

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

F. LABOURIE

Existence et compacité d'immersions isométriques elliptiques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1987-1988), exp. n° 5,
p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1987-1988____A5_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1987-1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

*CENTRE
DE
MATHEMATIQUES*

Unité associée au C.N.R.S. n° 169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (France)

Tél. (1) 69.41.82.00

Télex ECOLEX 691.596 F

Séminaire 1987-1988

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

EXISTENCE ET COMPACITE D'IMMERSIONS ISOMETRIQUES ELLIPTIQUES

F. LABOURIE

Existence et compacité d'immersions isométriques elliptiques

François LABOURIE

De nombreux problèmes de type elliptique sur les surfaces reçoivent une interprétation en terme de géométrie complexe. Rappelons, par exemple, la représentation de Weierstrass pour les surfaces minimales ou les constructions twistorielles pour les applications harmoniques.

Dans cet article, nous nous intéresserons aux immersions isométriques elliptiques (ou localement convexes) d'une surface dans une variété de dimension 3. Par elliptique (resp. ϵ -elliptique), nous entendons simplement que le discriminant de la deuxième forme fondamentale est positif (resp. supérieur à un ϵ positif). Notre remarque initiale est que le 1-jet d'une telle immersion définit une courbe pseudo-holomorphe. Une telle interprétation va nous permettre de contrôler la façon dont dégénèrent ces immersions. L'un de nos outils fondamentaux est alors la généralisation du lemme de Schwarz par M.Gromov [G1].

Notre premier résultat est un résultat de compacité. Soit S une surface riemannienne à courbure supérieure à K_0 , et M une variété riemannienne compacte de dimension 3, à courbure strictement majorée par K_0 . Les variétés considérées sont éventuellement à bord.

Théorème A . *Soit A un réel positif, l'ensemble des immersions isométriques de S dans M d'intégrale de courbure moyenne bornée par A , est compact (ou vide) pour la topologie de la convergence C^∞ sur tout compact.*

Les théorèmes de ce type exigent habituellement une borne uniforme sur la courbure moyenne. Notre deuxième résultat, nous permet de décrire la façon dont dégénère une suite d'immersions:

Théorème B . *Soit (f_n) une suite d'immersions isométriques de S dans M , convergeant C^0 vers une application f_0 et ne convergeant pas C^∞ au voisinage d'un point x de S . Il existe alors une unique géodésique γ de S , passant par x , telle que f_0 est une isométrie de γ dans une géodésique de M .*

Réciproquement l'existence d'une telle géodésique entraîne que (f_n) ne converge pas C^∞ au voisinage de x .

L'énoncé complet du théorème précise la façon dont la géodésique apparaît (voir [L1]). Par ailleurs les énoncés généraux des théorèmes, autorisent les

Typeset by $\mathcal{A}_M\mathcal{S}$ -TEX

métriques sur S et M à varier et demandent seulement sans conditions sur la courbure que les immersions soient ϵ -elliptiques. Dans le cas où M est à courbure constante, le dernier théorème se généralise aux hypersurfaces (voir [L2]).

Donnons un exemple du phénomène décrit par ce théorème. On peut construire (voir [S]) une famille (f_n) d'immersions isométriques de la sphère moins deux points antipodaux dans $\mathbb{R}^3$. Chaque immersion f_n s'enroule alors n fois autour de l'axe des pôles, la limite étant un segment (figure 1).

