O. Rey

Concentration des solutions d'équations elliptiques avec nonlinéarité critique

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1989-1990), exp. n° 12, p. 1-16

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1989-1990____A14_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 601.596 F

Séminaire 1989-1990

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

CONCENTRATION DES SOLUTIONS D'EQUATIONS ELLIPTIQUES AVEC NONLINEARITE CRITIQUE

O. REY

Exposé n°XII

23 Janvier 1990

Concentration des solutions d'equations elliptiques avec nonlinéarité critique

Olivier Rey

1 Introduction et résultats

Nous revenons dans cet article sur les problèmes du type

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} -\Delta u = u^p + f(x,u) & \text{sur } \Omega \\ u > 0 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où Ω est un ouvert régulier de $\mathbf{R}^N$, $N \geq 3$, $p = \dfrac{N+2}{N-2}$ et $f(x,u)$ est un terme d'ordre inférieur à u^p, c'est-à-dire

$$\frac{f(x,u)}{u^p} \to 0 \quad \text{quand } u \to +\infty$$

L'exposant p est critique du point de vue des injections de Sobolev, dans le sens où l'injection de $L^{p+1}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ est continue mais pas compacte. Il en résulte que la fonctionnelle associée au problème :

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1} - \int_\Omega F(x,u)$$

avec $F(x,u) = \int_0^\infty f(x,t)\,dt$, ne vérifie pas la condition de Palais-Smale : il existe des "points critiques à l'infini", correspondant à des phénomènes de concentration en certains points du domaine.

Dans ce qui suit, nous nous intéressons plus particulièrement au comportement asymptotique par rapport à ε des solutions du problème (P_ε)

$$(P_\varepsilon) \qquad \begin{cases} -\Delta u = u^p + \varepsilon f(x,u) & \text{sur } \Omega \\ u > 0 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

quand $\varepsilon > 0$ tend vers 0.

Pour certaines fonctions f, on peut démontrer l'existence et la multiplicité de solutions à (P_ε) pour ε assez petit—[BN1] [R1] [R2]. Par contre, pour $\varepsilon = 0$, le problème devient plus délicat, et nous savons, entre autre, que si Ω est étoilé il n'y a pas de solution. Par conséquent, des solutions de (P_ε) vont disparaître pour $\varepsilon = 0$, soit en tendant uniformément vers 0, soit en se concentrant de plus en plus autour de certains points jusqu'à une concentration infinie.

Dans le cas $f(x,u) = u$, par exemple, on a les résultats suivants :

(i) Si $N \geq 4$, et (u_ε) est une famille de solutions de (P_ε) qui se concentrent en un point $x_0 \in \overline{\Omega}$ quand $\varepsilon \to 0$, alors $x_0 \in \Omega$ et

$$\varphi'(x_0) = 0$$

où

$$\varphi(x) = H(x,x) \tag{1.1}$$

et H est la partie régulière de la fonction de Green du Laplacien sur Ω, notée G, *i.e.* :

$$H(x,y) = \frac{1}{|x-y|^{N-2}} - G(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \Omega^2 \tag{1.2}$$

(ii) Réciproquement, si $N \geq 5$ et si $x_0 \in \Omega$ est point critique non dégénéré de φ, il existe pour ε assez petit une famille de solutions de (P_ε) qui se concentrent en x_0 quand $\varepsilon \to 0$

(iii) Enfin, si $N \geq 5$, pour ε assez petit (P_ε) admet au moins autant de solutions que la catégorie de Ω, se concentrant quand $\varepsilon \to 0$ en des points critiques de φ.

Les mêmes résultats sont valables pour le problème

$$(P'_\varepsilon) \qquad \begin{cases} -\Delta u = u^{p-\varepsilon} \text{ sur } \Omega \\ u > 0 \quad \text{sur } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Nous disposons de plus d'estimations très précises de la forme et de la vitesse de concentration des fonctions u_ε quand $\varepsilon \to 0$—[H] [R3] [BP]

Nous allons ici démontrer des résultats relatifs au cas

$$f(x,u) = f(x) \qquad f \not\equiv 0$$

On note (Q_ε) le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1}u + \varepsilon f \text{ sur } \Omega \\ u = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

(on n'impose pas, dans un premier temps, à la solution u d'être positive), et $\tilde{f}$ la fonction définie par

$$\begin{cases} -\Delta\tilde{f} &= f \quad \text{sur } \Omega \\ \tilde{f} &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \qquad i.e.\ \tilde{f} = -\Delta_\Omega^{-1} f$$

Nous montrons les résultats suivants :

Théorème 1 (1) *Supposons $\tilde{f} \in C^2(\Omega)$. Soit $x_0 \in \Omega$ tel que*

(i) $\tilde{f}(x_0) > 0$

(ii) x_0 est un point critique non dégénéré de $x \to \dfrac{\tilde{f}(x)}{\varphi(x)^{1/2}}$

Alors il existe une famille (u_ε) de solutions de (Q_ε) qui se concentrent en x_0 quand $\varepsilon \to 0$, i.e.

$$|\nabla u_\varepsilon|^2 \to S^{N/2}\delta_{x_0}, \qquad |u_\varepsilon|^{p+1} \to S^{N/2}\delta_{x_0}$$

au sens des mesures, où δ_{x_0} désigne la masse de Dirac au point x_0 et

$$S = \inf_{\substack{u\in H_0^1(\Omega)\\ |u|_{p+1}=1}} \int_\Omega |\nabla u|^2$$

est la constante de Sobolev. Si $f \geq 0$ sur Ω, (i) est automatiquement satisfaite, et $u_\varepsilon > 0$ sur Ω.

