

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

E. ANDRONIKOF

**Microlocalisation tempérée. Application aux distributions
holonomes sur une variété complexe**

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1987-1988), exp. n° 2,
p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1987-1988__A2_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1987-1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

*CENTRE
DE
MATHEMATIQUES*

Unité associée au C.N.R.S. n° 169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (France)

Tél. (1) 69.41.82.00

Télex ECOLEX 691.596 F

Séminaire 1987-1988

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

MICROLOCALISATION TEMPEREE
APPLICATION AUX DISTRIBUTIONS HOLONOMES
SUR UNE VARIETE COMPLEXE

E. ANDRONIKOF

Résumé

Soit X une variété complexe lisse. Le foncteur $T-\mu \mathcal{H}om(\bullet, \mathcal{O}_X)$ version microlocale du foncteur $RH(\bullet)$ de Kashiwara est la version à croissance du foncteur $\mu \mathcal{H}om(\bullet, \mathcal{O}_X)$ de Kashiwara et Schapira et permet de construire les analogues tempérés des objets de [S-K-K] avec leurs opérations. Les transformations canoniques opèrent sur $T-\mu \mathcal{H}om(\bullet, \mathcal{O}_X)$. On montre alors que ces dernières permettent de microlocaliser le foncteur de conjugaison de Kashiwara pour en déduire que le front d'onde d'une distribution u sur X qui est solution d'un \mathcal{D}_X -module holonôme régulier coïncide avec la variété caractéristique de $\mathcal{D}_X u$.

0 -Introduction

0.1

Soit X une variété analytique complexe de dimension n . On désigne par \mathcal{O}_X le faisceau structural, \mathcal{D}_X le faisceau des opérateurs différentiels, Ω_X le faisceau des formes holomorphes de degré maximum, \bar{X} la variété conjuguée de X , $X_{\mathbf{R}}$ la variété analytique réelle sous-jacente.

Martineau [Ma] avait remarqué que le complexe de Dolbeault des distributions à support dans un sous-ensemble analytique fermé Z calculait la cohomologie à croissance à support dans Z des fonctions holomorphes, en d'autres termes

$$(0.1) \quad R\Gamma_{[Z]}\mathcal{O}_X = \Omega_{\bar{X}} \bigotimes_{\mathcal{D}_X}^L \Gamma_Z \mathcal{D}b_{X_{\mathbf{R}}}[-n]$$

où $\mathcal{D}b_{X_{\mathbf{R}}}$ désigne le faisceau des distributions sur $X_{\mathbf{R}}$. Supposons d'autre part que X soit complexifié d'une sous-variété M . Martineau a également essentiellement donné la formule

$$(0.2) \quad \mathcal{D}b_M = R\Gamma_{[M]}\mathcal{O}_X \otimes \text{or}_M[-n] \mid M ,$$

où or_M est le faisceau d'orientation de M , et où $R\Gamma_{[M]}\mathcal{O}_X$ se définit, par exemple, par des cocycles de fonctions holomorphes à croissance lente dans des tubes s'appuyant sur M , ou encore par la formule

$$(0.3) \quad R\Gamma_{[M]}\mathcal{O}_X = \Omega_{\bar{X}} \bigotimes_{\mathcal{D}_X}^L \Gamma_M \mathcal{D}b_{X_{\mathbf{R}}}[-n].$$

Plus généralement, Kashiwara a construit [K1],[K2], pour les besoins de la correspondance de Riemann-Hilbert un foncteur $RH_X(\bullet)$ et des opérations qui réalisent le cadre général pour l'étude de la cohomologie à croissance, et que l'on rappelle ci-dessous.