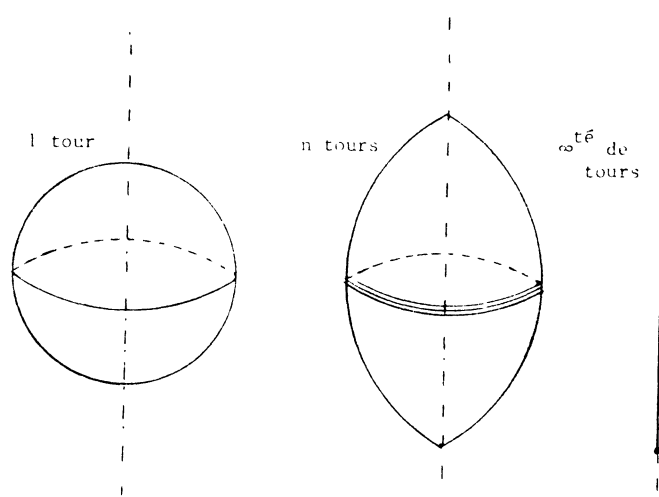


Figure 1

Contrôler la compacité de l'espace des solutions d'un problème elliptique est bien souvent l'un des points cruciaux de la démonstration de l'existence de telles solutions. Dans notre cas, nous avons, en particulier, obtenu le théorème d'existence d'immersions isométriques suivant:

Théorème C. *Soit M une variété simplement connexe de dimension 3 à courbure sectionnelle inférieure où égale à K_0 . Soit U un domaine orienté de la sphère muni d'une métrique complète et à courbure supérieure strictement à K_0 . Il existe alors un plongement propre isométrique, qui respecte l'orientation, de U dans M . On peut par ailleurs imposer arbitrairement le 1-jet de notre plongement en un point.*

Ce théorème généralise un théorème connu lorsque M est à courbure constante ([Po] p 38). Il généralise également un théorème de Pogorelov dans le cas U compact (c'est à dire la sphère), et dont nous proposons une nouvelle démonstration, sensiblement plus courte:

Théorème D (Pogorelov). *Soit M une variété de dimension 3 à courbure sectionnelle inférieure où égale à K_0 . Soit S une surface orientée, homéomorphe à la sphère et à courbure supérieure strictement à K_0 . Il existe alors une immersion isométrique, qui respecte l'orientation, de S dans M . On peut par ailleurs imposer*

le 1-jet de l'immersion en un point et, avec cette normalisation, l'immersion est unique.

Le but de notre exposé est d'essayer d'expliquer la façon dont s'introduisent et s'utilisent les techniques pseudo-holomorphes dans ce problème. Pour ce faire, nous énoncerons les résultats de la théorie des courbes pseudo-holomorphes, nous montrerons comment traduire notre problème dans ce langage et esquisserons les démonstrations. Nous ne ferons presque aucune démonstration, pour lesquelles nous renvoyons à [L1] dont ce papier n'est qu'un résumé.

Cet article s'organise de la façon suivante

1. Applications pseudo-holomorphes.
2. Rappel sur les immersions isométriques et description pseudo-holomorphe.
3. Idée de la démonstration des théorèmes de compacité.
4. Compacité et théorème de Pogorelov.

Je tiens à remercier ici M.Gromov pour son intérêt constant pour ce travail et P.Pansu pour m'avoir longuement expliqué les détails de la démonstration du théorème de compacité des courbes cusps de M.Gromov.

1 APPLICATIONS PSEUDO-HOLOMORPHES

Rappelons tout d'abord qu'une *structure presque complexe* sur une variété est la donnée d'un champ d'endomorphismes de carré -1 du fibré tangent. Une application *pseudo-holomorphe* entre deux variétés presque complexes est une application dont la différentielle commute avec les structures complexes. Enfin une *courbe pseudo-holomorphe* dans une variété presque complexe est une surface réelle dont le plan tangent est stable par rapport à la structure complexe.

De nombreux problèmes de types elliptiques peuvent alors s'interpréter en termes de courbes pseudo-holomorphes, comme par exemple les surfaces minimales, les surfaces à courbure moyenne constante, les applications harmoniques de surfaces. L'intérêt de cette notion provient d'un théorème de compacité de Gromov qui dit que d'une suite de courbes pseudo-holomorphes d'aire uniformément bornée, on peut extraire une sous-suite convergente modulo l'apparition de bulles. Plus précisément, si E est une variété presque complexe compacte, on définit une *courbe cusp* comme une réunion finie de surfaces de Riemann S_i identifiées en un nombre fini de points, et une famille finie d'applications pseudo-holomorphes f_i de S_i dans E respectant les identifications. Sur l'ensemble des courbes-cusps, on met une topologie qui, sans entrer dans les détails, fait qu'au voisinage de, par exemple, un couple de sphères identifiées en un point, on puisse trouver une sphère étranglée:

Le théorème de Gromov nous dit alors que l'ensemble des courbes-cusps d'aire bornée est compact. Pour plus de précisions et pour la démonstration, nous renvoyons à [B], [G1], [P].