(2) *Supposons $f \geq 0$, et $\tilde{f} \in C^1(\Omega)$. Pour ε assez petit, (Q_ε) a au moins autant de solutions strictement positives que la catégorie de Ω, se concentrant chacune quand $\varepsilon \to 0$ en un point critique de l'application $x \to \dfrac{\tilde{f}(x)}{\varphi(x)^{1/2}}$.*

Remarques

- Si $f \in W^{l,p}(\Omega)$, $lp > N$, alors $\tilde{f} \in C^2(\Omega)$. Si $f \in W^{l,p}(\Omega)$, $(l+1)p > N$, alors $\tilde{f} \in C^1(\Omega)$

- Les résultats du théorème fournissent des équivalents des résultats *(ii) (iii)* relatifs au cas $f(x,u) = u$. Il est probable que l'équivalent du résultat *(i)* est également vrai, où φ est remplacée par la fonction $x \to \dfrac{\tilde{f}(x)}{\varphi(x)^{1/2}}$

Notons qu'en ce qui concerne l'existence de solutions au problème (Q_ε) avec une hypothèse de régularité minimale sur f, *i.e.*$f \in H^{-1}(\Omega)$, on déduit d'un résultat de Brézis et Nirenberg [BN2] la proposition suivante, démontrée en appendice :

Proposition 1 *Pour $f \geq 0$ et ε assez petit, (Q_ε) a au moins deux solutions. L'une de ces solutions tend uniformément vers 0 quand $\varepsilon \to 0$.*

Corollaire : de la proposition et du théorème 1-(2) on déduit que si f est positive et suffisamment régulière ($i.e. \tilde{f} \in C^1(\Omega)$), (Q_ε) a pour ε assez petit au moins $\mathrm{cat}(\Omega) + 1$ solutions, dont l'une tend uniformément vers 0 et les autres se concentrent en des points critiques de la fonction $x \longrightarrow \dfrac{\tilde{f}(x)}{\varphi(x)^{1/2}}$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

L'étude du problème (Q_ε) nous permet également d'énoncer des résultats relatifs au problème

$$(Q'_\varepsilon) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= |u|^{p-1}u \quad \text{sur } \Omega \\ \quad u &= \varepsilon g \qquad\quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \qquad g \not\equiv 0$$

On obtient :

Théorème 2 *Les résultats du Théorème 1 et de la Proposition 1 valent pour le problème* (Q'_ε)*, en remplaçant dans les énoncés* f *par* g *et* $\tilde{f}$ *par* $\tilde{g}$*, où* $\tilde{g}$ *est la fonction définie par :*

$$\begin{cases} \Delta \tilde{g} = 0 \ \mathit{sur}\ \Omega \\ \ \tilde{g} = 0 \ \mathit{sur}\ \partial\Omega \end{cases}$$

En effet, si on opère dans (Q_ε) le changement de fonction inconnue

$$u = \tilde{u} + \varepsilon \tilde{f}$$

on est amené à considérer le problème équivalent

$$(\tilde{Q}_\varepsilon) \qquad \begin{cases} -\Delta \tilde{u} = (\tilde{u} + \varepsilon \tilde{f})^p \ \text{sur } \Omega \\ \quad \tilde{u} = 0 \qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

(où l'on note, pour simplifier, v^p à la place de $|v|^{p-1}v$).

En opérant dans (Q'_ε) le changement de variable

$$u = \tilde{u} + \varepsilon \tilde{g}$$

on est conduit au problème équivalent

$$(\tilde{Q}'_\varepsilon) \qquad \begin{cases} -\Delta \tilde{u} = (\tilde{u} + \varepsilon \tilde{g})^p \ \text{sur } \Omega \\ \quad \tilde{u} = 0 \qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

c'est-à-dire exactement $(\tilde{Q}_\varepsilon)$ dans lequel $\tilde{f}$ a été remplacé par $\tilde{g}$. Les résultats concernant (Q'_ε) se déduisent donc immédiatement de ceux relatifs à (Q_e).

Nous passons maintenant à la démonstration des théorèmes.

2 Démonstration des théorèmes

2.1 Notations

On introduit sur $H_0^1(\Omega)$ la fonctionnelle

$$J(\tilde{u}) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \tilde{u}|^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |\tilde{u} + \varepsilon \tilde{f}|^{p+1} \tag{2.1}$$

dont les points critiques sont solution de $(\tilde{Q}_\varepsilon)$.

On considère, pour $x \in \Omega$ et $\lambda > 0$ les fonctions

$$\delta_{\lambda,x}(y) = \frac{\lambda^{\frac{N-2}{2}}}{(1+\lambda^2|y-x|^2)^{\frac{N-2}{2}}} \tag{2.2}$$

ainsi que leurs projections $P\delta_{\lambda,x}$ sur $H_0^1(\Omega)$, définies par

$$\begin{cases} \Delta P\delta_{\lambda,x} = \Delta\delta_{\lambda,x} & \text{sur } \Omega \\ P\delta_{\lambda,x} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.3}$$

ou encore

$$P\delta_{\lambda,x} = \delta_{\lambda,x} - \varphi_{\lambda,x} \tag{2.4}$$

avec

$$\begin{cases} \Delta\varphi_{\lambda,x} = 0 & \text{sur } \Omega \\ \varphi_{\lambda,x} = \delta_{\lambda,x} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.5}$$

En développant l'expression de $\delta_{\lambda,x}$ sur $\partial\Omega$ pour λd grand, on obtient en appliquant le principe du maximum que

$$\varphi_{\lambda,x}(y) = \frac{1}{\lambda^{\frac{N-2}{2}}}H(x,y) + O\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{N+2}{2}}d^N}\right) \tag{2.6}$$

où $d = d(x,\partial\Omega)$ et H désigne la partie régulière de la fonction de Green.

Notons que pour tout x et tout λ

$$-\Delta(c_N\delta_{\lambda,x}) = (c_N\delta_{\lambda,x})^p \text{ sur } \mathbf{R}^N, \text{ avec } c_N = (N(N-2))^{\frac{N-2}{4}} \tag{2.7}$$

Soit, pour $\eta > 0$, le sous-ensemble de $H_0^1(\Omega)$

$$F_\eta = \{\alpha P\delta_{\lambda,x} \mid |\alpha - c_N| < \eta, \lambda d(x,\partial\Omega) > \frac{1}{\eta}\}$$

Il est démontré dans [BC] que si $u \in H_0^1(\Omega)$ est tel que $\mathrm{dist}_{H_0^1(\Omega)}(u, F_\eta) < \eta$, et η est assez petit, le problème

$$\text{Minimiser } |u - \alpha P\delta_{\lambda,x}|_{H_0^1} \text{ par rapport à } \alpha,\ \lambda,\ x$$

possède une solution unique dans l'ouvert défini par

$$|\alpha - c_N| < 4\eta, \qquad \lambda d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{4\eta}$$

