B. Helffer

Formes normales pour des opérateurs pseudodifférentiels semiclassiques en dimension 1

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1988-1989), exp. nº 2, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1988-1989____A2_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES
Unité associée au C.N.R.S. n° 169

ECOLE POLYTECHNIQUE
F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 691.596 F

Séminaire 1988-1989

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

FORMES NORMALES POUR DES OPERATEURS PSEUDODIFFERENTIELS SEMICLASSIQUES EN DIMENSION 1

B. HELFFER

Exposé n°II

22 Novembre 1988

Formes normales pour des opérateurs pseudodifférentiels semiclassiques en dimension 1 (d'après B.Helffer-J.Sjöstrand)

§ 0 Introduction

On se propose de présenter dans cet exposé quelques résultats obtenus en collaboration avec J.Sjöstrand qui nous ont été utiles dans l'étude de l'équation de Harper et qui ont sans doute un intérêt propre . Les démonstrations détaillées se trouvent dans $[\text{He-Sj}]_{2,3}$. Les formes normales sont apparues dans la théorie des équations aux dérivées partielles modernes simultanément avec l'apparition des Fourier-intégraux et ont été très utiles pour des questions touchant à la résolublité locale , la propagation des singularités , l'hypoellipticité . La démarche était en gros la suivante :

Etant donné un opérateur différentiel ou pseudodifférentiel sur $\mathbb{R}^n$ dont le symbole principal définie comme une fonction sur (un ouvert conique de) $T^* \mathbb{R}^n$ vérifie des hypothèses simples par exemple :

p réel avec $dp \neq 0$,

p complexe avec dRep et dImp indépendants et $\{ p,\bar{p}\} = ap + b\bar{p}$

p complexe avec dRep et dImp indépendants et $\{p,\bar{p}\} \neq o$

on trouvait une transformation canonique χ tel que $p \circ \chi$ (ou seulement $(cp)\circ\chi$ avec c elliptique) ait une expression plus simple par exemple :

$$q=\xi_n \ , \ q= \xi_n+i\, \xi_{n-1} \ , \ q = \xi_n+i\, x_n\, \xi_{n-1}$$

puis on quantifiait χ par un opérateur Fourier-intégral $\mathcal{F}$ tel que :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} C\, P\, \mathcal{F} &= D_{x_n} + A \\ &= D_{x_n} + i\, D_{x_{n-1}} + A \end{aligned}$$

$$= D_{x_n} + i\, x_n D_{x_{n-1}} + A$$

où A est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 0 . Toutes ces constructions sont microlocales en ce sens qu'elles ne sont valides que quand on travaille avec des distributions dont le front d'onde est localisé près d'un point de $T^* \mathbb{R}^n$. Une dernière étape est d'éliminer par conjugaison par un opérateur elliptique le terme A de sorte que l'on est ainsi ramené à l'étude de modèles : D_{x_n}, $D_{x_n} + i\, D_{x_{n-1}}$, $D_{x_n} + i\, x_n D_{x_{n-1}}$ microlocalement près de $x=0$, $\xi = (0, \quad ,1 ,0)$

Le problème étudié ici est analogue , mais on ne s'autorise pas de multiplication par un facteur elliptique . La question posée ici (avec en tête l'étude de problèmes spectraux : localisation des valeurs propres , constructions de quasi-modes) est :

Etant donné un opérateur essentiellement autoadjoint P , trouver une fonction C^∞ réelle f inversible et un opérateur unitaire U , tel que U^* f(P) U prend une forme simple .

Ici , les opérateurs P considérés sont des opérateurs pseudo-différentiels h-quantifiés (où h est un petit paramètre) associés à un symbole $p(x,\xi,h)$ dans une bonne classe (pour l'étude semi-classique de l'équation de Harper , la classe est celle des fonctions C^∞ bornées , ou même celle des symboles analytiques) par la quantification de Weyl, c'est à dire que , pour u dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$(Pu)(x) = (p^w(x,hD_x)u)(x) = (2\pi\, h)^{-n} \int e^{i\langle x-y,\xi\rangle/h}\, p((x+y)/2,\xi,h)u(y)\, dy\, d\xi$$

Il faut bien entendu donner un sens a ce type d'énonçé en précisant les notions de : vrai microlocalement , calcul fonctionnel , front d'onde . Le résultat ne sera en effet vrai que microlocalement ou aprés localisation de l'énergie .La théorie développée dans $[Sj]_1$ se trouve être très adaptée au cadre semi-classique . On trouvera cependant chez Guillemin-Sternberg [Gu-St] la notion d'ensemble de fréquence qui est la bonne notion de front d'onde pour des familles de distributions dépendant d'un petit paramètre (cf également le livre de D.Robert [Ro]) . On se limitera ici au cas n=1 et une des motivations de l'étude faite ici est l'étude de l'opérateur de Harper : $\cos(hD_x) + \cos x$. L'étude de cet opérateur fait apparaitre des problémes très différents selon les niveaux d'énergie considérés . En particulier les valeurs critiques de la fonction $(x,\xi) \to \cos\xi + \cos x$ jouent un rôle important .