Figure 2

Nous allons maintenant énoncer les trois lemmes de la théorie qui nous sont utiles. Le premier, une généralisation dans ce cadre du lemme de Schwarz par Gromov, est le lemme fondamental de la démonstration du théorème de compacité des courbes cusps. Il permet de faire converger une suite d'applications pseudo-holomorphes du disque. Les deux autres lemmes décrivent alors la limite.

1.1 Lemme de Schwarz.

Nous considérons une variété E munie d'une structure presque complexe J et d'une métrique hermitienne μ . Soit également g une application pseudo-holomorphe de D , le disque unité de $\mathbb{C}$, dans E . Le lemme est le suivant:

1.2 LEMME DE SCHWARZ (Gromov). *Si $g(D)$ est incluse dans un compact de E calibré, c'est-à-dire sur lequel il existe une 1-forme β telle que*

$$d\beta(x, Jx) > 0.$$

Alors g a ses dérivées à tous les ordres, à l'origine, a priori majorées.

Ce lemme est le résumé de la première partie du théorème de compacité des courbes cusps de Gromov tel qu'il est exposé dans [P]. Pour mieux comprendre la notion de calibrage, remarquons qu'un ouvert calibré ne peut contenir une courbe pseudo-holomorphe fermée.

En effet, si C est une telle courbe pseudo-holomorphe, la deux-forme $d\beta(x, Jy)$ définit une métrique sur C , d'élément d'aire $d\beta$. Son aire totale est nulle, d'où la contradiction.

1.3 Hypothèses. A l'aide du théorème d'Ascoli et du lemme de Schwarz, nous pourrions extraire des suites convergentes, C^∞ sur tout compact, d'applications pseudo-holomorphes. Nous nous intéresserons donc dans la suite de cette section à la situation suivante:

- (i) une variété E munie d'une suite (J_n) de structures presque complexes convergeant C^∞ vers J_0 ,
- (ii) une suite (f_n) d'applications pseudo-holomorphes de D dans (E, J_n) convergeant C^∞ sur tout compact vers f_0 , pseudo-holomorphe de D dans (E, J_0) ,
- (iii) nous supposons également que E est muni d'une suite (μ_n) de métriques hermitiennes convergeant vers μ_0 .

1.4 Singularités. Considérons $G_2(E)$, la grassmannienne des 2-plans tangents à E . Si maintenant f est une immersion d'une surface S dans E , on peut lui associer une application $\bar{f}$ de S dans $G_2(E)$ qui, à un point, associe le plan tangent à l'image. Nous avons alors

1.5 LEMME . *Si les hypothèses suivantes sont vérifiées:*

- (i) *les f_n sont des immersions,*
 - (ii) *$(\bar{f}_n)$ converge,*
 - (iii) *f_0 n'est pas constante,*
- alors f_0 est une immersion.*

1.6 Bord. On note dans ce paragraphe $f(\partial D)$, l'ensemble des points d'adhérence des suites $(f(x_n))$ lorsque (x_n) tend vers le bord du disque unité. Notre dernier lemme est alors

1.7 LEMME . *Si l'aire de $f_n(D)$ est uniformément bornée, alors $f_0(\partial D)$ est inclus dans la limite de Hausdorff des $f_n(\partial D)$.*