Ceci nous permet de rechercher des points critiques de J en déterminant ceux de la fonctionnelle

$$(2.8) \qquad \begin{array}{rccc} K: & M & \rightarrow & \mathbf{R} \\ & (\alpha, \lambda, x, v) & \mapsto & J(\alpha P\delta_{\lambda,x} + v) \end{array}$$

où

$$(2.9) \qquad \begin{aligned} M = \Big\{ &(\alpha, \lambda, x, v) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^* \times \Omega \times H_0^1(\Omega) \mid v \in E_{\lambda,x}, |\alpha - c_N| < \eta_0, \\ &\lambda d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{\eta_0}, |v|_{H_0^1} < \nu_0 \Big\} \end{aligned}$$

η_0 et ν_0 étant certaines constantes strictement positives et

$$(2.10) \qquad E_{\lambda,x} = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid \langle v, P\delta_{\lambda,x} \rangle_{H_0^1} = \langle v, \frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial\lambda} \rangle_{H_0^1} = \langle v, \frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial x} \rangle_{H_0^1} = 0\}$$

Enfin $(\alpha, \lambda, x, v) \in M$ sera point critique de K si et seulement si il existe $(A, B, C) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$ tel que le système suivant soit vérifié :

$$(E) \qquad \begin{cases} (E.1) & \dfrac{\partial K}{\partial\alpha} = 0 \\ (E.2) & \dfrac{\partial K}{\partial\lambda} = B \displaystyle\int_\Omega \nabla \frac{\partial^2 P\delta_{\lambda,x}}{\partial\lambda^2} \nabla v + C \,.\, \int_\Omega \nabla \frac{\partial^2 P\delta_{x,\lambda}}{\partial\lambda \partial x} \nabla v \\ (E.3) & \dfrac{\partial K}{x} = B \displaystyle\int_\Omega \nabla \frac{\partial^2 P\delta_{x,\lambda}}{\partial\lambda \partial x} \nabla v + C \,.\, \int_\Omega \nabla \frac{\partial^2 P\delta_{x,\lambda}}{\partial x^2} \nabla v \\ (E.4) & \dfrac{\partial K}{\partial v} = AP\delta_{\lambda,x} + B \dfrac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial\lambda} + C \,.\, \dfrac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial x} \end{cases}$$

La démonstration du théorème nécessite un certain nombre de calculs. Nous n'en donnerons ici que les étapes principales, les détails en étant identiques à ceux déjà effectués dans [B] [R1] [R4]

2.2 Résolution du système (E)

C'est cette résolution qui va nous donner le premier résultat du Théorème 1. On s'intéresse d'abord à $(E.4)$. On développe K au voisinage de $v = 0$ en écrivant

$$J(\alpha P\delta_{\lambda,x} + v) = J(\alpha P\delta_{\lambda,x}) + F_{\alpha,\lambda,x}(v) + Q_{\alpha,\lambda,x}(v) + R_{\alpha,\lambda,x}(v)$$

avec F linéaire en v, Q quadratique, et R regroupant les termes d'ordre supérieur, c'est-à-dire

$$F_{\alpha,\lambda,x}(v) = -\int_\Omega (\alpha P\delta_{\lambda,x} + \varepsilon\tilde{f})^p v$$

$$Q_{\alpha,\lambda,x}(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \frac{p}{2}\int_\Omega (\alpha P\delta_{\lambda,x} + \varepsilon\tilde{f})^{p-1}v^2$$

et

$$R_{\alpha,\lambda,x}(v) = O(|v|_{H_0^1}^{\min(3,p+1)}) \qquad R'_{\alpha,\lambda,x}(v) = O(|v|_{H_0^1}^{\min(2,p)}) \qquad R''_{\alpha,\lambda,x}(v) = O(|v|_{H_0^1}^{\min(1,p-1)})$$

(où pour simplifier on note θ^q la fonction $|\theta|^{q-1}\theta$).

Il est prouvé dans [B] [R1] que la forme quadratique $Q_{\alpha,\lambda,x}$ est définie positive, avec un module de coercivité indépendant de α, λ, x, ε, si l'on suppose η_0 et ε assez petits. On peut encore écrire

$$\begin{array}{ll} F_{\alpha,\lambda,x}(v) = \langle f_{\alpha,\lambda,x}, v\rangle_{H_0^1} & f_{\alpha,\lambda,x} \in E_{\lambda,x} \\ Q_{\alpha,\lambda,x}(v) = \frac{1}{2}\langle A_{\alpha,\lambda,x}, v\rangle_{H_0^1} & A_{\alpha,\lambda,x} \in \mathcal{L}(E_{\lambda,x}) \end{array}$$

avec $A_{\alpha,\lambda,x}$ coercif, de module de coercivité indépendant de α, λ, x, ε. On en déduit, en appliquant le théorème des fonctions implicites à partir du point $(f,v) = (0,0)$, l'existence d'une fonction C^1 qui à tout $(\alpha, \lambda, x, \varepsilon)$ tel que

$$|\alpha - c_N| < \eta_0 \qquad \lambda d(x,\partial\Omega) > \frac{1}{\eta_0} \qquad \varepsilon < \varepsilon_0$$

η_0 et ε_0 assez petits, associe $\overline{v} \in E_{\lambda,x}$, $|\overline{v}|_{H_0^1} < \nu_0$, tel que $(E.4)$ soit vérifiée pour certains réels A, B, C, avec de plus

(2.12) $$|\overline{v}|_{H_0^1} = O(|f_{\alpha,\lambda,x}|_{H_0^1})$$

Or

$$\forall v \in E_{\lambda,x}, \quad \langle f_{\alpha,\lambda,x}, v\rangle_{H_0^1} = -\int_\Omega \left[(\alpha P\delta_{\lambda,x} + \varepsilon\tilde{f})^p - \alpha^p\delta_{\lambda,x}^p\right] v$$

puisque

$$\int_\Omega \delta_{\lambda,x}^p v = \frac{1}{N(N-2)}\int_\Omega \nabla\delta_{\lambda,x}\nabla v = 0$$

et le calcul nous donne alors, en utilisant (2.2) (2.4) (2.6), l'inégalité de Hölder et le théorème d'injection de Sobolev (comme dans [B] [R1])