0.2

Soit M une variété analytique réelle, $D_{\mathbf{R}-c}^b(M)$ la catégorie dérivée de la catégorie des complexes bornés de faisceaux de \mathbf{C} -vectoriels sur M à cohomologie \mathbf{R} -constructible, $D^b(\mathcal{D}_M)$ la catégorie dérivée de la catégorie des complexes bornés de \mathcal{D}_M -modules. Le foncteur triangulé (contravariant) $TH_M(\bullet) : D_{\mathbf{R}-c}^b(M) \rightarrow D^b(\mathcal{D}_M)$ est caractérisé par les propriétés suivantes :

- (i) $\forall K$ fermé sous-analytique de M on a $TH_M(\mathbf{C}_K) = \Gamma_K \mathcal{D}_M$
- (ii) $\forall \Omega$ ouvert sous-analytique de M et $\forall U$ ouvert de M on a $R\Gamma(U; TH_M(\mathbf{C}_\Omega)) = S'_U(U \cap \Omega)$ l'espace des distributions sur $U \cap \Omega$ prolongeables à U .

0.3

Si X est une variété analytique complexe, le foncteur $RH_X(\bullet) : D_{\mathbf{R}-c}^b(X_{\mathbf{R}}) \rightarrow D^b(\mathcal{D}_X)$ est défini par $RH_X(F) = \Omega_{\bar{X}} \otimes_{\mathcal{D}_{\bar{X}}}^L TH_{X_{\mathbf{R}}}(F)[-n]$.

Alors, pour tout sous-ensemble sous-analytique fermé K de X on pose $R\Gamma_{[K]} \mathcal{O}_X = RH_X(\mathbf{C}_K)$ et cette définition est compatible aux formules (0.1) et (0.3).

Si $f : Y \rightarrow X$ est un morphisme de variétés complexes (lisses), on a le théorème fondamental d'image directe.

Théorème (Kashiwara [K2]).— Soit $F \in \text{Ob}(D_{\mathbf{R}-c}^b(Y_{\mathbf{R}}))$ tel que f soit propre sur $\text{supp } F$. On a un isomorphisme canonique

$$Rf_* \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \otimes_{\mathcal{D}_Y}^L RH_Y(F) \right) [\dim_{\mathbf{C}} Y] \simeq RH_X(Rf_* F) [\dim_{\mathbf{C}} X].$$

Alors si M est une variété analytique réelle de complexifié X et si j désigne l'injection $j : M \hookrightarrow X$ on a pour tout $F \in \text{Ob}(D_{\mathbf{R}-c}^b(M))$,

$$TH_M(F) \simeq RH_X(j_* F) \otimes_{\text{or}_M[n]} |_M,$$

et pour $F = \mathbf{C}_M$ on retrouve la formule (0.2).

C'est le foncteur $RH_X(\bullet)$ que l'on a microlocalisé dans [A1] sur le modèle des constructions "sans condition de croissance" de [K-S1].

1. Microlocalisation à croissance [A1]

Soit X une variété analytique complexe de dimension $\dim_{\mathbb{C}} X = n$,
et soit $F \in \text{Ob}(D_{\mathbf{R}-c}^b(X_{\mathbf{R}}))$.

Si Y est une sous-variété complexe de X on pose

$$(1.1) \quad T-\mu_Y RH_X(F) \stackrel{\text{def}}{=} s^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} \bigotimes_{D_{\tilde{X}}}^L RH_{\tilde{X}}(p^! F_{\Omega}) \right) [1].$$

où $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ est la déformation au cône normal le long de Y , s l'immersion $s : T_Y X \hookrightarrow \tilde{X}$
et $\Omega = z^{-1}(\mathbf{R}_+ \setminus \{0\})$, où z est la coordonnée complexe de \tilde{X} .

Soient q_j la j -ième projection de $X \times X$ et $\Delta = \Delta_X$ la diagonale de $X \times X$. On pose

$$(1.2) \quad T-\mu \mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_X) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}_{X \leftarrow X \times X}^{q_1} \bigotimes_{D_{X \times X}}^L T-\mu_{\Delta} RH_{X \times X}(q_2^{-1} F)[n],$$

ce qui définit un foncteur (contravariant)

$$T-\mu \mathcal{H}om(\bullet, \mathcal{O}_X) : D_{\mathbf{R}-c}^b(X_{\mathbf{R}}) \rightarrow D_{\text{coni}}^b(T^* X_{\mathbf{R}})$$

où $D_{\text{coni}}^b(T^* X_{\mathbf{R}})$ désigne la catégorie dérivée des complexes bornés de faisceaux sur $T^* X$
à cohomologie \mathbf{R}^{\times} -conique. $T-\mu \mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_X)$ est aussi un objet de la catégorie dérivée
de la catégorie des complexes bornés de $\pi^{-1} \mathcal{D}_X$ -Modules, où π désigne $\pi : T^* X \rightarrow X$.

