $H^1(B^2)$ (où B^2 est la boule unité de $\mathbf{R}^2$) et si φ dans $H^1(B^2)$ satisfait à

$$\begin{cases} \Delta\varphi = a_x b_y - a_y b_x \quad \text{sur} \quad B^2 \\ \quad \varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \partial B^2, \end{cases}$$

alors φ est continue sur B^2. L. Tartar [Ta] a montré qu'en fait la transformée de Fourier de φ est dans $L^1(\mathbf{R}^2)$. Puis à la suite de S. Müller [Mu] qui avait remarqué que $a_x b_y - a_y b_x$ était dans $L^1 \log L^1$ (au lieu de L^1) si cette quantité est positive, R. Coifman, P.L. Lions, Y. Meyer et S. Semmes [C-L-M-S] ont récemment établi que $a_x b_y - a_y b_x$ appartient à l'espace de Hardy $\mathcal{H}^1_{\text{loc}}(B^2)$, ce qui permet également de retrouver que φ est continue.

Preuve. Soit m un point de la surface $\mathcal{M}$, nous allons montrer que u est régulière sur un voisinage de m. Tout d'abord nous utilisons une carte locale isotherme d'un voisinage de m pour nous ramener au cas d'une application d'énergie finie u définie sur B^2, la boule de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbf{R}^2$, à valeurs dans la variété $\mathcal{N}$ et vérifiant l'équation (1) au sens des distributions. Nous utiliserons les coordonnées canoniques $z = (x, y)$ sur B^2.

a. Cas symétrique :

L'hypothèse de symétrie signifie qu'il existe p champs de vecteurs de Killing tangents à $\mathcal{N}, \rho_1, \dots, \rho_p$. La transitivité de l'action du groupe G implique qu'en chaque point y de $\mathcal{N}, \rho_1(y), \cdots, \rho_p(y)$ engendrent $T_y\mathcal{N}$. Plus précisement ceci entraîne qu'il existe p vecteurs $Y_1(y), \cdots, Y_p(y)$ tels que pour tout V dans T_yN.

$$V = \langle \rho_1(y), V \rangle\, Y_1(y) + \cdots + \langle \rho_p(y), V \rangle\, Y_p(y)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire sur $\mathcal{N}$. De plus on peut choisir les fonctions Y_i dépendant de façon régulière de y. Appliquant ceci à $u_x \equiv \partial u / \partial x$ et $u_y \equiv \partial u / \partial y$, on obtient en notant $\nabla u = (u_x, u_y)$

$$\nabla u = \sum_{i=1}^{p} \langle \rho_i[u(x)], \nabla u \rangle\, Y_i[u(x)] \tag{2}$$

Utilisons maintenant le fait que les ρ_i sont des champs de Killing : c'est le théorème de Nœther déjà exploité dans le contexte des applications harmoniques par J. Shatah [Sh], Y. Chen [C] et J. Keller, J. Rubinstein, P. Sternberg [K-R-S] :

Lemme 1.— *Si u est faiblement harmonique de $\mathcal{M}$ vers $\mathcal{N}$ et si ρ est un champ de vecteurs de Killing régulier sur $\mathcal{N}$, alors*

$$\langle \rho(u), \nabla u \rangle = (\langle \rho(u), u_x \rangle, \langle \rho(u), u_y \rangle)$$

est à divergence nulle.

Calculons la divergence des deux membres de (2) on obtient grâce au lemme 1 :

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{p} \langle \rho_i(u), u_x \rangle \frac{\partial Y_i(u)}{\partial x} + \langle \rho_i(u), u_y \rangle \frac{\partial Y_i(u)}{\partial y} \tag{3}$$

Réutilisons le lemme 1 : il existe p fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ dans $H^1(B^2)$ telles que

$$\langle \rho_i(u), \nabla u \rangle = \operatorname{rot} \varphi_i.$$

Remplaçons dans (3) on obtient

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial Y_i(u)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} - \frac{\partial Y_i(u)}{\partial y} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}.$$

Ici intervient le phénomène de compensation, on en déduit que u est continue. La régularité de u s'obtient alors suivant des résultats classiques dans [L-U] ou [H-K-W].

b Cas général :