(2.13) $$|f_{\alpha,\lambda,x}|_{H_0^1} = \begin{cases} O(\frac{1}{(\lambda d)^{N-2}} + \frac{\varepsilon}{\lambda^{\frac{N-2}{2}}} + \varepsilon^p) & \text{si } N < 6 \\ O(\frac{(\mathrm{Log}\lambda d)^{2/3}}{(\lambda d)^4} + \frac{\varepsilon(\mathrm{Log}\lambda d)^{2/3}}{\lambda^2} + \varepsilon^2) & \text{si } N = 6 \\ O(\frac{1}{(\lambda d)^{\frac{N+2}{2}}} + \varepsilon^p) & \text{si } N > 6 \end{cases}$$

et d'après (2.12) la même estimation pour $|\overline{v}|_{H_0^1}$.

Il nous reste maintenant à résoudre les équations restantes, c'est-à-dire le système formé par $(E.1)$ $(E.2)$ $(E.3)$. En posant

$$\rho = c_N - \alpha = (N(N-2))^{\frac{N-2}{4}} - \alpha \tag{2.14}$$

en utilisant (2.2) (2.4) (2.6) et l'estimation obtenue pour $\overline{v}$, on obtient à partir de (2.1) (2.8) :

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha}(\alpha, \lambda, x, \overline{v}) = -4N\Gamma_1 \rho + V_\alpha(\alpha, \lambda, x) \tag{2.15}$$

et

$$V_\alpha(\alpha, \lambda, x) = O\left[\rho^2 + \frac{1}{(\lambda d)^{N-2}} + \frac{\varepsilon}{\lambda^{\frac{N-2}{2}}} + \left(\frac{\varepsilon^2 \mathrm{Log}\lambda}{\lambda^2} \text{ si } N = 4; \frac{\varepsilon^2}{\lambda^2} \text{ si } N > 4\right) + \varepsilon^{2p}\right]$$

$$\frac{\partial K}{\partial \lambda}(\alpha, \lambda, x, \overline{v}) = -\frac{(N-2)^2}{2}\sigma_{N-1}\left[\frac{\alpha\varepsilon\tilde{f}(x)}{\lambda^{N/2}} - \frac{\alpha^2\varphi(x)}{\lambda^{N-1}}\right] + V_\lambda(\alpha, \lambda, x) \tag{2.16}$$

et

$$\begin{aligned} V_\lambda(\alpha,\lambda, x) = O\Bigg[& \frac{1}{\lambda^N d^{N-1}} + \frac{\varepsilon \mathrm{Log}\lambda}{\lambda^{\frac{N+4}{2}}} + \frac{|\rho|}{\lambda^{N-1} d^{N-2}} + \frac{|\rho|\varepsilon}{\lambda^{N/2}} + \frac{\varepsilon^p}{\lambda^{N/2}} + \frac{\varepsilon^{2p}}{\lambda} \\ & + \left(\frac{\varepsilon^2 \mathrm{Log}\lambda}{\lambda^3} \text{ si } N = 4; \frac{\varepsilon^2}{\lambda^3} \text{ si } N > 4\right) \\ & + \left(\frac{\varepsilon}{\lambda^{N-1} d^{N-2}} \text{ si } N < 6; \frac{\varepsilon(\mathrm{Log}\lambda d)^{2/3}}{\lambda^5 d^2} \text{ si } N = 6; \frac{\varepsilon}{\lambda^{\frac{N+4}{2}} d^{\frac{N-2}{2}}} \text{ si } N > 6\right)\Bigg] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial K}{\partial x}(\alpha, \lambda, x, \overline{v}) = N(N-2)\sigma_{N-1}\left[\frac{\alpha^2\varphi'(x)}{2\lambda^{N-2}} - \varepsilon\alpha\frac{\tilde{f}'(x)}{\lambda^{\frac{N-2}{2}}}\right] + V_x(\alpha, \lambda, x) \tag{2.17}$$

et

$$\begin{aligned} V_x(\alpha, \lambda, x) = O\Bigg[& \left(\frac{1}{\lambda^3 d^4} \text{ si } N = 4; \frac{1}{\lambda^N d^{N+1}} \text{ si } N > 4\right) + \frac{|\rho|}{\lambda^{N-2} d^{N-1}} + \frac{\varepsilon|\rho|}{\lambda^{\frac{N-2}{2}}} + \lambda\varepsilon^{2p} \\ & + \Big(\frac{\varepsilon}{\lambda^2 d^2} + \frac{\varepsilon \mathrm{Log}\lambda}{\lambda^3 d^3} + \frac{\varepsilon^2}{\lambda} \text{ si } N = 4; \frac{\varepsilon \mathrm{Log}\lambda}{\lambda^{7/2} d^3} + \frac{\varepsilon^2 \mathrm{Log}\lambda}{\lambda^2} + \frac{\varepsilon^{7/3}}{\lambda^{3/2}} \text{ si } N = 5; \\ & \frac{\varepsilon}{\lambda^{\frac{N+2}{2}} d^{\sup(4,N/2)}} + \frac{\varepsilon^p}{\lambda^{\frac{N-2}{2}}} \text{ si } N \geq 6\Big)\Bigg] \end{aligned}$$

où $\Gamma_1 = \int_{\mathbf{R}^N} \delta_{0,1}^{p+1}$ et $\sigma_{N-1} = \mathrm{mes}(S^{N-1})$.

Supposons maintenant que $x_0 = 0 \in \Omega$, $\tilde{f}(0) > 0$, et que 0 est point critique non-dégénéré de la fonction $x \to \dfrac{\tilde{f}(x)}{\varphi(x)^{1/2}}$.

On peut alors écrire

$$2\varphi(x)\tilde{f}'(x) - \tilde{f}(x)\varphi'(x) = Mx + o(|x|) \tag{2.18}$$

où M est une matrice inversible.

