Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

J.-M. Trepreau

Propagation dans les variétés *CR*

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1989-1990), exp. nº 17, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1989-1990____A19_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 601.596 F

Séminaire 1989-1990

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PROPAGATION DANS LES VARIETES CR

J.-M. TREPREAU

Exposé n°XVII

20 Mars 1990

Nous présentons dans cet exposé un résultat général de propagation pour les fonctions CR, analogue à celui qu'on obtiendrait, dans un cadre analytique réel, en appliquant le théorème de propagation de N. Hanges et J. Sjöstrand [5]. Nous indiquerons quelques applications. Pour le détail des énoncés et des démonstrations, nous renvoyons le lecteur à [11].

1. Les fonctions CR et leurs singularités.

Si M est une sous-variété réelle de $\mathbf{C}^n$ et z un point de M, l'espace des vecteurs antiholomorphes tangents à M en z est un sous-espace $T_z^{0,1}M$ de $\mathbf{C}T_zM$. M est une **variété** CR, de **dimension** CR p, si la dimension sur $\mathbf{C}$ de $T_z^{0,1}M$ est constante, égale à p. Alors, les sections de $T^{0,1}M$ sont les **champs** CR (pour Cauchy-Riemann) de M. M est **générique** si $TM + \sqrt{-1}TM = T\mathbf{C}^n|_M$. Si M est générique de codimension q, M est CR de dimension CR $p = n - q$.

Dans la suite, M **est une sous-variété générique de** $\mathbf{C}^n$, **de dimension** CR p **et de codimension** q, $p + q = n$.

Soit $Z_j = X_j + iX_{p+j}, j = 1, \cdots, p$, une base de champs CR sur M ; $X_1, \cdots, X_{2p}$ sont $2p$ champs de vecteurs réels indépendants. Une **fonction** CR sur M est une solution du système :

$$Z_1 u = 0, \cdots, Z_p u = 0 \; . \tag{1.1}$$

Nous considérerons le plus souvent des fonctions CR continues, mais les résultats s'étendent sans difficulté aux distributions quand M est régulière (cf. le théorème de représentation de [12]).

Localement, une transformation linéaire met M sous la forme $M = \{z \in \mathbf{C}^n, \Im z'' - G(z', \Re z'') = 0\}$ où $z = (z', z'') \in \mathbf{C}^p \times \mathbf{C}^q$ et G est nulle à l'ordre deux à l'origine. Un **wedge** en 0 dans la direction $\theta \in \mathbf{R}^q \setminus 0$ est alors un domaine de la forme $\mathcal{W} = \{z \in \mathbf{C}^n, \Im z'' - G(z', \Re z'') \in \Gamma$ et $|z| < \epsilon\}$ où Γ est un voisinage conique de θ dans $\mathbf{R}^q$. En général, on en déduit la notion de **wedge en** $(z, \theta) \in \dot{T}_M \mathbf{C}^n$, le fibré normal à M dans $\mathbf{C}^n$ (le point indique qu'on a enlevé la section nulle).

On obtient des fonctions CR en prenant la restriction ou plus généralement la valeur au bord sur M de fonctions holomorphes. Une fonction CR u est **prolongeable en** $z \in M$ si u se prolonge holomorphiquement près de z ; u est $\mathcal{W}$-**prolongeable** en (z, θ) si u se prolonge holomorphiquement à un wedge en (z, θ) ; u est $\mathcal{W}$-**prolongeable en** z si u est $\mathcal{W}$-prolongeable en au moins un (z, θ) ; u est **décomposable en** z si u est somme près de z de fonctions CR $\mathcal{W}$-prolongeables en z.

Dans les questions de prolongement et de propagation, les orbites du système $\{X_1, \cdots, X_{2p}\}$ jouent un rôle crucial. Si $z \in M$, l'orbite de z, notée $\mathcal{O}_M(z)$, définit en z un germe de sous-variété de M (voir [9]), dont la dimension est évidemment comprise entre le rang $2p$ du système de vecteurs et la dimension $2p + q$ de M. Si on remplace M par U, voisinage ouvert de z dans M, la dimension de $\mathcal{O}_U(z)$ ne peut que décroître avec U, donc est stationnaire. A la limite, on obtient un germe de sous-variété en z, l'orbite locale $\mathcal{O}_M(z, \mathrm{loc})$ de z. Voyons quelques exemples :

1) Si $q = n$, M est totalement réelle, il n'y a pas d'équations. Toute fonction est CR et les orbites se réduisent à un point. On montre que toute fonction est décomposable [2].