Les deux cas qui seront traités seront le cas où le symbole a un minimum non-dégénéré et le cas ou le symbole a un point selle . Les deux théorèmes démontrés sont les suivants :

<u>Théorème 1</u> :

Soit $p(x,hD,h)$ un opérateur pseudodifférentiel analytique classique , d'ordre 0 , formellement autoadjoint , dont le symbole est défini dans un voisinage de (0,0) . Soit p le symbole principal et supposons que p a un minimum non-dégénéré en (0,0) de valeur critique 0 . Alors il existe un symbole analytique à valeurs réelles : $F(t,h) \approx \Sigma_0^\infty f_j(t)\, h^j$, défini pour t dans un voisinage de 0 , et un opérateur intégral de fourier analytique formel , unitaire , associé à une transformation canonique défini dans un voisinage de (0,0) et envoyant (0,0) sur lui même , tel que :

$$U^*F(P,h)\, U = P_0 = 1/2((hD)^2+x^2-h)$$

Ce théorème est démontré dans $[He-Sj]_2$. C'est une amélioration d'un énonçé de [He-Ro] écrit toutefois dans le cadre des symboles classiques "C^∞ ". Dans le cadre analytique , il faut aussi citer les travaux de F.Pham qui travaille avec les microfonctions (cf $[\mathrm{Ph}]_{1,2}$) , en liaison également avec des travaux d'Ecalle ou de Voros . Par rapport à $[\text{He-Ro}]_{2,3}$, un des points nouveaux est l'explicitation de la transformation unitaire par un opérateur intégral de Fourier , ce qui permet de bien connaitre les fonctions propres correspondant à des valeurs propres assez petites (i.e infèrieures à ε avec $\varepsilon > 0$ mais indépendant de h) . Comme corollaire immédiat du théorème 1 , on obtient en particulier que les petites valeurs propres d'un opérateur P dont le symbole p défini sur $T^*\mathbb{R}$ admet un unique minima en (0,0), vérifie les hypothèses du théorème dans un voisinage de (0,0) et tel que $p^{-1}([o,\varepsilon])$ est compact sont données modulo un $O(\exp(-\varepsilon_0/h))$ par $G(nh,h)$ où $G(t,h)$ est un symbole analytique inverse de F (i.e $G(F(t,h),h)=t$) .

Ces résultats ne sont pas directement applicables pour l'opérateur de Harper près du niveau d'énergie -2 ou +2 puisque le spectre n'est pas en général discret , mais une application microlocale du théorème montre que le spectre est concentré modulo un $O(\exp(-\varepsilon_0/h))$ près des valeurs données par le théorème . Dans le cadre "C^∞ " , les mêmes résultats sont vrais modulo $O(h^\infty)$.

<u>Théorème 2</u> :

Soit $p(x,hD,h)$ un opérateur pseudodifférentiel analytique classique , d'ordre 0 , formellement autoadjoint , dont le symbole est défini dans un voisinage de (0,0) . Soit p le symbole principal et supposons que p a un un point selle non-dégénéré en (0,0) de valeur critique 0 . Alors il existe un symbole analytique à valeurs réelles : $F(t,h) \approx \Sigma_0^\infty f_j(t)\, h^j$, défini pour t dans un voisinage de 0 , et un opérateur intégral de fourier analytique formel , unitaire , associé à une transformation canonique défini dans un voisinage de (0,0) et envoyant (0,0) sur lui même , tel que :

$$U^{*} F(P,h)\, U = P_1 = 1/2(xhD + hDx)$$

Ce théorème est démontré dans $[\text{He-Sj}]_3$. Il ne résout pas tel quel le problème spectral mais il explique la situation microlocalement près d'un point de branchement , ce qui est une étape dans l'étude du spectre de l'équation de Harper près de l'énergie 0 . Il pourrait être utile pour comprendre le spectre de $(hD)^2 + \cos x$ près du niveau d'énergie +1 ou le problème du sommet de la bosse entre deux puits (cf [Ge-Gr]) .