Nous supposerons dans la suite que x varie dans un voisinage $\mathcal{O}$ de 0, tel que

$$\forall x \in \overline{\mathcal{O}}, \quad \tilde{f}(x) > 0 \text{ et } \operatorname{dist}(\mathcal{O}, \partial\Omega) = d_0 > 0$$

Conformément à ce que nous suggère (2.16), on effectue le changement de variable

$$\frac{1}{\lambda^{\frac{N-2}{2}}} = \frac{\varepsilon \tilde{f}(x)}{\alpha\varphi(x)}(1+\xi) \tag{2.19}$$

où l'on impose *a priori* $|\xi| < 1/2$. Notons qu'alors nous avons

$$\frac{\partial K}{\partial \lambda}(\alpha, \lambda, x, \overline{v}) = \frac{(N-2)^2\sigma_{N-1}}{2}\frac{\alpha\varepsilon\tilde{f}(x)}{\lambda^{N/2}}\xi + V_\lambda(\alpha, \lambda, x)$$

et

$$\frac{\partial K}{\partial x}(\alpha, \lambda, x, \overline{v}) = -\frac{N(N-2)\sigma_{N-1}}{2}\frac{\varepsilon^2\tilde{f}}{\varphi^2(x)}Mx + O(\varepsilon^2|\xi|) + V_x(\alpha, \lambda, x)$$

ainsi que les évaluations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial K}{\partial \alpha} = O\left[|\rho| + \varepsilon^2\right] \\ \dfrac{\partial K}{\partial \lambda} = O\left[\varepsilon^{\frac{2N-2}{N-2}}(|\xi| + |\rho|) + \varepsilon^{\frac{2N}{N-2}}\right] \\ \dfrac{\partial K}{\partial x} = O\left[\varepsilon^2(|\xi| + |\rho| + |x|) + \left(\varepsilon^3 \text{ si } N = 4;\ \varepsilon^{\frac{2N}{N-2}}|\mathrm{Log}\varepsilon| \text{ si } N > 4\right)\right] \end{cases} \tag{2.20}$$

et

$$|\overline{v}|_{H_0^1} = O\left[\varepsilon^2 \text{ si } N < 6;\ \varepsilon^2|\mathrm{Log}\varepsilon|^{2/3} \text{ si } N = 6;\ \varepsilon^p \text{ si } N > 6\right] \tag{2.21}$$

Ces estimations vont nous permettre d'évaluer les réels A, B, C déterminés par $(E.4)$. En effet, si nous multiplions scalairement dans $H_0^1(\Omega)$ l'équation $(E.4)$ par respectivement $P\delta_{\lambda,x}$, $\dfrac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial\lambda}$, $\dfrac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial x}$, nous obtenons un système linéaire quasi-diagonal en A, B, C—

les coefficients s'évaluant par un calcul direct en utilisant (2.2) (2.4) (2.6) :

$$(2.22)\qquad \begin{cases} \langle P\delta_{\lambda,x}, P\delta_{\lambda,x}\rangle_{H_0^1} & = N(N-2)\Gamma_1 + O\left(\frac{1}{\lambda^{N-2}}\right) \\ \langle P\delta_{\lambda,x}, \frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial\lambda}\rangle_{H_0^1} & = O\left(\frac{1}{\lambda^{N-1}}\right) \\ \langle P\delta_{\lambda,x}, \frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial x_i}\rangle_{H_0^1} & = O\left(\frac{1}{\lambda^{N-2}}\right) \\ \langle \frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial\lambda}, \frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial\lambda}\rangle_{H_0^1} & = \frac{N(N+2)\Gamma_2}{\lambda^2} + O\left(\frac{1}{\lambda^{N}}\right) \\ \langle \frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial\lambda}, \frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial x_i}\rangle_{H_0^1} & = O\left(\frac{1}{\lambda^{N-1}}\right) \\ \langle \frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial x_i}, \frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial x_j}\rangle_{H_0^1} & = N(N+2)\Gamma_3\lambda^2\delta_{ij} + O\left(\frac{1}{\lambda^{N-2}}\right) \end{cases}$$

$$\Gamma_2 = \int_{\mathbf{R}^N} \delta_{0,1}^{p-1}\left(\frac{\partial\delta_{0,1}}{\partial\lambda}\right)^2 \quad \Gamma_3 = \int_{\mathbf{R}^N} \delta_{0,1}^{p-1}\left(\frac{\partial\delta_{0,1}}{\partial x_i}\right)^2$$

et le second membre étant donné par

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial K}{\partial v}, P\delta_{\lambda,x}\rangle_{H_0^1} &= \frac{\partial K}{\partial\alpha} \\ \langle \frac{\partial K}{\partial v}, \frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial\lambda}\rangle_{H_0^1} &= \frac{1}{\alpha}\frac{\partial K}{\lambda} \\ \langle \frac{\partial K}{\partial v}, \frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial x}\rangle_{H_0^1} &= \frac{1}{\alpha}\frac{\partial K}{\partial x} \end{aligned}$$

La résolution de ce système linéaire fournit

$$\begin{aligned} A &= O\left[|\frac{\partial K}{\partial\alpha}| + \frac{1}{\lambda^{N-3}}|\frac{\partial K}{\partial\lambda}| + \frac{1}{\lambda^N}|\frac{\partial K}{\partial x}|\right] \\ B &= O\left[\frac{1}{\lambda^{N-3}}|\frac{\partial K}{\partial\alpha}| + \lambda^2|\frac{\partial K}{\partial\lambda}| + \frac{1}{\lambda^N}|\frac{\partial K}{\partial x}|\right] \\ C &= O\left[\frac{1}{\lambda^N}|\frac{\partial K}{\partial\alpha}| + \frac{1}{\lambda^{N-1}}|\frac{\partial K}{\partial\lambda}| + \frac{1}{\lambda^2}|\frac{\partial K}{\partial x}|\right] \end{aligned}$$

ce qui nous permet d'évaluer les expressions

$$B\int_\Omega \nabla\frac{\partial^2 P\delta_{\lambda,x}}{\partial\lambda^2}\nabla\overline{v} + C\int_\Omega \nabla\frac{\partial^2 P\delta_{\lambda,x}}{\partial\lambda\partial x}\nabla\overline{v} = O\left[\left(\frac{|B|}{\lambda^2} + |C|\right)|\overline{v}|_{H_0^1}\right]$$