2) Si $q = 1$, M est une hypersurface. L'orbite locale de $z \in M$ est soit de dimension $2(n-1)$ (c'est une hypersurface complexe) soit de dimension $2n-1$ (c'est le germe de M). Dans tous les cas les fonctions CR sont décomposables en z [1], dans le second elles sont même $\mathcal{W}$-prolongeables en z [10].

3) Dans le cas général, dès que $p \geqq 1$, toutes les dimensions comprises entre $2p$($\mathcal{O}_M(z, \mathrm{loc})$ est un germe de p-variété complexe) et $2p+q$($\mathcal{O}_M(z, \mathrm{loc})$ est égale au germe de M) sont possibles pour les orbites ; la dimension $2p+q$ est "la plus courante".

A.E. Tumanov a démontré le résultat suivant :

Théorème.— *(A.E. Tumanov [13]) Si la dimension de $\mathcal{O}_M(z, \mathrm{loc})$ est $2p+q$, les fonctions CR sont $\mathcal{W}$-prolongeables en z*

L'analyse de Tumanov permet en fait la généralisation suivante :

Théorème 1.— *Si la dimension de $\mathcal{O}_M(z, \mathrm{loc})$ est $2p+q-s$, les fonctions CR ont un prolongement CR (près de z) sur une variété-coin $\tilde{M}$ de codimension s, d'arête M. De plus, au-dessus de $\mathcal{O}_M(z, \mathrm{loc})$, le tangent à $\tilde{M}$ est engendré par le tangent à M et le complexifié du tangent à l'orbite $\mathcal{O}_M(z, \mathrm{loc})$.*

On retrouve le théorème de Tumanov quand $s = 0$, on n'obtient rien quand $s = q$. Les fonctions CR singulières construites par M.S. Baouendi et L.P. Rothschild [3] montrent que ces énoncés sont optimaux.

Nous verrons que les orbites jouent un rôle aussi important dans la propagation. Donnons déjà un exemple (voir F. Trèves [12]) : l'analogue CR du théorème de Holmgren est vrai, donc aussi ses conséquences classiques, donc le support d'une fonction CR est une réunion d'orbites.

Soit $T^*_M\mathbf{C}^n$ le fibré conormal à M dans $\mathbf{C}^n$, de fibre en $z \in M$ l'espace des formes holomorphes ω telles que $\Im\omega_{|T_zM} = 0$. $T_M\mathbf{C}^n$ et $T^*_M\mathbf{C}^n$ sont naturellement en dualité. Pour analyser les directions de prolongement d'une fonction CR u, M.S. Baouendi, C.H. Chang et F. Trèves [2] ont introduit le front d'onde hypoanalytique WFu de u.

Dans [8], J. Sjöstrand a appliqué sa théorie des transformations FBI à cette notion. Rappelons les propriétés essentielles de WFu :

(1.2) WFu est une partie fermée conique de $\dot{T}^*_M\mathbf{C}^n$.

(1.3) u est $\mathcal{W}$-prolongeable en (z, θ) si et seulement si la fibre WF_zu est contenue dans l'intérieur du polaire de $\mathbf{R}^{+*}\theta$.

(1.4) Si $M \supset M'$ générique, $(WFu)|_{M'} = WF(u|_{M'})$.

La propriété (1.3) contient le théorème du Edge of the Wedge. Une conséquence évidente de (1.3) est que u est $\mathcal{W}$-prolongeable en z si et seulement si WF_zu est saillant, i.e. contenu dans un demi-espace ouvert. La propriété (1.4) est une version CR du théorème de micro Holmgren ; elle a comme conséquence, avec les mêmes notations, que u est $\mathcal{W}$-prolongeable en $z \in M'$ si et seulement si $u_{|M'}$ l'est.