2 RAPPEL SUR LES IMMERSIONS ISOMÉTRIQUES ET DESCRIPTION PSEUDO-HOLOMORPHE.

Commençons par quelques rappels de géométrie riemannienne des surfaces [S]. Soit M une variété riemannienne de dim 3, dont ∇ est la connexion de Levi-Civita et R le tenseur de courbure, Soit également S une surface immergée dans M , n son champ de vecteur normal et u, v deux champ de vecteurs de S . On peut alors décomposer $\nabla_u v$ en sa partie tangente à S et sa partie normale

$$\nabla_u v = \nabla_u^T v + \text{II}(u, v)n,$$

alors ∇^T est la connexion de Levi-Civita $\bar{\nabla}$ de S pour la métrique induite sur TS , et II est un 2-tenseur symétrique. Il est alors facile de vérifier que $\text{II}(u, v) = (Au, v)n$ où $A(u) = -\nabla_u n$. L'opérateur A vérifie les deux équations suivantes

$$\begin{aligned} \det(A) &= k_S - k(TS) \\ (\bar{\nabla}_u A)(v) - (\bar{\nabla}_v A)(u) &= R(u, v)n \end{aligned}.$$

k_S désigne ici la courbure de S pour la métrique induite et $k(TS)$, la courbure sectionnelle du plan TS dans TM . La première de ces équations s'appellent équation de Gauss, la seconde équation de Codazzi-mainardi. Dans le cas où M est à courbure constante k_0 ces équations s'écrivent

$$\begin{aligned} \det(A) &= k_S - k_0 \\ (\bar{\nabla}_u A)(v) - (\bar{\nabla}_v A)(u) &= 0 \end{aligned}.$$

Ces deux équations décrivent alors bien les immersions isométriques dans le sens suivant. Si A est un opérateur symétrique sur une surface riemannienne S simplement connexe, vérifiant les deux équations précédentes, il existe alors une unique (aux isométries globales près) immersion isométrique de S dans l'espace simplement connexe à courbure constante k_0 , telle que A soit l'opérateur associé à la deuxième forme fondamentale.

Une surface *elliptique* (ou localement convexe) de M est une surface telle que $\det(A)$ est strictement positif, et en particulier II est une métrique. Cette condition est automatiquement réalisée par les conditions sur les courbures de S et M de nos résultats. On peut justifier la terminologie *elliptique* par le fait que l'opérateur différentiel (non linéaire) de Codazzi-mainardi agissant sur les champ d'opérateurs de déterminant constant positif (équation de Gauss) est elliptique. La terminologie *localement convexe* décrit la géométrie locale de nos surfaces lorsque M est $\mathbf{R}^3$.

Nous allons décrire le 1-jet d'une immersion isométrique d'une surface S dans une variété M de dimension 3. Ce jet est à valeur dans l'ensemble $E = \text{Isom}(TS, TM)$ des isométries linéaires de TS dans TM . Notre but est de munir un ouvert O de E d'une structure presque complexe telle que le 1-jet d'une immersion isométrique elliptique définisse une courbe pseudo-holomorphe de O .

Nous verrons aussi que d'autres courbes pseudo-holomorphes, les *surfaces de pli* s'introduisent naturellement (2.9.). Enfin en 2.10., nous établirons, à l'aide de Codazzi-Mainardi, l'équation que vérifie la courbure moyenne dans notre contexte.

2.1 Espace des immersions isométriques. Notre première étape va être de décrire E et plus particulièrement son espace tangent.

E est naturellement un fibré sur $S \times M$. On notera π_S et π_M , les projections sur S et M respectivement, pour simplifier, on notera leur différentielle de la même manière.

La fibre au point (s, m) est $Isom(T_s S, T_m M)$, l'ensemble des isométries de $T_s S$ dans $T_m M$. L'espace tangent à la fibre en un point g s'identifie à l'ensemble des applications linéaires f de $T_s S$ dans $T_m M$ qui vérifient

$$\langle f(u) \mid g(u) \rangle = 0$$

où u appartient à $T_s S$ et $\langle \mid \rangle$ désigne le produit scalaire de $T_m M$. Une telle f s'écrivant nécessairement $f = g \wedge v$, où v appartient à $T_m M$, cet espace tangent s'identifie canoniquement à $T_m M$.