$$B\int_\Omega \nabla\frac{\partial^2 P\delta_{\lambda,x}}{\partial\lambda\partial x}\nabla\overline{v} + C\int_\Omega \nabla\frac{\partial^2 P\delta_{\lambda,x}}{\partial x^2}\nabla\overline{v} = O\left[\left(|B| + \lambda^2|C|\right)|\overline{v}|_{H_0^1}\right]$$

grâce à (2.20) et (2.21). On en déduit alors que le système formé par les équations $(E.1)$ $(E.2)$ $(E.3)$ est équivalent à

$$(E') \qquad \begin{cases} \rho = V_1(\varepsilon, \rho, \xi, x) \\ \xi = V_2(\varepsilon, \rho, \xi, x) \\ x = V_3(\varepsilon, \rho, \xi, x) \end{cases}$$

où V_1, V_2, V_3 sont des fonctions continues qui vérifient les estimations

$$\begin{cases} V_1 = O(\rho^2 + \varepsilon^2) \\ V_2 = O\left(|\rho| + \xi^2 + \varepsilon^{\frac{2}{N-2}}\right) \\ V_3 = O\left(|\rho| + |\xi| + \begin{cases} \varepsilon \text{ si } N = 4 \\ \varepsilon^{\frac{4}{N-2}}|\mathrm{Log}\varepsilon| \text{ si } N > 4 \end{cases} + o(|x|)\right) \end{cases}$$

Le théorème du point fixe de Brouwer montre que pour ε assez petit le système (E') admet une solution $(\rho_\varepsilon, \xi_\varepsilon, x_\varepsilon)$, qui vérifie de surcroît:

$$(2.23) \qquad \begin{cases} \rho_\varepsilon = O(\varepsilon^2) \\ \xi_\varepsilon = O\left(\varepsilon^{\frac{2}{N-2}}\right) \\ x_\varepsilon = O(\varepsilon^{\frac{2}{N-2}}) \end{cases}$$

On vérifie facilement que

$$(2.24) \qquad u_\varepsilon = \alpha_\varepsilon P\delta_{\lambda_\varepsilon, x_\varepsilon} + \overline{v}_\varepsilon + \varepsilon \tilde{f}$$

avec $\alpha_\varepsilon = c_N - \rho_\varepsilon$, $\dfrac{1}{\lambda_\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}} = \dfrac{\varepsilon \tilde{f}(x_\varepsilon)}{\alpha_\varepsilon \varphi(x_\varepsilon)}(1 + \xi_\varepsilon)$, et $\overline{v}_\varepsilon = \overline{v}_{\varepsilon, \alpha_\varepsilon, \lambda_\varepsilon, x_\varepsilon}$, solution par construction de (Q_ε), est telle que

$$|\nabla u_\varepsilon|^2 \to S^{N/2}\delta_0, \quad |u_\varepsilon|^{p+1} \to S^{N/2}\delta_0 \qquad \text{quand } \varepsilon \to 0$$

D'autre part, si $f \geq 0$, $u_\varepsilon > 0$ sur Ω. En effet, multipliant l'équation $-\Delta u_\varepsilon = |u_\varepsilon|^{p-1}u_\varepsilon + \varepsilon \tilde{f}$ par $u_\varepsilon^- = \max(0, -u_\varepsilon)$ et en intégrant sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon^-|^2 = \int_\Omega (u_\varepsilon^-)^{p+1} - \varepsilon \int_\Omega f u_\varepsilon^- \leq \int_\Omega (u_\varepsilon^-)^{p+1}$$

L'inégalité de Sobolev nous donne par ailleurs

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon^-|^2 \geq S \left(\int_\Omega (u_\varepsilon^-)^{p+1}\right)^{\frac{2}{p+1}}$$

et donc, soit $\int_\Omega (u_\varepsilon^-)^{p+1} \geq S^{N/2}$, soit $u_\varepsilon^- \equiv 0$. Or $u_\varepsilon^- \leq |\overline{v}_\varepsilon|$ et $|\overline{v}_\varepsilon|_{p+1} \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$. Par conséquent, pour ε assez petit, $u_\varepsilon^- \equiv 0$, et le principe du maximum fort montre que $u_\varepsilon > 0$ sur Ω. Ceci achève la démonstration de la première partie du théorème 1.

2.3 Catégorie du domaine et multiplicité des solutions

On va montrer la multiplicité des solutions à (Q_ε) en fonction de la catégorie du domaine Ω, en cherchant des solutions sous la même forme que précédemment.

Plus précisément, θ étant une constante strictement positive qu'on choisira ultérieurement, on définit pour $\varepsilon > 0$, $d > 0$ l'ouvert :

$$\mathcal{M}_{d,\varepsilon} = \Big\{(\rho,\lambda,x) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}_+^*\times\Omega \mid |\rho| < \theta\varepsilon^2,\ d(x,\partial\Omega) > d, \quad \frac{1}{\lambda^{\frac{N-2}{2}}} \in \Big]\frac{\varepsilon\tilde{f}(x)}{2c_N\varphi(x)}, \frac{3\varepsilon\tilde{f}(x)}{2c_N\varphi(x)}\Big[\Big\} \tag{2.25}$$

et sur $\mathcal{M}_{d,\varepsilon}$ la fonction

$$\mathcal{K}(\rho,\lambda,x) = K(\alpha,\lambda,x,\overline{v}) = J(\alpha P\delta_{\lambda,x} + \overline{v}) \tag{2.25}$$

avec $\alpha = c_N - \rho$, dont les points critiques fournissent des solutions de (Q_ε). Les dérivées premières de $\mathcal{K}$ sont données par

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{K}}{\partial\rho} = -\dfrac{\partial K}{\partial\alpha} \\ \dfrac{\partial\mathcal{K}}{\partial\lambda} = \dfrac{\partial K}{\partial\lambda} + \langle\dfrac{\partial K}{\partial v}, \dfrac{\partial\overline{v}}{\partial\lambda}\rangle_{H_0^1} \\ \dfrac{\partial\mathcal{K}}{\partial x} = \dfrac{\partial K}{\partial x} + \langle\dfrac{\partial K}{\partial v}, \dfrac{\partial\overline{v}}{\partial x}\rangle_{H_0^1} \end{cases} \tag{2.27}$$