Pour terminer cette introduction, notons que $T^*_M\mathbf{C}^n$ est naturellement isomorphe à la variété caractéristique Σ_M du système (1.1) par :

$$\theta : T^*_M\mathbf{C}^n \to \Sigma_M \ ; \ \theta(\omega) = i^*_M\omega$$

On peut donc aussi bien situer les singularités sur Σ_M, ce qui est souvent plus agréable. Par contre, (1.4) serait moins simple à écrire.

2. Propagation microlocale.

Dans la suite, N **est une sous-variété** CR **de** M**, de même dimension** CR p **que** M**, de codimension** $2p+r$, $r+s=q$.

Par définition, $T^{0,1}N = T^{0,1}M_{|N}$: les champs CR sont tangents à N et quand $z \in N, \mathcal{O}_N(z,\mathrm{loc})$ et $\mathcal{O}_M(z,\mathrm{loc})$ coïncident. On note :

$$\mathcal{L} = \theta^{-1}(T^*_N M) = T^*_M\mathbf{C}^n \cap iT^*_N\mathbf{C}^n$$

Nous utiliserons la propriété suivante :

Lemme.— *$\mathcal{L}$ est une sous-variété CR de $T^*\mathbf{C}^n$, de même dimension et même dimension CR que M.*

On peut donc parler des orbites de $\dot{\mathcal{L}}$ (on enlève la section nulle). Elles sont non-triviales dès que $p \neq 0$ (si $p = 0$ il n'y a pas de champ) et $s \neq 0$ (si $s = 0$, $\mathcal{L}$ est réduit à la section nulle).

Théorème 2.— *Si u est une fonction CR, $WFu \cap \dot{\mathcal{L}}$ est une réunion d'orbites de $\dot{\mathcal{L}}$.*

Si on traduit l'énoncé sur Σ_M, on trouve que $\theta(WFu) \cap \dot{T}^*_N M$ est invariant par les champs hamiltoniens $\hat{X}_j = H_{\sigma(X_j)}, j = 1, \cdots, 2p$, des symboles des champs X_j. Quand tout est analytique réel, c'est un cas particulier du théorème de Hanges-Sjöstrand [5].

Le théorème reste vrai pour une sous-variété CR $\mathcal{L}$ quelconque de $\dot{T}^*_M\mathbf{C}^n$ (voir [11]). Dans les applications, il est souvent utile d'appliquer le théorème à une sous-variété générique $M' \subset M$ et d'invoquer (1.4).

Je vais démontrer le théorème sous l'hypothèse simplificatrice que N est complexifiable, c'est à dire générique dans une sous-variété complexe $\hat{N}$ de $\mathbf{C}^n$. Alors, M de classe $\mathcal{C}^2$ suffit. En gros, la démonstration est la suivante : on transforme le problème par la théorie de Sjöstrand et on applique le théorème des 3 cercles, comme c'est classique dans ces questions (cf. J.M. Bony [4], dans un contexte CR, [6], [8]). La différence est qu'ici la feuille qui propage n'a pas en général de structure complexe. On se ramène à la situation standard en construisant un disque complexe qui a son bord dans la feuille.

Démonstration du Théorème 2 (quand N est complexifiable)

1ère étape : réduction par la théorie de Sjöstrand.

Après localisation, on peut supposer que les tangents en 0 à $M, N, \hat{N}$ sont $\mathbf{C}^p \times \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^s, \mathbf{C}^p \times \mathbf{R}^r \times \{0\}, \mathbf{C}^p \times \mathbf{C}^r \times \{0\}$. La phase $\varphi(z, \tilde{z}) = \frac{i}{2}(z - \tilde{z})^2$ est admissible (voir [8]). Lui est associée la transformation canonique complexe non homogène :

$$\chi : (z, \zeta) \mapsto (z + i\zeta, \zeta)$$

Localement χ transforme $\dot{T}^*_M \mathbf{C}^n$ en une variété étalée :

$$\mathcal{L}_M =: z \in \Omega, \zeta = \frac{2}{i}\frac{\partial \phi}{\partial z}(z)$$

où ϕ est réelle de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $H^{\mathrm{loc}}_\phi(\Omega)$ l'espace de Sjöstrand des fonctions $u(z, \lambda)$ sur $\Omega \times \mathbf{R}^+$, holomorphes en z et vérifiant pour tout compact $K \subset \Omega$, tout $\in > 0$, une estimation de la forme :