On muni ce fibré de la connexion induite par les connexions de Levi-Civita sur S et M , on note alors π_F la projection sur l'espace tangent à la fibre qui s'en déduit.

Nous avons donc décomposé l'espace tangent à E en

$$T_{(s,m,g)} E = T_s S \oplus T_m M \oplus T_m M$$

à l'aide des projections π_S , π_M et π_F .

2.2 1-jet d'immersion isométrique. Soit maintenant f une immersion isométrique de S dans M . Nous noterons f_* la différentielle de f , $j^1 f$ son 1-jet, ∇ la connexion de M , n le vecteur normal à la surface $f(S)$ et J_0 la structure complexe naturelle sur $f_*(TS)$ induite par la métrique et l'orientation, donnée par $J_0(u) = n \wedge u$.

Nous allons maintenant décrire l'espace des vecteurs tangent à la surface $j^1 f(S)$ dans E .

2.3 PROPOSITION . *A l'aide de la décomposition précédente, cet espace se décrit comme l'ensemble des vecteurs de la forme*

$$v = (u, f_*(u), -J_0 \nabla_{f_*(u)} n)$$

où u désigne un vecteur de TS .

2.4 Cas elliptique. Dans le cas elliptique, la deuxième forme fondamentale est une métrique. On a alors

$$\nabla_{f_*(u)} n = \sqrt{k} J_0 J$$

où k est de la courbure de Gauss de la surface, et J désigne la structure complexe associée à la deuxième forme fondamentale et qui respecte l'orientation.

En particulier, nous avons

2.5 PROPOSITION . *L'espace tangent à $j^1 f(S)$ dans E est constitué des vecteurs de la forme*

$$v = (u, f_*(u), \sqrt{k} f_*(Ju))$$

où u désigne un vecteur de TS .

On remarquera que k est une fonction parfaitement définie sur E .

2.6 Structure presque complexe. Soit O l'ouvert de E constitué des points où la courbure de Gauss k est strictement positive. Nous allons munir O d'une structure presque complexe telle que $j^1 f(S)$ soit une courbe pseudo-holomorphe pour f elliptique.

Nous allons décomposer TE d'une nouvelle manière

$$\begin{aligned} T_g E &= V \oplus W \\ V &= \{G(u, v) = (u, g(u), \sqrt{k}g(v)); \forall u, v \in TS\} \\ W &= \{(u, -g(u) + \alpha n, \beta n)\} \end{aligned}$$

Munissons TE de la structure presque complexe

$$\begin{aligned} J|_V : G(u, v) &\mapsto G(v, -u) \\ J|_W : (u, -g(u) + \alpha n, \beta n) &\mapsto (J_0 u, -g(J_0 u) + \beta n, -\alpha n) \end{aligned}$$

En fait, la structure complexe sur W n'a aucune incidence sur la suite du problème. Munissons V de la métrique hermitienne μ

$$\mu(G(u_1, v_1), G(u_2, v_2)) = \sqrt{k} \langle u_1 | u_2 \rangle + \sqrt{k} \langle v_1 | v_2 \rangle,$$

où $\langle | \rangle$ désigne la métrique de S . On munit ensuite W de n'importe quelle métrique.

2.7 Courbes pseudo-holomorphes. Nous allons maintenant exhiber des courbes pseudo-holomorphes.

2.8 PROPOSITION . Si f est une immersion isométrique elliptique de S dans M , $j^1 f(S)$ est une courbe pseudo-holomorphe de O . De plus la structure presque complexe induite sur S est celle donnée par la deuxième forme fondamentale. L'aire ω induite est $H\omega_0$ où H désigne la courbure moyenne de l'immersion et ω_0 l'élément d'aire de la métrique initiale.

La preuve découle de 2.5.

Il existe d'autre courbes pseudo-holomorphes. Celles que nous allons définir maintenant nous seront utiles.