Rappelons alors que

$$(1.3) \quad \text{supp}(T-\mu \mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_X)) \subset SS(F)$$

où $SS(F)$ désigne le micro-support de F ([K-S]).

$$(1.4) \quad T-\mu \mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_X) |_{T_X^* X} \simeq RH_X(F),$$

qu'on a un triangle de Sato

$$(1.5) \quad F^* \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow RH_X(F) \rightarrow R\overset{\circ}{\pi}_* T-\mu \mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{+1}$$

où $\overset{\circ}{\pi} = \pi |_{\overset{\circ}{T^* X}}$ ($\overset{\circ}{T^* X} = T^* X \setminus T_X^* X$), et $F^* = R\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(F, \mathbb{C}_X)$, et un morphisme
canonique

$$(1.6) \quad T-\mu \mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_X) \rightarrow \mu \mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_X)$$

où $\mu \mathcal{H}om(\bullet, \bullet)$ est le foncteur de Kashiwara - Schapira (loc. cit).

Si M est une sous-variété réelle de X on pose

$$(1.7) \quad T - \mu_M \mathcal{O}_X \stackrel{\text{def}}{=} T - \mu \mathcal{H}om(\mathcal{C}_M, \mathcal{O}_X)$$

dont le germe en $p \in T_M^* X$ est $(T - \mu_M \mathcal{O}_X)_p = \varinjlim \{ H_{[Z]}^j \mathcal{O}_{X,x} ; x = \pi(p), Z \text{ fermé sous-analytique de } X \text{ tel que } C_M(Z)_x \subset \{v \in (T_M X)_x ; \langle v, p \rangle > 0\} \cup \{0\}\}$. Si X s'identifie à un complexifié de M , alors $T - \mu_M \mathcal{O}_X$ est concentré en degré n (ce résultat est essentiellement dû à Martineau, mais on peut également le déduire des opérations, cf.[A2]), et on pose

$$(1.8) \quad \mathcal{C}_M^f \stackrel{\text{def}}{=} H^n(T - \mu_M \mathcal{O}_X) \otimes \text{or}_M,$$

i.e. on retrouve le sous-faisceau de \mathcal{C}_M des microfonctions tempérées.

Soit maintenant Z une sous-variété complexe de X de codimension d , alors $T - \mu_Z \mathcal{O}_X$ est concentré en degré d , et (1.6) induit une injection sur la cohomologie en degré d , et on pose

$$(1.9) \quad \mathcal{C}_{Z|X}^{\mathbf{R},f} \stackrel{\text{def}}{=} H^d(T - \mu_Z \mathcal{O}_X)$$

qui est un sous-faisceau du faisceau $\mathcal{C}_{Z|X}^{\mathbf{R}} = H^d(\mu_Z \mathcal{O}_X)$.

Le faisceau des opérateurs microlocaux tempérés est alors

$$(1.10) \quad \mathcal{E}_X^{\mathbf{R},f} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}_{\Delta|X \times X}^{\mathbf{R},f} \otimes_{q_2^{-1} \mathcal{O}_X} q_2^{-1} \Omega_X \quad (\text{cf. Paragraphe 2}) \quad .$$

2. Opérations - [A1],[A2] -

Soient X et Y deux variétés analytiques complexes.

(2.1) (Image directe).

Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme analytique et $F \in \text{Ob}(D_{\mathbf{R}-c}^b(Y_{\mathbf{R}}))$. On suppose f propre sur $\text{supp} F$. Alors on a un morphisme canonique

$$(2.1.1) \quad R\varpi_1 \rho^{-1} \left(D_{X \leftarrow Y} \otimes_{D_Y}^L T - \mu \mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_Y) \right) [\dim_{\mathbf{C}} Y] \\ \rightarrow T - \mu \mathcal{H}om(Rf_* F, \mathcal{O}_X) [\dim_{\mathbf{C}} X]$$

On a désigné par ρ et ϖ les applications $T^* Y \xleftarrow{\rho} Y \times_X T^* X \xrightarrow{\varpi} T^* X$.

(2.2) (Image inverse).

Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme analytique et $F \in \text{Ob}(D_{\mathbf{R}-c}^b(X_{\mathbf{R}}))$. On a un morphisme canonique

$$(2.2.1) \quad R\rho_! \left(\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \bigotimes_{\mathcal{D}_X}^L \varpi^{-1} T - \mu \mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_X) \right) [dim_{\mathbf{R}} X] \\ \rightarrow T - \mu \mathcal{H}om(f^! F, \mathcal{O}_Y) [dim_{\mathbf{R}} Y]$$

(2.3) (Produit externe).

Soit $F \in \text{Ob}(D_{\mathbf{R}-c}^b(X_{\mathbf{R}}))$ et $G \in \text{Ob}(D_{\mathbf{R}-c}^b(Y_{\mathbf{R}}))$. On a un morphisme canonique

$$(2.3.1) \quad T - \mu \mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_X) \hat{\otimes} T - \mu \mathcal{H}om(G, \mathcal{O}_Y) \rightarrow T - \mu \mathcal{H}om(F \hat{\otimes} G, \mathcal{O}_{X \times Y})$$

où $\hat{\otimes}$ désigne, dans le terme de gauche, le produit tensoriel externe de $\mathcal{D}_{X \times Y}$ -modules et, dans le terme de droite, le produit tensoriel externe de faisceaux ([S-K-K],[K-S1]).

(2.4) (Transformation à noyau intégral).

Notons q_1, q_2, p_1, p_2 les projections définies par les diagrammes $X \xleftarrow{q_1} X \times Y \xrightarrow{q_2} Y$ et $T^* X \xleftarrow{p_1} T^*(X \times Y) \xrightarrow{p_2} T^* Y$

On se donne

- U un ouvert de $T^*(X \times Y)$
- Λ une sous-variété lagrangienne complexe de U
- $K \in \text{Ob}(D_{\mathbf{R}-c}^b(X_{\mathbf{R}} \times Y_{\mathbf{R}}))$

tels que

- $p_{1|\Lambda}$ est une immersion $\Lambda \rightarrow T^* X$
- q_1 est propre sur $\text{supp} K$
- $SS(K) \cap U \subset \Lambda$

(cette dernière condition impliquant que K est microlocalement isomorphe à un objet \mathbf{C} -constructible, localement sur U ([K-S1])). Pour tout $F \in \text{Ob}(D_{\mathbf{R}-c}^b(Y_{\mathbf{R}}))$ on a un morphisme canonique

$$(2.4.1) \quad R\rho_{1*} \left(T - \mu \mathcal{H}om \left(K[-m], \Omega_{X \times Y}^{(0,m)} \right) \otimes p_2^{-1} T - \mu \mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_Y) \right) \\ \rightarrow T - \mu \mathcal{H}om(\Phi_K(F), \mathcal{O}_X)$$

où $m = \dim_{\mathbf{C}} Y$, $\Omega_{X \times Y}^{(0,m)}$ est le faisceau des formes holomorphes de type $(0, m)$ sur $X \times Y$, et où $\Phi_K(F) \stackrel{\text{def}}{=} Rq_{1!}(K \otimes q_2^{-1} F)$.

La flèche 2.4.1 résulte aussitôt des opérations de 2.1, 2.2 et 2.3 .