§1 Le cas d'un minimum non-dégénéré

On prend donc les hypothèses du théorème 1 et on travaille donc dans le cadre analytique ; on pourrait aussi travailler dans le cadre C^∞ (i.e. avec des symboles C^∞ mais modulo $O(h^\infty)$) mais nous ne préciserons pas la démonstration dans ce cadre (cf $[\text{He-Ro}]_{2,3}$, $[\text{He-Sj}]_2$) . Si on considère le symbole $p_0(x,\xi) = (1/2)(\xi^2 + x^2)$, le champ hamiltonien asssocié à p_0 est : $\xi\partial_x - x\partial_\xi$. Le flot Hamiltonien associé est pèriodique de pèriode $T_0 = 2\pi$ et le fait important est qu'il ne dépend pas du niveau d'énergie . Si on reprend le symbole p , alors , pour tout $E > 0$, le flot hamiltonien restreint à la surface d'énergie E est pèriodique de pèriode T(E) . Sous l'hypothèse : minimum non-dégénéré , T(E) se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de 0 et , après multiplication par un scalaire , on peut supposer que :

$T(E) = T_0 + O(E)$

Si f(t) vérifie : $f'(t) = T(t) / T_0$, on peut supposer en remplaçant p par f(p) que : $T(E) = T_0$.

On est maintenant amené à trouver une forme canonique pour des p dont toutes les trajectoires hamiltoniennes sont pèriodiques de pèriode T_0. Dans ces conditions , il existe une transformation canonique analytique réelle χ telle que $p\circ\chi$ soit $1/2\ (\xi^2+x^2)$. La version C^1 de ce lemme se trouve dans [Cdv] , [Cdv-V] . On est ainsi ramené à l'étude d'un opérateur pseudo-différentiel P de symbole principal p_0 défini microlocalement près de (0,0) . On a utilisé ici un calcul fonctionnel microlocal pour des opérateurs pseudo-différentiels analytiques (dans le cadre C^∞ , on peut travailler avec le calcul fonctionnel abstrait pour les opérateurs autoadjoints (cf [He-Ro])) . Si P est exactement un oscillateur harmonique P_0 , observons que :

$$e^{-iT_0P_0/h} = I$$

Dans le cas général , on peut construire , pour $|t| < \pi/2$, $e^{-itP/h}$ comme un opérateur fourier intégral analytique dont le noyau distribution est de la forme :

$$(2\pi h)^{-n} \int e^{i(\varphi(t,x,\xi)-y.\xi\ )/h} a(t,x,\xi,h)\ d\xi$$

avec $\varphi(t,x,\xi) = -\frac{1}{2}(x^2+\xi^2)\ \mathrm{tg}\ t + x\ \xi\ /\ \cos t$ et a symbole analytique formel , puis pour t quelconque on utilise la relation de groupe . On obtient alors $e^{2i\pi(P/h)}$ comme l'opérateur intégral de Fourier $(e^{i(\pi/4)P/h})^8$ et comme il est classique du fait que le flot hamiltonien associé au symbole principal de P p_0 est pèriodique c'est un opérateur pseudo-différentiel analytique formel , formellement unitaire , commutant avec P . Comme dans le cadre C^∞ (cf [He-Ro]) , on trouve alors un symbole analytique H(t,h) tel que :

$e^{(2i\pi/h)(P+hH(P,h))} = I$ au sens des opérateurs pseudodifférentiels analytiques formels dans un voisinage dans $T^*\mathbb{R}$ de (0,0) . On est ainsi ramené à l'étude d'une forme normale pour un opérateur pseudodifférentiel analytique formel qu'on notera toujours P , de symbole principal p_0 et vérifiant :

(*) $e^{2i\pi P/h} = I$

Cette propriètè implique que le symbole sous-principal de P (i.e le coefficient de h dans le développement du symbole de p : $p \approx \Sigma h^j p_j$) vérifie :

$$\int_0^{2\pi} p_1(x(t,y,\eta)\,,\,\xi(t,y,\eta)\,)\,dt = (\,2k+1)\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

où $(\,x(t,y,\eta),\,\xi(t,y,\eta))$ est la trajectoire hamiltonienne issue de (y,η) . Sous cette condition on peut trouver un opérateur pseudo-différentiel analytique formellement unitaire tel que par conjugaison par cet opérateur le nouvel opérateur P obtenu ait comme symbole principal p_0 et comme symbole sous principal $(k+1/2)$. Quitte à changer de P, on prend $k=-1$.