$$z \in K,\ \lambda > 0,\ |u(z, \lambda)| \leqq C e^{\lambda(\phi(z) + \in)}$$

avec $C = C(K, \in)$. Si $u \in H^{\mathrm{loc}}_\phi(\Omega)$ et $z_0 \in \Omega$, on note "$u \underset{\phi}{\sim} 0$ en z_0" si dans un voisinage K de z_0, u vérifie une estimation de la forme :

$$z \in K\ ,\ \lambda > 0,\ |u(z, \lambda)| \leqq C e^{\lambda(\phi(z) - \in)}$$

avec $\in > 0$. A la phase φ (et au choix d'une fonction troncature) est associée une transformation FBI $u \mapsto Tu \in H^{\mathrm{loc}}_\phi(\Omega), u$ fonction CR, dont la propriété fondamentale est de caractériser l'appartenance à WFu de $(z, \zeta) \in \dot{T}^*_M \mathbf{C}^n$, pour z petit. On a :

$$(z, \zeta) \notin WFu \Leftrightarrow Tu \underset{\phi}{\sim} 0 \quad \text{en} \quad z + i\zeta \tag{2.1}$$

Dans le cas qui nous occupe, χ transforme $\dot{T}^*_{\hat{N}} \mathbf{C}^n$ en une variété $\mathbf{C}$-lagrangienne étalée :

$$\mathcal{L}_{\hat{N}} =: z \in \Omega\ ,\ \zeta = \frac{2}{i}\frac{\partial H}{\partial z}(z)$$

où H est holomorphe. $\mathcal{L} = \dot{T}^*_M \mathbf{C}^n \cap i\dot{T}^*_N \mathbf{C}^n = \dot{T}^*_M \mathbf{C}^n \cap \dot{T}^*_{\hat{N}} \mathbf{C}^n$ est transformée en $\mathcal{L}_M \cap \mathcal{L}_{\hat{N}} = \mathcal{L}^\circ$ qui est de la forme :

$$\mathcal{L}^\circ =: z \in M^\circ, \zeta = \frac{2}{i}\frac{\partial \phi}{\partial z}(z)$$

avec M° de classe $\mathcal{C}^1$ et $\partial \phi_{|M^\circ} = \partial H_{|M^\circ}$. On sait (Lemme ci-dessus) que $\mathcal{L}^\circ$ a même dimension et même dimension CR que M. On vérifie qu'il en est de même pour M° qui est donc générique. D'après (2.1), on est ramené à étudier la propagation sur M° de la relation "$u \underset{\phi}{\sim} 0$ en z" quand $u \in H^{\mathrm{loc}}_\phi(\Omega)$. Comme H est holomorphe, on peut remplacer ϕ par $\phi - 2Re\ H$ et u par $ue^{-2\lambda H}$. Comme $d(\phi - 2\ ReH)_{|M^\circ} = 0$ il suffit de démontrer le lemme suivant :

Lemme.— *Soit M une sous-variété générique de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathbf{C}^n$ et ϕ une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$, s'annulant sur M à l'ordre 2. Si $u \in H_\phi^{\mathrm{loc}}(\Omega)$, l'ensemble $\{z \in M, u \underset{\phi}{\sim} 0$ en $z\}$ est une réunion d'orbites de M.*

2ème étape : construction d'un disque complexe.

Pour démontrer le lemme, il suffit de considérer la propagation non-caractéristique, i.e. de montrer que si $0 \in M$, si $\Sigma = \{h = 0\}$ est un germe d'hypersurface en 0 dans M, non caractéristique (ça suppose $p > 0$!) si u est un germe de fonction H_ϕ en 0, avec $u \underset{\phi}{\sim} 0$, dans $\Sigma_- = \{h < 0\}$, alors $u \underset{\phi}{\sim} 0$ en 0.

Suivant une technique classique en analyse complexe, on construit un disque complexe Z, c'est à dire $Z : \bar{D} = \{\tau \in \mathbf{C}, |\tau| \leq 1\} \to \mathbf{C}^n$ de classe $\mathcal{C}^\alpha$ (ici $\alpha > \frac{1}{2}$) et holomorphe dans D, avec les propriétés suivantes :

(2.2) Le bord ∂Z de Z est contenu dans M, i.e. : $Z(\tau) \in M$ si $|\tau| = 1$.