Etape préliminaire. Nous allons utiliser la méthode du repère mobile. Nous allons supposer que l'image de u est strictement contenue dans un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathcal{N}$ sur lequel il existe un champ régulier de repères orthonormés tangents $\tilde{e} = (\tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_n)$. Dans le cas où cette hypothèse n'est pas triviale, on peut en fait plonger isométriquememt $\mathcal{N}$ dans une autre variété compacte $\mathcal{N}'$ de dimension plus grande de telle façon que u soit harmonique à valeurs dans $\mathcal{N}'$ et que cette hypothèse soit vérifiée. Puis on regarde pour toutes les transformations de jauge $R = (R_{ij}) \in H^1(B^2, \mathrm{SO}(n))$ les repères $e = (e_1, \cdots, e_n)$ avec

$$e_i(z) = R_{ij}(z)\, \tilde{e}_j[u(z)].$$

On choisit parmi les transformations de jauge une qui minimise la fonctionnelle

$$F(R) = \int_{B^2} \left[\sum_{i,j} \langle \frac{\partial e_i}{\partial x}, e_j \rangle^2 + \langle \frac{\partial e_j}{\partial y}, e_j \rangle^2 \right] dxdy$$

Appelons e le repère ainsi trouvé. Il satisfait à

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle \frac{\partial e_i}{\partial x}, e_j \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle \frac{\partial e_i}{\partial y}, e_j \rangle = 0 \ .$$

Donc il existe des fonctions A_{ij} dans $H^1(B^2)$ telles que

$$\left(\langle \frac{\partial e_i}{\partial x}, e_j \rangle, \langle \frac{\partial e_i}{\partial y}, e_j \rangle \right) = \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial y}, - \frac{\partial A_{ij}}{\partial x} \right),$$

et A_{ij} vérifie alors :

$$\Delta A_{ij} = \langle \frac{\partial e_i}{\partial x}, \frac{\partial e_j}{\partial y} \rangle - \langle \frac{\partial e_i}{\partial y}, \frac{\partial e_j}{\partial x} \rangle \ .$$

Ici intervient le phénomène de compensation, en effet ΔA_{ij} est dans $\mathcal{H}^1_{\mathrm{loc}}(B^2)$. Et comme l'ont remarqué H. Brezis et P.L. Lions, ceci entraîne que les coefficients $\langle \partial e_i / \partial x, e_j \rangle$ et $\langle \partial e_i / \partial y, e_j \rangle$ sont dans l'espace de Lorentz $L^{(2,1)}_{\mathrm{loc}}(B^2)$, (pour des précisions sur ces espaces voir [S-W], [Z]).

Utilisation de l'équation d'Euler. Nous allons utiliser les notations complexes suivantes :

$$\mathcal{U} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{d}{d\bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$a_{ij} = \langle \frac{de_i}{d\bar{z}}, e_j \rangle = \frac{1}{2} \left[\langle \frac{\partial e_i}{\partial x}, e_j \rangle + i \langle \frac{\partial e_i}{\partial y}, e_j \rangle \right]$$

et $\alpha^i = < e_i, \mathcal{U} >$.

Exploitons le fait que $\mathrm{rot}\,\nabla u = 0$ et que $\mathrm{div}\,\nabla u = \Delta u$ est orthogonal dans $\mathbf{R}^k$ à $T_{u(x)}\mathcal{N}$. Ceci entraîne :

$$\langle e_i, \frac{d\mathcal{U}}{d\bar{z}} \rangle = 0 .$$

Developpons en utilisant $\mathcal{U} = \alpha^j e_j$, on trouve

$$\frac{d\alpha^i}{d\bar{z}} = a_{ij}\, \alpha^j$$

ou en adoptant la notation vectorielle $x = t(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $\mathcal{A} = (a_{ij})$:

$$\frac{d\alpha}{d\bar{z}} = \mathcal{A} \cdot \alpha \tag{4}$$

L'équation (4) admet des solutions bornées. On peut montrer en se restreignant si nécessaire à une boule plus petite que l'équation (4) possède des solutions bornées dans $L^\infty(\beta^2)$. On peut même construire n solutions $\beta_1, \dots, \beta_n$ à cette équation telles que, pour tout $z, (\beta_1(z), \cdots, \beta_n(z))$ soit une base sur $\mathbf{C}$ de $\mathbf{C}^n$. On utilise ici de façon cruciale le fait que $\mathcal{A}$ est dans $L^{(2,1)}_{\mathrm{loc}}(B^2)$, que le noyau $1/\pi z$ de l'opérateur $d/d\bar{z}$ est dans $L^{(2,\infty)}(B^2)$ et que $L^{(2,\infty)}$ et $L^{(2,1)}$ sont en dualité.