Les dérivées premières de K ayant déjà été évaluées, il nous reste à estimer les produits $\langle\frac{\partial K}{\partial v}, \frac{\partial\overline{v}}{\partial\lambda}\rangle_{H_0^1}$ et $\langle\frac{\partial K}{\partial v}, \frac{\partial\overline{v}}{\partial x}\rangle_{H_0^1}$

Pour cela, écrivons $\frac{\partial\overline{v}}{\partial\lambda}$ sous la forme

$$\frac{\partial\overline{v}}{\partial\lambda} = w + aP\delta_{\lambda,x} + b\frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial\lambda} + c\frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial x} \tag{2.28}$$

avec $(a,b,c) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^N$ et $w \in E_{\lambda,x}$. On a alors

$$\begin{aligned} \langle\frac{\partial K}{\partial v}, \frac{\partial\overline{v}}{\partial\lambda}\rangle_{H_0^1} &= a\langle\frac{\partial K}{\partial v}, P\delta_{\lambda,x}\rangle_{H_0^1} + b\langle\frac{\partial K}{\partial v}, \frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial\lambda}\rangle_{H_0^1} + c\langle\frac{\partial K}{\partial v}, \frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial x}\rangle_{H_0^1} \\ &= a\frac{\partial K}{\partial\alpha} + \frac{b}{\alpha}\frac{\partial K}{\partial\lambda} + \frac{c}{\alpha}\frac{\partial K}{\partial x} \end{aligned} \tag{2.29}$$

Par ailleurs, si l'on multiplie scalairement dans $H_0^1(\Omega)$ (2.28) par respectivement $P\delta_{\lambda,x}$, $\frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial\lambda}$, $\frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial x}$, on obtient un système linéaire quasi-diagonal en a, b, c, dont les coefficients sont donnés par (2.22) et le second membre par

$$\begin{aligned}
\langle \frac{\partial \overline{v}}{\partial \lambda}, P\delta_{\lambda,x}\rangle_{H_0^1} &= -\langle \overline{v}, \frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial \lambda}\rangle_{H_0^1} &&= 0 \\
\langle \frac{\partial \overline{v}}{\partial \lambda}, \frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial \lambda}\rangle_{H_0^1} &= -\langle \overline{v}, \frac{\partial^2 P\delta_{\lambda,x}}{\partial \lambda^2}\rangle_{H_0^1} &&= O\left(\frac{|\overline{v}|_{H_0^1}}{\lambda^2}\right) \\
\langle \frac{\partial \overline{v}}{\partial \lambda}, \frac{\partial P\delta_{\lambda,x}}{\partial x}\rangle_{H_0^1} &= -\langle \overline{v}, \frac{\partial^2 P\delta_{\lambda,x}}{\partial \lambda \partial x}\rangle_{H_0^1} &&= O\left(|\overline{v}|_{H_0^1}\right)
\end{aligned}$$

étant donné que $\left|\frac{\partial^2 P\delta_{\lambda,x}}{\partial \lambda^2}\right|_{H_0^1} = O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$ et $\left|\frac{\partial^2 P\delta_{\lambda,x}}{\partial \lambda \partial x}\right|_{H_0^1} = O(1)$.

La résolution du système nous donne alors

$$\text{(2.30)} \qquad \begin{cases} a = O\left(\dfrac{|\overline{v}|_{H_0^1}}{\lambda^{N-1} d^{N-2}}\right) \\ b = O(|\overline{v}|_{H_0^1}) \\ c = O\left(\dfrac{|\overline{v}|_{H_0^1}}{\lambda^2}\right) \end{cases}$$

En utilisant le fait que $\varphi(x) \sim \dfrac{1}{(2d(x,\partial\Omega))^{N-2}}$ quand $d(x,\partial\Omega) \to 0$ ([R2]), on voit que sur $\mathcal{M}_{d,\varepsilon}$ on a $\dfrac{1}{\lambda^{\frac{N-2}{2}}} = O(\varepsilon d^{N-1})$ et donc, à partir de (2.15) (2.16) (2.17) on obtient

$$\text{(2.31)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial K}{\partial \alpha} = O(\varepsilon^2) \\ \dfrac{\partial K}{\partial \lambda} = O\left(\varepsilon^{\frac{2N-2}{N-2}} d^{\frac{N^2-2}{N-2}} + \varepsilon^{\frac{2N+2}{N-2}} d^{\frac{6N-6}{N-2}} + \varepsilon^{\frac{2N+6}{N-2}} d^{\frac{2N-2}{N-2}}\right) \\ \dfrac{\partial K}{\partial \lambda} = O\left(\varepsilon^2 d^{N-1} + \dfrac{\varepsilon^{\frac{2N+2}{N-2}}}{d^{\frac{2N-2}{N-2}}}\right) \end{cases}$$

De (2.29) (2.30) (2.31) on déduit finalement que

$$\text{(2.32)} \quad \langle \frac{\partial K}{\partial v}, \frac{\partial \overline{v}}{\partial \lambda}\rangle_{H_0^1} = O\left[|\overline{v}|_{H_0^1}\left(\varepsilon^{\frac{2(N-1)}{N-2}} d^{\frac{N(N-1)}{N-2}} + \varepsilon^{\frac{2(N+1)}{N-2}} d^{\frac{6(N-1)}{N-2}} + \varepsilon^{\frac{2(N+3)}{N-2}} d^{\frac{2(N-1)}{N-2}}\right)\right]$$

De la même manière on trouve que

$$\text{(2.33)} \quad \langle \frac{\partial K}{\partial v}, \frac{\partial \overline{v}}{\partial x}\rangle_{H_0^1} = O\left[|\overline{v}|_{H_0^1}\left(\varepsilon^{\frac{2(N-3)}{N-2}} d^{\frac{(N-4)(N-1)}{N-2}} + \varepsilon^{\frac{2(N-1)}{N-2}} d^{\frac{2(N-1)}{N-2}} + \frac{\varepsilon^{\frac{2(N+1)}{N-2}}}{d^{\frac{2(N-1)}{N-2}}}\right)\right]$$