(2.3) $\|Z\|_{C^\alpha(\bar{D})}$ est petit.

(2.4) $Z(1) = 0$ et $Z(-1) = z_0 \in \Sigma_-$.

3ème étape : les 3 cercles

Après des normalisations triviales, on se ramène à montrer que si $u(z, \lambda)$, holomorphe pour $|z| \leq R$ vérifie :

$$|u(z,\lambda)| \leq e^{\lambda d(z,M)^2} \quad \text{pour tout} \quad z \;. \tag{2.5}$$

$$|u(z,\lambda)| \leq e^{-\lambda\epsilon} \quad \text{pour} \quad |z - z_0| \leq r \;. \tag{2.6}$$

alors :

$$|u(z,\lambda)| \leq e^{-\lambda\epsilon'} \quad \text{pour} \quad |z| \leq r' \;. \tag{2.7}$$

Soit Z le disque construit plus haut (assez petit) et ϕ un biholomorphisme de $\bar{D}$ tel que $\varphi(1) = 1$ et que $Z \circ \varphi$ envoie un disque $\delta\bar{D}$, $\delta > 0$, dans $\{|z - z_0| \leq r/2\}$. Nous noterons encore Z pour le disque composé $Z \circ \varphi$. Par construction, pour $z' \in \mathbf{C}^n, |z'| \leq R/2$, on a les estimations :

$$|\tau| = 1 \;:\; |u(Z(\tau) + z', \lambda)| \leq e^{\lambda |z'|^2} \quad \text{d'après (2.2), (2.5).}$$

$$|\tau| = \delta \;:\; |u(Z(\tau) + z', \lambda)| \leq e^{-\lambda\epsilon} \quad \text{d'après (2.6).}$$

Les 3 cercles donnent l'estimation :

$$\begin{aligned} \delta \leq |\tau| \leq 1 \;:\; |u(Z(\tau) + z', \lambda)| &\leq e^{\lambda(|z'|^2 - (\epsilon + |z'|^2)\frac{\log|\tau|}{\log\delta})} \\ &\leq e^{\lambda(|z'|^2 - \epsilon_1(1 - |\tau|))} \end{aligned}$$

avec $\in_1=\in / \log 1/\delta$. En particulier, quand $z' = o(\kappa^{1/2}), \kappa$ petit :

$$|u(Z(1-\kappa)+z',\lambda)| \leqq e^{-\lambda \in_2 \kappa}$$

Finalement, on décompose z, pour $|z| \leqq \kappa$, en :

$$z = Z(1-\kappa) + (z - Z(1-\kappa))$$

Alors $z' = o(\kappa^{1/2})$ car Z est de classe $C^\alpha, \alpha > \frac{1}{2}$, et $Z(1) = 0$. Pour $\kappa > 0$ assez petit, on obtient (2.7).

Remarque : Dans le cas général, on ne peut pas réduire autant la fonction ϕ. Au lieu d'une fonction holomorphe H, on se ramène à disposer d'une fonction H dont toutes les traces sur les variétés translatées $M + \eta$ sont CR, $\eta \in (T_M\mathbf{C}^n)_0$. Au lieu d'un disque, on construit une famille de disques Z paramétrée par M. Finalement, pour appliquer le raisonnement précédent, on prolonge holomorphiquement à chacun des disques $Z + \eta$ la restriction de H à son bord.

3. Application : fonctions CR indécomposables

Je me contenterai de donner un exemple (analytique réel ; c'est donc le théorème de Hanges-Sjöstrand qu'on utilise) pour montrer l'idée de la construction et des obstructions dimensionnelles. L'exemple que j'avais donné en 1985 correspond au cas $p = 1$, $r = 0$, $s = 2$ dans la généralisation ci-dessous. Pour d'autres résultats, voir [11].

L'idée est la suivante : avec les notations du §2, on choisit M et N de telle sorte que la fibre F en $z \in N$ de l'orbite de $(z,\zeta) \in \dot{T}^*_N M$ ne soit pas saillante. Cela suppose $p \geqq 1$ et $s \geqq 2$! Alors, si u est une fonction CR et si $(z,\zeta) \in WFu$, pour toute décomposition $u = u_1 + \cdots + u_N$ F coupe donc est contenu dans WFu_j pour un j ; ce u_j n'est pas $\mathcal{W}$-prolongeable en z (cf.(1.3)) donc u n'est pas décomposable en z.