2.9 PROPOSITION, DÉFINITION . Soient $\gamma(t)$ une géodésique de S et $\Gamma(t)$ une géodésique de M , toutes deux paramétrées par l'arc. La surface $F = F(\gamma, \Gamma)$ de E constituée des isométries de $T_{\gamma(t)}S$ dans $T_{\Gamma(t)}M$ qui envoient $\frac{d\gamma}{dt}$ sur $\frac{d\Gamma}{dt}$, est une courbe pseudo-holomorphe. Nous l'appellerons Surface de pli .

A nouveau la preuve est immédiate.

2.10 Courbure moyenne et équation de Codazzi Mainardi. Soit H la courbure moyenne de notre immersion. Remarquons tout d'abord que la fonction $W = \frac{1}{H}$, définie sur $j^1 f(S)$, peut se définir également comme le déterminant de la projection sur S . L'équation de Codazzi-Mainardi va nous permettre de montrer le

2.11 LEMME . La fonction W est solution d'une équation du type

$$dW \circ J = W\beta + \pi_S^* \omega(-4kW^2 + 1),$$

où k est la courbure de Gauss, ω la forme de connexion du repère des directions principales et β une deux forme qui ne dépend que la projection orthogonale sur l'espace tangent à $j^1 f(S)$.

Nous avons alors le

2.12 COROLLAIRE . Il existe un opérateur elliptique du second ordre et une constante C , dépendant seulement de la projection orthogonale sur $Tj^1 f(S)$, tels que la fonction W est solution de l'inéquation

$$|L(W)| \leq C |W| \frac{|W| + |dW|}{|-4kW^2 + 1|}$$

Ce corollaire s'obtient en différenciant l'équation précédente. Nous allons le démontrer dans le cas particulier où S et M sont à courbure constante.

preuve: Soit A l'opérateur associé à la deuxième forme fondamentale, l'équation de Codazzi Mainardi, s'écrit dans notre cas particulier

$$\nabla_u A(v) - \nabla_v A(u) = 0.$$

Or $A = -\sqrt{k}J_0J$ Notre équation se réécrit, k étant ici constant

$$\nabla_u J(v) - \nabla_v J(u) = 0$$

Comme ∇J anticommute avec J , nous avons

$$(\nabla_{Ju}J)(v) - (\nabla_uJ)(Jv) = 0$$

En A , cela donne

$$(\nabla_{Ju}A)(v) - (\nabla_uA)(Jv) = 0$$

Nous allons prendre la trace de cette équation. Un bref calcul nous donne tout d'abord

$$tr((\nabla_uA)J) = (H^2 - 4k)\omega.$$

Nous avons donc

$$dH(Ju) = (H^2 - 4k)\omega.$$

ce qui donne en W

$$(1) \quad dW(Ju) = (4kW^2 - 1)\omega.$$

En différenciant cela donne, en notant Ω la forme de courbure de la métrique sur S

$$(2) \quad d(dW \circ J) = -8kW\omega \wedge dW + \Omega(-4kW^2 + 1)$$

Relevons maintenant sur $j^1f(S)$, et remarquons que puisque la courbure de S est bornée

$$(3) \quad |\pi_S^*\Omega| \leq C_1 |W|$$

En combinant (1),(2) et (3), on obtient

$$|d(dW \circ J)| \leq C \frac{|W| |dW|}{|1 - 4kW^2|}$$

q.e.d. ■

3 IDÉE DE LA DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES DE COMPACTITÉ.

Nous allons ici esquisser le schéma de la démonstration des théorèmes de compacité.

Nous sommes donc ramenés à la situation suivante: un fibré $E \rightarrow S$ muni d'une structure presque complexe et de fibre compacte, et une famille de sections g_n (ici les 1-jets de nos immersions isométriques) dont les graphes sont des courbes pseudo-holomorphes. les étapes de la démonstration s'organisent alors comme suit:

1. On commence par montrer qu'un voisinage de chaque fibre de la projection sur $S \times M$ est calibré. Ceci entraîne qu'il existe un voisinage de tout point de S dont l'image par nos sections est inclus dans un voisinage calibré.