(2.12) et (2.13) nous donnant de plus l'estimation

$$\text{(2.34)} \quad |\overline{v}|_{H_0^1} = O\left[\varepsilon^2 d^{N-1} + \varepsilon^p \text{ si } N < 6;\ \varepsilon^2(1 + |\mathrm{Log}\varepsilon|^{2/3} d^5) \text{ si } N = 6;\ \varepsilon^p \text{ si } N > 6\right]$$

Nous sommes maintenant en mesure d'évaluer les dérivées de $\mathcal{K}$ sur le bord de $\mathcal{M}_{d,\varepsilon}$. On voit facilement d'après (2.15) et (2.27) que pour d assez petit, puis ε assez petit, on a pour tout $(\rho, \lambda, x) \in \mathcal{M}_{d,\varepsilon}$

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \rho}(-\theta\varepsilon^2, \lambda, x) < 0 < \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \rho}(\theta\varepsilon^2, \lambda, x) \tag{2.35}$$

avec un bon choix de θ, indépendant de d et de ε. De même, en combinant (2.16) (2.27) avec (2.32) (2.34) obtient-on sous les mêmes conditions

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \lambda}(\rho, \frac{\varepsilon \tilde{f}(x)}{2c_N\varphi(x)}, x) < 0 < \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \lambda}(\rho, \frac{3\varepsilon \tilde{f}(x)}{2c_N\varphi(x)}, x) \tag{2.36}$$

Notons $\Omega_d = \{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) > d\}$ et $n(x)$ la normale sortante en $x \in \partial\Omega_d$ au bord de Ω_d. On a l'équivalence $\varphi'(x) \sim \frac{N-2}{2^{N-1}d^{N-1}}n(x)$ quand $d \to 0$ ([R2]), et $\tilde{f}'(x).n < 0$ pour d assez petit d'après le principe du maximum fort (f étant supposée positive). En combinant alors (2.17) (2.27) avec (2.33) (2.34) on obtient toujours sous les mêmes conditions

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial n}(\rho, \lambda, x).n(x) > 0 \qquad \forall x \in \partial\Omega_d \tag{2.37}$$

La théorie de Ljusternik-Schnirelman assure alors que $\mathcal{K}$ possède au moins autant de points critiques dans $\mathcal{M}_{d,\varepsilon}$ que la catégorie de $\mathcal{M}_{d,\varepsilon}$. Or cat $\mathcal{M}_{d,\varepsilon} = \operatorname{cat}\Omega_d$ et $\operatorname{cat}\Omega_d = \operatorname{cat}\Omega$ pour d assez petit, Ω étant supposé régulier.

On prouve comme précédemment que les solutions de (Q_ε) correspondantes sont strictement positives. Par construction, elles se concentrent chacune quand $\varepsilon \to 0$ autour d'un point de Ω , et le système (E) montre alors que ces points sont critiques pour la fonction $x \to \dfrac{\tilde{f}(x)}{\varphi(x)^{1/2}}$. Ceci achève la démonstration de la deuxième partie du Théorème 1.

Remarque

En combinant les estimations obtenues ici avec celles de [R1], on peut démontrer, si l'on considère le problème

$$(R_\varepsilon) \qquad \begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1}u + \varepsilon u + \varepsilon f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

les résultats suivants (en supposant f assez régulière) :

Si $N = 4, 5$, et si $x_0 \in \Omega$, $\tilde{f}(x_0) > 0$, est point critique non dégénéré de la fonction $x \to \dfrac{\tilde{f}(x)}{\varphi(x)^{1/2}}$

Si $N=6$, et si $x_0 \in \Omega$, $\tilde{f}(x_0) > -1/2$, est point critique non dégénéré de la fonction $x \to \dfrac{\tilde{f}(x)+1/2}{\varphi(x)^{1/2}}$

Si $N>6$, et si $x_0 \in \Omega$ est point critique non dégénéré de la fonction φ

alors il existe une famille (u_ε) de solutions de (R_ε) qui se concentrent en x_0 quand $\varepsilon \to 0$.

Si $f \geq 0$, ces solutions sont strictement positives.

Notons enfin que pour $N=5$, le même résultat vaut si x_0 est point critique non-dégénéré de $\tilde{f}$, avec $\tilde{f}(x_0)=0$.

Appendice

Preuve de la Proposition 1

H. Brézis et L. Nirenberg ont considéré dans [BN2] le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu(u+\varphi)^p & \text{sur } \Omega \\ u \geq 0 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où μ est un réel fixé, $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, $\varphi \not\equiv 0$.

Ils assurent l'existence de $\mu^* < +\infty$ tel que pour tout $\mu \in [0,\mu^*]$ il existe une plus petite solution régulière $\underline{u}(\mu)$ au problème, alors qu'il n'y a pas de solution pour $\mu > \mu^*$. Cette branche de solutions est obtenue en appliquant le théorème des fonctions implicites à partir du point $\underline{u}(0)=0$. De plus, pour $\mu \in [0,\mu^*[$, la première valeur propre du problème linéarisé en $\underline{u}(\mu)$ est positive, ce qui permet en utilisant le lemme du col de montrer l'existence d'une deuxième solution – régulière elle aussi.

Si l'on prend maintenant $f \in H^{-1}(\Omega)$, $f \geq 0$, et qu'on définit φ par

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = f \text{ sur } \Omega \\ \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

on a : $\varphi \in H_0^1(\partial\Omega)$, $\varphi > 0$, $\varphi \not\equiv 0$—et donc l'existence de deux solutions au problème

$$\begin{cases} -\Delta v = \mu v^p + f & \text{sur } \Omega \\ v > 0 & \text{sur } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où l'on a posé $v = u+\varphi$, ou encore, en posant $w = \mu^{\frac{1}{p-1}} v$, l'existence de deux solutions au problème

$$\begin{cases} -\Delta w = w^p + \mu^{\frac{1}{p-1}} f & \text{sur } \Omega \\ w > 0 & \text{sur } \Omega \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

pour $\mu \in]0,\mu^*[$, d'où le résultat recherché.