Dans une dernière étape , on montre que deux opérateurs qui ont même symbole principal et sous principal et qui vérifient tous les deux (*) sont conjugués par un opérateur pseudodifférentiel analytique formel V . On vérifie qu' on peut prendre : $V = U\,(U^*U\,)^{-1/2}$, avec $U = (I+R\,)$, et :

$$R = (i/h)\int_0^{2\pi} (1-(t/2\pi))\, e^{-it(P_0/h)}(P - P_0)\, e^{it\,(P/h)}dt$$

(notons que U répond à la question mais n'est pas nécessairement unitaire) . Ceci termine la démonstration du théorème 1 .

§2 le cas du point selle :

Ce cas présente beaucoup de similarités mais aussi quelques difficultés techniques supplémentaires .

On prend donc les hypothèses du théorème 2 et on travaille donc dans le cadre analytique . Commençons par étudier le cas modèle . Si on considère le symbole $p_0(x,\xi)=x\,\xi$ défini sur $\mathbb{C}^2$, le champ hamiltonien asssocié à p_0 est

$H_{p_0} = x\partial_x - \xi\partial_\xi$ et on a : $\exp(tH_{p_0})(x,\xi) = (e^t x, e^{-t}\xi)$, $t \in \mathbb{C}$.

Ce flot pèriodique de pèriode $T_0 = 2\pi i$. Si on considère le symbole p (qui après réduction peut être supposée de la forme $a(x,\xi)\ x\ \xi$ avec $a(0,0) = 1$), alors pour tout $E \neq 0$ le flot hamiltonien restreint à la surface d'énergie E est pèriodique de pèriode T(E) et on peut montrer que T(E) est holomorphe dans le disque pointé . Par ailleurs , par un argument de dilatation (qui nous ramène à l'étude d'une famille d'Hamiltoniens pour l'énergie 1) , on peut montrer que :

$T(E) = T_0 + O(E^{1/2})$. On en déduit que T(E) est holomorphe dans tout un voisinage de 0 et vérifie :

$T(E) = T_0 + O(E)$

Par ailleurs , comme p est réel , on peut vérifier que :

$T(\bar{E}) = -T(E)$

On cherche maintenant une transformation canonique réelle telle que $p \circ \chi = p_0$. Une condition nécessaire est évidemment que : $T(E) = T_0$. Pour réaliser cette condition , on procède comme au §1 , en remplaçant P par f(P) où f est une fonction réelle analytique définie par :

$$f'(E) = T(E)/T_0 \, , \, f(0) = 0$$

On est maintenant amené à trouver une forme canonique pour des p dont toutes les trajectoires hamiltoniennes sont pèriodiques de pèriode T_0 .

Pour cela , on observe que pour le modèle la courbe $\Gamma_0 = \{(x,\xi)\ ;\ x = \xi\}$ est invariante : $\exp((1/2)T_0 H_{p_0})\,\Gamma_0 = \Gamma_0$ et que tout point d'un voisinage U_0 de (0,0) dans $\mathbb{C}^2$ d'énergie non nulle peut être écrit sous la forme :

$(x,\xi) = \exp(t\ H_{p_0})\,\rho$ avec $\rho \in \Gamma_0$ (ρ est défini au signe près) . On construit pour p (qui est de la forme $a(x,\xi)\ x\ \xi$ avec $a(0,0) = 1$) , une courbe Γ complexifiée d'une courbe réelle analytique , tangente à Γ_0 en (0,0) et ayant les mêmes propriètés d'invariance que Γ_0 mais cette fois ci par rapport au flot de H_p. On note alors qu'il existe deux fonctions holomorphes q et q_0 définies respectivement sur Γ et Γ_0 telles que :

$p_{/\Gamma} = q^2$, $p_{0/\Gamma_0} = q_0^2$. On définit alors la transformation canonique χ :

$U_0\backslash p_0^{-1}(0) \to U\backslash p^{-1}(0)$, où U est un voisinage convenable de (0,0) par :

a) si $\rho \in \Gamma_0$, alors $\chi(\rho) \in \Gamma$ est donné par $q(\chi(\rho)) = q_0(\rho)$

b) Si $(x,\xi) = \exp(tH_{p_0})(\rho)$, comme ci-dessus , on pose

$\chi(x,\xi) = \exp(tH_p)(\chi(\rho))$

Il reste alors à vérifier que la définition a un sens , et qu'il y a un prolongement holomorphe de U_0 sur U , symplectique qu'on note encore χ .