Conclusion : On multiplie l'équation par ${}^t\beta_j$ où β_j a été construit à l'étape précédente, on obtient

$$\begin{aligned} {}^t\beta_j \cdot \frac{d\alpha}{d\bar{z}} &= {}^t\beta_j \cdot \mathcal{A} \cdot \alpha = -\ {}^t(\mathcal{A} \cdot \beta_j) \cdot \alpha \\ &= -\ {}^t\left(\frac{d\beta}{d\bar{z}}\right) \cdot \alpha \end{aligned}$$

d'où $d^t(\beta_j \cdot \alpha)/d\bar{z} = 0$. Donc tous les ${}^t\beta_j \cdot \alpha$ sont holomorphes. Comme les β_i forment une base de $\mathbf{C}^n$, on en déduit que α est dans L^∞_{loc}, donc que u est localement lipschitzienne. ∎

Remarque : Dans [E], L.C. Evans réutilise l'idée de la preuve du théorème 1 dans le cas symétrique pour montrer que toute application faiblement harmonique et stationnaire d'un ouvert de $\mathbf{R}^m$ vers une sphère est régulière en dehors d'un ensemble dont la mesure de Hausdorff de dimension $m-2$ est nulle.

Bibliographie

[Mo] C. B. JR. MORREY, *The problem of Plateau on a Riemannian Manifold,* Ann. of Math. **49** (1948), 807-851. C. B. Jr. Morrey, *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*, Grundlehren 130 (Springer, Berlin, 1966).

[G] M. GRÜTER, *Regularity of weak H-surfaces,* J. Reine Angew. Math. **329** (1981), 1-15.

[Sc 1] R. SCHOEN, *Analytic Aspects of the Harmonic Maps Problem,* Math. Sci. Res. Inst. Publ.**2** (Springer, Berlin, 1984), 321-358.

[H-K-W] S. HILDEBRANDT, H. KAUL, K.-J. WIDMAN, *An Existence Theorem for Harmonic Mappings of Riemannian Manifolds,* Acta Math. **138** (1977), 1-16.

[S-U] J. SACKS, K UHLENBECK, *The Existence of Minimal Immersions of 2-spheres,* Ann. Math.**113** (1981), 1-24.

[Tr] N. S. TRUDINGER, *Remarks concerning the Conformal Deformation of Riemannian Structures on Compact Manifolds,* Ann. Sh. Norm. Pisa, III **22** (1968), 265-274.

[W] H. WENTE, *An Existence Theorem for Surfaces of Constant Mean Curvature,* J. Math. Anal. Appl. **26** (1969), 318-344.

[Hz] E. HEINZ, *Ein Regularitätssatz für schwache Lösungen nichtlinearer elliptischer Systeme,* Nachr. Akad. Göttinger II. Math. -Phys. Kl. **1** (1975), 1-13.

[Hl 1] F. HÉLEIN, *Régularité des applications faiblememt harmoniques entre une surface et une sphère,* C. R. Acad. Sci. Paris, **311**, Série I (1990), 519-524.

[Hl 2] F.HÉLEIN, *Regularity of Weakly Harmonic Maps from a Surface into a Manifold with Symmetries,* Manuscripta Math. **70** (1991), 203-218.

[Sc 2] R. SCHOEN, *A report on Some Recent Progress on Nonlinear Problems in Geometry,* prépublication.

[Hl 3] F. HÉLEIN, *Régularité des applications faiblememt harmoniques entre une surface et une variété riemannienne,* à paraître aux C.R. Acad. Sci. Paris.

[B-C] H. BREZIS, J.M. CORON, *Multiple solutions of H-systems and Rellich's Conjecture,* Commun. Pure Appl. Math. **37** (1984), 149-187.

[Ta] L. TARTAR, *Remarks on Oscillations and Stake's Equation,*in Lecture Notes in Physics **230**, *Microscopie Modelling of Turbulent Flows,* Proceedings Sophia-Antipolis 1984 Springer.

[Mu] S. MÜLLER, Proc. Amer. Math .Soc. **21** (1989), 245-248.

[C-L-M-S] R. COIFMAN, P.L. LIONS, Y. MEYER, S. SEMMES, *Compacité par compensation et espaces de Hardy,* C.R. Acad. Sci. Paris, **309**, Série I (1989), 945-949.

[Sh] J. SHATAH, *Weak Solutions and Development of Singularities of the* SU(2) *J. model,* Commun. Pure Appl. Math. **41** (1988), 459-469.

[C] Y. CHEN, *Weak Solutions to the evolution Problems of Harmonic Maps,* Math. Z.

[K-R-S] J. KELLER, J. RUBINSTEIN, P. STERNBERG, *Reaction-Diffusion Processes and Evolution to Harmonic Maps,* preprint.

[L-U] O. LADYZHENSKAYA, N. URAL'TSEVA, *Linear and quasilinear Elliptic Equations,* Academic Press New-York and London.

[S-W] E.M. STEIN, G. WEISS, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces,* Princeton Univ. Press, Princeton (1985).

[Z] W. P. ZIEMER, *Weakly Differentiable Functions,* graduate Texts in Math. Vol **120**, Springer-Verlag 1989.

[E] L. C. EVANS, *Partial Regularity for Stationary Harmonic Maps into Spheres,* prépublication.