Soit $M = \mathbf{C}^p \times \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^s$ (coordonnées $z', \bar{z}', x'', t$) muni de la structure CR formelle, réelle-analytique donc représentable, définie par les champs :

$$j = 1, \cdots, p-1 \quad Z_j = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$$
$$Z_p = \frac{\partial}{\partial \bar{z}p} + i \sum_{\alpha=1,\cdots,r} x_p^\alpha \frac{\partial}{\partial x_{p+\alpha}} + i x_p^{r+1}\Theta$$

où on a noté $z' = (x_1 + iy_1, \cdots, x_p + iy_p), x'' = (x_{p+1}, \cdots, x_{p+r})$, $t = (t_1, \cdots, t_s)$ et $\Theta = t_1 \frac{\partial}{\partial t_2} - t_2 \frac{\partial}{\partial t_1}$. Donc $p \geqq 1$ et $s \geqq 2$. On voit que $X_1, \cdots, X_{2p}$ et leurs crochets successifs engendrent $\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_{p+r}}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y_p}, \Theta$. L'orbite N de 0 est

$$N = \mathbf{C}^p \times \mathbf{R}^r \times \{0\}$$

Dans les coordonnées canoniques (z', x'', θ) de $T_N^* M$, on calcule les champs hamiltoniens :

$$j = 1, \cdots, p-1 \quad \hat{Z}_{j|T_N^*M} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$$
$$\hat{Z}_{p|T_N^*M} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_p} + i \sum_{\alpha=1,\cdots,r} x_p^\alpha \frac{\partial}{\partial x_{p+\alpha}} + i x_p^{r+1} \hat{\Theta}$$

où $\hat{\Theta} = \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_2} - \theta_2 \frac{\partial}{\theta_1}$. On voit que $\mathcal{L} = \dot{T}_N^* M \cap \{\theta_3 = \cdots = \theta_s = 0\}$ est une orbite : il y a des fonctions CR indécomposables en 0 (une distribution indécomposable est donnée par $u(z', x'', t) = 1(z', x'') \otimes \delta(t)$).

Remarque : Si $p = 1$ ou $p = n-1$, toute fonction CR est décomposable localement (voir §1). Du point de vue des dimensions, l'exemple précédent couvre donc tous les cas sauf $p \in \{1, \cdots, n-2\}, s = 1$.

4. Application : propagation locale.

Il s'agit d'étudier la propagation sur M de la relation "u est $\mathcal{W}$-prolongeable en z" ou, ce qui revient au même "$WF_z u$ est saillant". Soit $sg-\mathrm{supp}u$ (resp. $\mathcal{W}$-supp u) le complémentaire de l'ensemble des points $z \in M$ tels que u est prolongeable en z (resp. $\mathcal{W}$-prolongeable en z).

Quand $M \supset N$, p-variété complexe, $T_N^* M = \Sigma_{M|N}$ et le théorème 2 fournit des isomorphismes linéaires entre les fibres de $\Sigma_{M|N}$ qui échangent les fibres de $\theta(WFu)_{|N}$. Il y a donc propagation sur N de la relation "$WF_z u$ est saillant". Quand N est une variété complexe de dimension $\leqq p$, on se ramène au cas précédent en introduisant comme dans [6] une sous-variété générique M', $N \subset M' \subset M$ de dimension CR la dimension complexe de N et en invoquant (1.4). On obtient la généralisation au $\mathcal{W}$-prolongement du Théorème de N. Hanges et F. Trèves [6] :

Théorème 3.— *On suppose M de classe C^2. Si $\Lambda \subset M$ est une courbe complexe connexe, si u est une fonction CR sur M, prolongeable (resp. $\mathcal{W}$-prolongeable) en $z \in \Lambda$, u est prolongeable (resp. $\mathcal{W}$-prolongeable) en tout point de Λ.*

Dans le cas général, $T_N^* M$ est un sous-fibré propre de $\Sigma_{M|N}$ et le théorème 2 propage seulement la relation "$\theta(WF_z u) \cap \dot{T}_N^* M$ est saillant". On est sauvé par le Théorème 1 qui donne la majoration à priori qu'il faut de $WFu_{|N}$! On a encore :

Théorème 4.— *$\mathcal{W}$-supp u est une réunion d'orbites de M.*

Attention : le résultat serait faux pour sg-supp u !