2.5 De ces opérations résultent celles à la [S-K-K] sur les microfonctions tempérées et les microfonctions holomorphes tempérées. Rappelons en particulier que :

$\mathcal{E}_X^{\mathbf{R},f}$ est un sous-faisceau de $\mathcal{E}_X^{\mathbf{R}}$

$\gamma^{-1}\gamma_*\mathcal{E}_X^{\mathbf{R},f} = \mathcal{E}_X$ où γ désigne $\gamma : T^*X \rightarrow T^*X/C^\times$

$T-\mu \mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_X)$ est un $\mathcal{E}_X^{\mathbf{R},f}$ -Module à gauche, plus précisément, si on fait $Y = X$ et $K = C_\Delta$ dans (2.4.1) on trouve une flèche

$$\mathcal{E}_X^{\mathbf{R},f} \otimes T-\mu \mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_X) \rightarrow T-\mu \mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_X)$$

qui induit une structure de $\mathcal{E}_X^{\mathbf{R},f}$ -Module sur $H^j(T-\mu \mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_X))$, $\forall j$. Par exemple \mathcal{C}_M^f et $\mathcal{C}_{Z|X}^{\mathbf{R},f}$ (notations de (1.8) et (1.9)) sont des $\mathcal{E}_X^{\mathbf{R},f}$ -Modules.

Signalons également que

$\mathcal{E}_X^{\mathbf{R},f}$ est fidèlement plat sur \mathcal{E}_X ,

$\mathcal{C}_{Z|X}^{\mathbf{R},f} = \mathcal{E}_X^{\mathbf{R},f} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{C}_{Z|X}$.

2.6 Transformations canoniques.

Les transformations canoniques quantifiées de [S-K-K] ont été étendues par Kashiwara-Schapira en une opération sur $\mu \mathcal{H}om(\bullet, \mathcal{O}_X)$ [K-S1]; l'énoncé ci-dessous en fournit une version tempérée.

Soient X une variété analytique complexe, Y un autre exemplaire de X , U_X (resp. U_Y) un ouvert de T^*X (resp. T^*Y) et $\varphi : U_Y \xrightarrow{\sim} U_X$ une transformation canonique. Soit $\tilde{\varphi}$ une "quantification" de φ

$$\tilde{\varphi} : \varphi_* \mathcal{E}_Y|_{U_Y} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_X|_{U_X}$$

définie par la correspondance $P \mapsto (Q \text{ tel que } Ps = sQ)$ où s est une section simple de $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_Y \times X} \Omega_{Y \times X}^{(n,0)}$, \mathcal{M} un $\mathcal{E}_Y \times X$ -Module holonôme simple porté par la lagrangienne Λ associée à φ .

Soit $p = (p_Y, p_X^a) \in \Lambda$, où a est l'application antipodale de T^*X , et soit $K \in \text{Ob}(D_{\mathbf{R}-c}^b(Y_{\mathbf{R}} \times X_{\mathbf{R}}))$ un objet simple de décalage 0 le long de Λ au voisinage de p au sens de [K-S1] (i.e. K est, microlocalement en p , isomorphe à un objet pervers).

Alors on a les isomorphismes de [K-S1]

$$(2.6.1) \quad \mathcal{E}_{Y,p_Y}^{\mathbf{R}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{X,p_X}^{\mathbf{R}}$$

$$(2.6.2) \quad \mu \mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_Y)_{p_Y} \xrightarrow{\sim} \mu \mathcal{H}om(\phi_{K[n]}F, \mathcal{O}_X)_{p_X}$$

pour tout $F \in \text{Ob}(D_{\mathbf{R}-c}^b(Y_{\mathbf{R}}))$

Proposition 2.1.—

(i) L'isomorphisme (2.6.1) précédent induit un isomorphisme $\mathcal{E}_{Y,p_Y}^{\mathbf{R},f} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{X,p_X}^{\mathbf{R},f}$

(ii) Pour tout $F \in \text{Ob}(D_{\mathbf{R}-c}^b(Y_{\mathbf{R}}))$ on a un isomorphisme canonique

$$T-\mu \mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_Y)_{p_Y} \xrightarrow{\sim} T-\mu \mathcal{H}om(\phi_{K[n]}(F), \mathcal{O}_X)_{p_X}$$

compatible à (2.6.2).