La suite de la démonstration est très voisine de celle décrite au §1 . Le travail de préparation nous a permis de nous retrouver avec deux opérateurs P_0 et P de même symbole principal $x\,\xi$. Comme le flot est pèriodique de pèriode T_0 , on trouve formellement que

$e^{-iT_0P/h} = R$

où R est un opérateur pseudodifférentiel analytique elliptique de degré 0 . Il faut toutefois être soigneux dans la mesure où T_0 est maintenant complexe . Il est toutefois possible de définir l'opérateur $U_t = e^{-itP/h}$ comme un opérateur fourier intégral analytique défini par :

$U_tu(x) = (2\pi h)^{-1}\int e^{i(\varphi(t,x,\xi)-y.\xi)/h}a(t,x,\xi,h)\, u(y)dy\, d\xi$

où $\varphi(t,x,\xi) = e^{-t}x\,\xi$

Cet opérateur n'est plus défini sur les espaces L^2 mais sur des espaces à poids de Sjöstrand définis dans des voisinages complexes de 0 et l'intégrale est définie le long de contours convenables . Modulo ces problèmes de justification des objets formels introduits qui font appel à la théorie développée dans $[Sj]_1$, le reste de la démonstration suit étroitement la démarche du §1 .

§3 conclusion

Comme déjà mentionné , ces deux théorèmes ne sont qu'un des outils développés dans nos articles consacrés à l'équation de Harper ($[He\text{-}Sj]_{1,2,3}$) . D'autres formes normales sont utilisées dans ces articles , en particulier des formes normales pour des systèmes d'opérateurs pseudo-différentiels 2x2 dont le déterminant du symbole principal est négatif et admet un maximum non dégénéré nul en un point . Le modèle de l'oscillateur harmonique est alors remplaçé sous certaines hypothèses par un modèle de Dirac voisin de celui de symbole :

$$\begin{matrix} 0 & \xi + ix \\ \xi - ix & 0 \end{matrix}$$

Il est clair que la physique des solides offre de multiples problèmes de cette nature et que nous n'avons considéré jusqu'à présent que les plus simples .

Références

[A-M] R.Abraham , J.Marsden : Foundations of Mechanics
Benjamin/ Cumming publ. Co. (1978)

[Cdv] Y.Colin de Verdière:
Spectre conjoint d'opérateurs qui commutent , II le cas intégrable
Math. Z. 171 , 51-73 , (1980) (appendice)

[Cdv-V] Y.Colin de Verdière, J.Vey :
le lemme de Morse isochore , Topology 18 , 283-293 (1979)

[Gé-Gr] C.Gérard - A.Grigis :

Precise estimates of tunneling and eigenvalues near a potential barrier ,Journal of diff. equations , vol . 72 , n°1 , Mars 88 , p149-177

[Gu-St]V.Guillemin-S.Sternberg :

Geometric Asymptotics , Am.Math.Soc. Surveys , vol.14 (1977)

[He-Ro] B.Helffer-D.Robert :

[1] Asymptotique des niveaux d'énergie pour des hamiltoniens à un degré de liberté

Duke Math. Journal (1982) vol. 49 , n°4

[2]Calcul fonctionnel par la transformée de Mellin et applications

Journal of functional analysis , vol. 53 , n°3, oct . 1983 ,

[3]Puits de potentiel généralisés et asymptotique semi-classique annales de l'IHP(section physique théorique) ,vol.41 (1984) ,p.291-331

[He-Sj] B.Helffer,J.Sjostrand :

[1]Analyse semi-classique pour l'équation de Harper (avec application à l'étude de l'équation de Schrödinger avec champ magnétique) ; à paraître aux mémoires de la SMF 1988

[2]Analyse semi-classique pour l'équation de Harper II

preprint octobre 1988

[3]Analyse semi-classique pour l'équation de Harper III

preprint Orsay (avril 1988) , à paraître mémoires de la SMF

[4] On the link between the spectrum of the Schrödinger equation with magnetic field and Harper's equation

proc. of the conference in Holzhau (mars 1988)

[5] Equation de Schrödinger avec champ magnétique et équation de Harper ; preprint octobre1988

[Le] J.Leray :

Lagrangian Analysis and Quantum Mechanics ; MIT Press 1981

[Ma] V.P.Maslov :

Théorie des perturbations et Méthodes asymptotiques.

Dunod (1972)

[Ph] F.Pham :

[1] Exercice semi-classique

Actes du colloque "méthodes semi-classiques en mécanique classique " Publications de l'université de Nantes (1985)

[2]Resurgence , Quantized canonical transformations and multiinstanton expansions

à paraître dans Prospects in Algebraic Analysis RIMS Kyoto volume en l'honneur de Sato

[Ro] D.Robert :

Autour de l'approximation semi-classique

Progress in Mathematics n°68 Birkhäuser(1987)

[Sj] J.Sjöstrand :

[1]Singularités analytiques microlocales , Astèrisque 95 (1982)

[2]Résonances generated by non-degenerate critical points

Springer L.N. in Mathematics , n°1256 , 402-429