Démonstration du théorème 4.

On se ramène à la propagation non caractéristique à travers une hypersurface Σ de M, en $z_0 \in \Sigma$: on suppose $WF_z u$ saillant quand $z \in \Sigma^-$, un côté de Σ, et on doit montrer que $WF_{z_0} u$ est saillant. Si $\mathcal{O}_M(z_0, \mathrm{loc}) = M$ dans les germes, il n'y a rien à démontrer (théorème de Tumanov). Soit donc $N = \mathcal{O}_M(z_0, \mathrm{loc})$; N coupe Σ^- dans les germes. On applique d'abord le théorème 1 : par déformation d'une intégrale $F.B.I$, on obtient qu'en

$z \in N$, $\theta(WF_z u)$ est contenu dans le polaire d'un cône ouvert non vide Γ_z de $T_z N$. On a alors :

(4.1) $\theta(WF_z u)$ est saillant si et seulement si $\theta(WF_z u) \cap \dot{T}^*_N M$ l'est.

La nécessité de la condition est triviale. Réciproquement, si $\theta(WF_z u)$ est non saillant, il existe $\alpha_1, \cdots, a_N \in \theta(WF_z u)$ de somme nulle. Comme $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ sont positifs sur Γ_z, ils sont nuls sur Γ_z donc sur $T_z N$: $\alpha_1, \cdots, \alpha_N \in \dot{T}^*_N M$.

Finalement, comme "$\theta(WF_z u) \cap \dot{T}^*_N M$ est saillant" se propage (Théorème 2), le théorème est démontré.

Références

[1] A. Andreotti, C.D. Hill, E.E. Levi Convexity and the Hans Lewy Problem I. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **26** (1972), p. 325-363.

[2] M.S. Baouendi, C.H. Chang and F. Trèves, Microlocal Hypo-Analyticity and Extension of CR-Functions. J. Differential Geometry **18** (1983) p.331-391.

[3] M.S. Baouendi and L.P. Rothschild, Cauchy-Riemann Functions on Manifolds of Higher Codimension in Complex Space (preprint, 1989).

[4] J.M. Bony, Propagation des singularités différentiables pour une classe d'opérateurs différentiels à coefficients analytiques. S.M.F., Astérisque, **34-35**, (1976), p.43-91.

[5] N. Hanges and J. Sjöstrand, Propagation of analyticity for a class of non-microcharacteristic operators. Annals of Math. **116** (1982), p.559-577.

[6] N. Hanges and F. Trèves, Propagation of holomorphic extendability of CR functions. Math. Ann. **263** (1983), p.157-177.

[7] J. Sjöstrand, Singularités analytiques microlocales S.M.F. Astérisque n° **95**, (1982).

[8] J. Sjöstrand, The FBI-transform for CR submanifolds of $\mathbf{C}^n$. Prépublications Mathématiques d'Orsay (Université Paris-Sud, Bât. 425, 91405 Orsay France) (1982).

[9] H.J. Sussmann, Orbits of families of Vector Fields and Integrability of Distributions. Transactions A.M.S., **180** (1973), p. 171-187.

[10] J.-M. Trepreau, Sur le prolongement holomorphe des fonctions CR définies sur une hypersurface réelle de classe C^2 dans $\mathbf{C}^n$. Invent. Math. **83**, (1986), p. 583-592.

[11] J.-M. Trepreau, Sur la propagation des singularités dans les variétés CR. A paraître dans le bulletin de la S.M.F.

[12] F. Trèves, Approximation and Representation of Functions and Distributions Annihilated by a system of complex vector fiels. Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques, Palaiseau (1981).

[13] A.E. Tumanov, Extending CR functions on manifolds of finite type to a wedge. Mat. Sbornik **136**, (1988), p. 128-139 (en russe) et Math. USSR sbornik **64** (1989) p. 129-140.

J.-M. TREPREAU
Université Paris VI
4, place Jussieu
75230 Paris cedex 05