La flèche (ii) résulte de (2.4.1) et c'est un isomorphisme parce que $T-\mu \text{Hom}(F, \mathcal{O}_Y)$ est un \mathcal{E}_Y -Module. L'isomorphisme du (i) résulte d'une version de (ii) à paramètres dans une variété complexe Z . Les détails paraîtront ailleurs.

Corollaire 2.2.— Soit Z une sous-variété complexe de X . Notant γ l'application $T^*_Z X \rightarrow \mathbf{P}^*_Z X$, on a

$$R^j \gamma_* \mathcal{C}_{Z|X}^{\mathbf{R},f} = 0 \quad \forall j > 0.$$

Démonstration. Par transformation canonique, on peut supposer que Z est une hypersurface (transformation de Legendre), alors l'isomorphisme $\mathbf{P}^*_Z X \simeq Z$ identifie γ à $\overset{\circ}{\pi} : T^*_Z X \rightarrow Z$ et l'assertion $R^j \overset{\circ}{\pi}^* \mathcal{C}_{Z|X}^{\mathbf{R},f} = 0 \quad \forall j > 0$ résulte du triangle de Sato (1.5).

La remarque suivante sera utile au Paragraphe 3.

Remarque 2.3.— On garde les notations de la Proposition 2.1.

Soit $s \in H^0 \left(T-\mu \text{Hom}(K, \Omega_{Y \times X}^{(n,0)}) \right)_p$ définissant la quantification de la transformation canonique φ .

Considérons la transformation canonique complexe

$$\phi : U_Y \times U_Y \subset T^*(Y \times \bar{Y}) \longrightarrow U_X \times U_X \subset T^*(X \times \bar{X})$$

associée à la lagrangienne

$\Lambda \times \Lambda \subset T^*(Y \times X \times \bar{Y} \times \bar{X}) \simeq T^*(Y \times \bar{Y} \times X \times \bar{X})$. Regardant $s \otimes s$ comme une section de $T-\mu \text{Hom} \left(K \hat{\otimes} K, \Omega_{Y \times \bar{Y} \times X \times \bar{X}}^{(n,n,0,0)} \right)_{(p,p)}$ (cf. (2.3.1)), on définit une transformation canonique quantifiée

$$\tilde{\phi} : \mathcal{E}_{Y \times \bar{Y}, (p_Y, p_Y)}^{\mathbf{R},f} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{X \times \bar{X}, (p_X, p_X)}^{\mathbf{R},f}$$

qui est par définition la complexifiée de $\tilde{\varphi}$.

On identifie \mathcal{E}_{X, p_X} (resp. $\mathcal{E}_{\bar{X}, p_X}$) à un sous-anneau de $\mathcal{E}_{X \times \bar{X}, (p_X, p_X)}^{\mathbf{R},f}$ par $X \times \bar{X} \rightarrow X$ (resp. $X \times \bar{X} \rightarrow \bar{X}$) et, comme d'habitude, on identifie $X \times \bar{X}$ à un complexifié de $X_{\mathbf{R}}$ (et on fait les identifications analogues avec Y à la place de X).

Alors, $\tilde{\phi}$ échange $\mathcal{C}_{Y_{\mathbf{R}}, p_Y}^f$ et $\mathcal{C}_{X_{\mathbf{R}}, p_X}^f$, d'une part, et \mathcal{E}_{Y, p_Y} et \mathcal{E}_{X, p_X} (resp. $\mathcal{E}_{\bar{Y}, p_Y}$ et $\mathcal{E}_{\bar{X}, p_X}$), d'autre part, avec compatibilité des opérations.