2. On montre ensuite que pour tout point x de S et tout n , il existe un voisinage U_n homéomorphe au disque, tel que

- l'aire de $V_n = g_n(U_n)$ est uniformément bornée
- la distance de $g_n(x)$ au bord V_n est uniformément minorée.
- V_n est inclus dans un voisinage aussi petit que l'on veut de la fibre. Remarquons que dans le cas du théorème A, l'existence d'un tel voisinage est assurée par hypothèse.

3. On considère alors la représentation conforme h_n de D , disque unité de $\mathbb{C}$, dans V_n . D'après le lemme de Schwartz et la première étape, on peut alors extraire de la suite h_n une suite convergeant C^∞ vers une application pseudo-holomorphe h_0 . 4. Notre deuxième étape et le lemme 1.7. permettent alors d'assurer que h_0 n'est pas constante, par ailleurs il est facile de montrer (et ceci ne dépend pas de la géométrie du problème) que les hypothèses du lemme 1.5. sont vérifiées et donc que h_0 est une immersion.

5. Terminer la démonstration des théorèmes revient alors à montrer que, soit $h_0(D)$ est le graphe d'une section pseudo-holomorphe, soit h_0 est inclus dans une surface de pli 2.9. Pour cela, on commence par remarquer que la fonction $W_n = \frac{1}{H_n}$, où H_n est la courbure moyenne, est le déterminant de la projection de $g_n(S)$ sur S et donc converge vers une fonction W_0 . Montrer l'alternative précédente revient alors à montrer que soit W_0 (qui est une fonction positive ou nulle) est nulle, soit ne s'annule pas. Pour ce faire, on utilise l'équation de Codazzi-Mainardi (voir 2.12) en la différenciant, ce qui nous permet de montrer qu'il existe une famille L_n d'opérateurs elliptiques du deuxième ordre sans terme constant convergeant vers un opérateur L_0 et une constante C telles que au voisinage d'un point où W_0 s'annule

$$|L_n(W_n)| \leq C |W_n|,$$

et en particulier à la limite

$$|L_0(W_0)| \leq C |W_0|.$$

On conclut alors à l'aide du principe du maximum.

Cette dernière étape, utilise des calculs du même type que ceux que Nirenberg utilise pour obtenir une majoration a-priori de la courbure moyenne des immersions isométriques elliptiques de sphères dans l'espace Euclidien en fonction de la métrique. Une telle majoration étant la clef de sa démonstration d'existence. Dans les deux cas, on calcule le Laplacien associé à la deuxième forme fondamentale, de la courbure moyenne. Les calculs que nous avons faits sont alors une version locale des calculs de Nirenberg. Pogorelov utilise également dans sa démonstration d'existence, une majoration a-priori de la courbure moyenne très douloureuse à obtenir (une trentaine de pages), et qui utilise de façon cruciale le fait que nous immergions une sphère.

Remarquons pour finir que le phénomène ici décrit de perte de compacité est différent du phénomène de bulles, qui apparaît lors de l'étude par exemple des surfaces minimales ou harmoniques.

En effet, d'une part de telles bulles sont exclues à cause de notre première étape: Comme nous étudions des sections, les bulles sont incluses dans la fibre et le calibrage d'un voisinage de la fibre interdit l'existence de telles bulles. D'autre part, ce phénomène de bulles apparaît lorsque l'on majore uniformément l'aire (ici l'intégrale de la courbure moyenne), or dans le théorème B, l'aire devient infinie.

4 COMPACITÉ ET THÉORÈME DE POGORELOV.

Le schéma de la démonstration est celui, classique dans ce genre de problèmes, des démonstrations des théorèmes du même ordre par Nirenberg [N], Alexandrov ([Po] p 21) et Pogorelov ([Po] p 413).

On se donne donc

- une surface S orientée homéomorphe à la sphère, et un point s de S ,
- une variété riemannienne (M, g) de dimension 3,

On considère alors l'espace F , constitué des immersions f de S dans M telles que

- la métrique induite f^*g est à courbure supérieure strictement à K_0 ,
- f respecte l'orientation.