3. Conjugaison de Kashiwara et front d'onde de distributions holonômes régulières.

Soit X une variété analytique complexe. Une distribution u sur $X_{\mathbf{R}}$ est dite holonôme régulière si elle est localement solution d'un \mathcal{D}_X -Module holonôme régulier, i.e. s'il existe, localement sur $X_{\mathbf{R}}$, un idéal cohérent I de \mathcal{D}_X tel que $Iu = 0$ et que \mathcal{D}_X/I est holonôme régulier. L'intérêt de ce type de distribution réside dans le

Théorème 3.1 (Kashiwara [K3]).—

- (i) Une distribution u est holonôme régulière si elle est localement solution d'un $\mathcal{D}_{\bar{X}}$ -Module holonôme régulier.
- (ii) Si u est une distribution holonôme régulière, alors $\mathcal{D}_X u$ est un \mathcal{D}_X -Module holonôme régulier.
- (iii) Si \mathcal{M} est un \mathcal{D}_X -Module holonôme régulier, alors, localement sur X , il existe une distribution holonôme régulière u et un isomorphisme $\mathcal{M} \simeq \mathcal{D}_X u$.

Exemples:

- 1) Soit $X = \mathbf{C}$, z une coordonnée holomorphe $\partial = \partial/\partial z$. On a

$$\mathcal{B}_{\{0\}|\mathbf{C}} = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X z = \mathcal{D}_X \delta, \quad \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X \partial z \partial = \mathcal{D}_X \text{Log } z \bar{z}.$$

- 2) $X = \mathbf{C}^n$, $f \in \mathcal{O}_X$, $Z = f^{-1}(0)$. Alors pour $m \gg 0$ on a $\mathcal{O}_X[*Z] \simeq \mathcal{D}_X v p \frac{1}{f^m}$ (cet exemple est emprunté à [B-K]).

Pour analyser les singularités analytiques microlocales des distributions holonômes régulières on paraphrase [K3] dans le cadre microlocal comme suit.

Soit γ l'application canonique $T^*X \rightarrow T^*X/\mathbf{C}^\times$. On définit le faisceau des microfonctions tempérées \mathbf{C} -homogènes par $\tilde{\mathcal{C}}_X^f \stackrel{\text{def}}{=} \gamma^{-1} \gamma_* \mathcal{C}_{X_{\mathbf{R}}}^f$. On a $\tilde{\mathcal{C}}_X^f|_{T_{\bar{X}}^* X} = \mathcal{D}b_{X_{\mathbf{R}}}$ et $\pi_* \tilde{\mathcal{C}}_X^f = \mathcal{D}b_{X_{\mathbf{R}}}/\mathcal{A}_{X_{\mathbf{R}}}$ où $\mathcal{A}_{X_{\mathbf{R}}}$ désigne le faisceau des fonctions analytiques réelles sur $X_{\mathbf{R}}$. Soit U un ouvert de T^*X et u une section de $\tilde{\mathcal{C}}_X^f$ définie sur U . On dira que u est holonôme régulière si elle est, localement sur U , solution d'un \mathcal{E}_X -Module holonôme régulier.

Théorème 3.2.—

- (i) u est holonôme régulière si elle est, localement sur U , solution d'un $\mathcal{E}_{\bar{X}}$ -Module holonôme régulier.
- (ii) Si u est holonôme régulière, alors $\mathcal{E}_X u$ est un \mathcal{E}_X -Module holonôme régulier.
- (iii) Si \mathcal{M} est un \mathcal{E}_X -Module holonôme régulier défini sur U , alors localement sur U , il existe une section v de $\tilde{\mathcal{C}}_X^f$ et un morphisme $\mathcal{M} \simeq \mathcal{E}_X v$.

Idée de la démonstration : On définit l'analogie microlocal du foncteur de conjugaison C_X de Kashiwara [K3] en posant, pour tout \mathcal{E}_X -Module holonôme régulier \mathcal{M} ,

$$\tilde{C}_X(\mathcal{M}) \stackrel{\text{def}}{=} R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{C}}_X^f), \quad (\text{on a } \tilde{C}_X|_{T_{\bar{X}}^* X} = C_X).$$

Comme les transformations canoniques \mathbf{C} -homogènes - complexifiées et quantifiées comme dans la Remarque 2.3 - opèrent sur $\tilde{C}_X(\mathcal{M})$, on peut placer la variété caractéristique

de \mathcal{M} en position générique en un point $p \in T^{\circ*} X$. [K-K], [Bj], et on est ramené à la situation de Kashiwara.

Soit maintenant u une distribution holonôme régulière et soit $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X u$. On note $\text{Car} \mathcal{M}$ la variété caractéristique de \mathcal{M} et $WF_A(u)$ le spectre singulier de Sato (front d'onde analytique) de u .

Théorème 3.3.— $WF_A(u) = \text{Car} \mathcal{M}$.

Idee de la démonstration :

- 1) L'inclusion $WF_A(u) \subset \text{Car} \mathcal{M}$ est claire.
- 2) On montre que $WF_A(u)$ rencontre toutes les composantes irréductibles de la partie régulière $(\text{Car} \mathcal{M})_{\text{reg}}$ de $\text{Car} \mathcal{M}$ en utilisant le Théorème 3.2. (ii).
- 3) On conclut en remarquant que $(\text{Car} \mathcal{M})_{\text{reg}} \cap WF_A(u)$ est ouvert dans $\text{Car} \mathcal{M}$ par le théorème de propagation de [K-S2].

Bibliographie

- [A1] Andronikof, E. : Microlocalisation des distributions et des fonctions holomorphes. C.R. Acad. Sci. Paris, t. 303, série I, 347-350 (1986), t. 304, Série I, 511-514 (1987) et Thèse d'Etat Paris-Nord (Juin 1987).
- [A2] Andronikof, E. : Article à paraître.
- [B-K] Barlet, D - Kashiwara, M. : Le réseau L^2 d'un système holonôme régulier. Invent. math. 86, 35-62 (1986).
- [Bj] Björk, J.-E. : Livre à paraître chez Academic Press.
- [K1] Kashiwara, M. : Faisceaux constructibles et systèmes holonomes d'équations aux dérivées partielles à points singuliers réguliers. Sémin. Goulaouic-Schwartz, 1979-80, exposé XIX.
- [K2] Kashiwara, M. : The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems. Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ., t. 20, 319-365 (1984).
- [K3] Kashiwara, M. : Regular holonomic \mathcal{D} -modules and distributions on complex manifolds. Adv. Stud. in pure Math., 8, 199-206 (1986).
- [K-K] Kashiwara, M. - Kawai, T. : On the holonomic systems of micro-differential equations, III. Systems with regular singularities. Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ., t. 17, 813-979 (1981).
- [K-S1] Kashiwara, M. - Schapira, P. : Microlocal Study of sheaves. Astérisque 128 (1985).
- [K-S2] Kashiwara, M. - Schapira, P. : Micro-hyperbolic systems. Acta Math. 142, 1-55 (1979).
- [Ma] Martineau, A. : Oeuvre de André Martineau. Publ. C.N.R.S. (1977).
- [S-K-K] Sato, M. - Kashiwara, M. - Kawai, T. : Hyperfunctions and pseudo-differential equations - in Lecture Notes in Math. 287, Springer- Verlag, 265-529 (1973).

E. ANDRONIKOF
Département de Mathématiques
et Informatique
C.S.P. Université Paris-Nord
93430 VILLETANEUSE

ERRATA

Exposé n° 2 - 20 Octobre 1987 -

E. Andronikof

Microlocalisation tempérée,
applications aux distributions holonomes
sur une variété complexe

- p. II-3 : la formule (1.1) doit être remplacée par les deux lignes suivantes :

$$(1.1) \quad T - \mu_Y RH_X(F) \stackrel{\text{def}}{=} s^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} \bigotimes_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}}^L RH_{\tilde{X}}(p^! F_\Omega) \right)^\wedge [1],$$

où $()^\wedge$ désigne la transformation de Fourier-Sato et ...”

- p. II-4, ligne 3, lire : $H^j(T - \mu_M \mathcal{O}_X)_p$ au lieu de $(T - \mu_M \mathcal{O}_X)_p$.