On considère l'espace G , constitué des métriques sur S à courbure supérieure strictement supérieure à K_0 et l'espace H constitué des couples (g_0, I) , où g_0 est un point de G et I est une isométrie de $(T_s S, g_0)$ dans TM .

Nous allons étudier l'opérateur P de F dans H qui, à une immersion, associe la métrique induite et le 1-jet de l'immersion en s :

$$P(f) = (f^*g, j^1 f(s)).$$

Plus précisément, nous allons montrer que P est un homéomorphisme. Pour cela, il nous suffit de montrer que

1. H est connexe,
2. P est un homéomorphisme local,

3. P est propre,
4. P est injectif.

Nous allons simplement donner ici une démonstration de 3. En effet, c'est surtout à cette partie de la démonstration de Pogorelov que nous avons apporté une amélioration. Nos résultats nous permettent d'éviter les longs calculs nécessaires à l'obtention d'une majoration a-priori de la courbure moyenne [Po] pp 351-365 et 401-413. Nous utiliserons ici le théorème E. On se donne donc une famille d'immersions (f_n) de S dans M telle que, d'une part, $(f_n(s))$ converge et, d'autre part, les métriques induites sont à courbure strictement supérieure à K_0 et convergent C^∞ vers une métrique g_0 . Nous voulons montrer qu'il existe une sous-suite C^∞ convergente.

Nous pouvons, tout d'abord, à l'aide du théorème d'Ascoli, extraire de (f_n) , une sous-suite convergeant C^0 vers une application f_0 , et notée de la même manière. Ensuite notre condition sur la courbure entraîne que

$$\text{diam}(f_n(S)) \leq C_0,$$

où C_0 vaut $+\infty$ si K_0 est négatif, et $\frac{2\pi}{\sqrt{K_0}}$ si K_0 est positif. Supposons maintenant que (f_n) ne converge pas C^∞ au voisinage d'un point x de S et notons $m = f_0(x)$. La surface S étant simplement connexe nous pouvons relever notre famille d'immersions f_n en des immersions $\tilde{f}_n$ de S dans la boule B de rayon C_0 de $T_m M$ munie de la métrique induite par l'exponentielle.

On applique maintenant le théorème B (avec les métriques variables) à la famille $\tilde{f}_n$. D'après ce théorème, cette suite ne convergeant pas C^∞ , il existe une géodésique γ pour g_0 , envoyée isométriquement par $\tilde{f}_0$ dans une géodésique γ de B . Nous aurions alors une géodésique complète de B passant par 0, or de telles géodésiques sont des droites, ce qui nous fournit la contradiction.

Remarquons pour finir, que la théorie pseudo-holomorphe s'avère également très utile pour traiter l'étape 2., et en particulier pour montrer que P est infinitésimalement inversible. Mais ceci est une autre histoire ([L1])

- [B] D.BENNEQUIN, *Problèmes elliptiques, surfaces de Riemann et structures symplectiques*, Séminaire Bourbaki, exposé No 657 (Fevrier 1986)
- [G1] M.GROMOV, *Pseudo-holomorphic curves on almost complex manifold*, Invent. Math. 82, (1985), pp. 307-347
- [L1] F.LABOURIE, *Immersion isométriques elliptiques et courbes pseudo-holomorphes*, à paraître
- [L2] F.LABOURIE, *Limite d'hypersurfaces localement convexes*, Inventiones Math., a paraître
- [N] L.NIRENBERG, *The Weyl and Minkowski problem in differential geometry in the large*, Comm. Pure Appl. Math., vol 6, No 3 (1953), pp. 337-394.

- [P] P.PANSU, *Notes sur la démonstration du théorème de compacité des courbes cusps de Gromov*, preprint, à paraître
- [Po] A.V.POGORELOV, *Extrinsic geometry of convex surfaces*, Israel program for scientific translation, Jerusalem (1973).
- [S] M.SPIVAK, *A comprehensive introduction to differential geometry*, Publish or Perish, Boston (1975).

F. LABOURIE
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91128 PALAISEAU Cedex
(France)