

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

G. LEBEAU

Équation des ondes semi-linéaires II. Contrôle des singularités et caustiques non-linéaires

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1987-1988), exp. n° 1, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1987-1988__A1_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1987-1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Séminaire 1987-1988

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

ÉQUATION DES ONDES SEMI-LINÉAIRES II. CONTROLE DES SINGULARITÉS ET CAUSTIQUES NON-LINÉAIRES

G. LEBEAU

I Introduction

Soit $x = (x_0, x')$ le point courant de l'espace-temps $x_0 \in \mathbf{R}$, $x' \in \mathbf{R}^d$, la dimension d'espace d prenant les valeurs $d = 2$ ou $d = 3$, $\square = \partial_{x_0}^2 - \Delta_{x'}$ l'opérateur des ondes, Ω un ouvert de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$ et $\omega = \Omega \cap \{x_0 = 0\}$. On suppose que Ω est influencé par ω , c'est à dire que pour tout $x \in \Omega$, l'intersection du cône d'onde de sommet x avec l'hyperplan $x_0 = 0$ est contenue dans ω .

Soit $u(x_0, x')$ un élément de $H_{loc}^s(\Omega)$, $s > \frac{1+d}{2}$ vérifiant l'équation des ondes semi-linéaire

$$(1) \quad \square u = p(u)$$

où $p(u) = \sum p_j(x)u^j$ est un polynôme de u , les fonctions $p_j(x)$ étant C^∞ sur Ω .

On va donner un procédé de calcul géométrique (paragraphe III) permettant d'estimer le front d'onde C^∞ de u , $WF(u)$, sous l'hypothèse :

Il existe une hypersurface analytique réelle lisse V de ω , telle que les données de Cauchy de u

$$(2) \quad u_0 = u|_{x_0=0} \in H_{loc}^s(\omega) \quad u_1 = \frac{\partial u}{\partial x_0}|_{x_0=0} \in H_{loc}^{s-1}(\omega)$$

soient des distributions intégrales de Fourier classiques sur $T_V^*\omega$.

Sous cette hypothèse, l'estimation des singularités de u en temps petit est bien connue (voir [2]) u étant conormale sur les deux hypersurfaces caractéristiques V_+ et V_- issues de V . Par contre, dès que $|x_0|$ est assez grand apparaissent les phénomènes d'interaction de plusieurs ondes progressives [voir [1], [3], [9], [10]] ainsi que le phénomène de pincement d'une onde progressive, pour lequel la description des singularités est la suivante :

II Le pincement

On se place ici en dimension 2 d'espace. On note (t, x, y) les coordonnées de l'espace temps, et on suppose que V est une courbe analytique lisse de $\mathbf{R}^2$, possédant au point $x = 0$, $y = -R_0$ un minimum strict R_0 de son rayon de courbure, le centre du cercle osculateur en ce point étant $x = y = 0$. On choisit pour instant initial portant les données de Cauchy $t_0 = -R_0$, de sorte que le point de pincement de l'onde sera $x = y = t = 0$. On choisit enfin pour ouvert Ω un petit voisinage du compact

$$(3) \quad \{(x, y, t) \in \mathbf{R}^3, t \in [t_0, 0] \quad x^2 + y^2 \leq t^2\}$$

La queue d'aronde Q est la projection sur $\mathbf{R}^3$ de l'ensemble des points caractéristiques $(x, y, t, \xi, \eta, \tau)$ de $T^*\mathbf{R}^3$ issus de $T_V^*\omega$, c'est à dire vérifiant

$$(4) \quad \tau^2 = \xi^2 + \eta^2 \quad ; \quad (x + t\frac{\xi}{\tau}, y + t\frac{\eta}{\tau}; \xi, \eta) \in T_V^*\omega$$

La décomposition de Q en les deux hypersurfaces caractéristiques issues de V , est $Q = Q_+ \cup Q_-$ où $Q_\pm$ est défini par (4) avec $\pm\tau\eta > 0$. On note Γ^+ le demi-cône d'onde issu du point de pincement

$$(5) \quad \Gamma^+ = \{(x, y, t), t \geq 0 \quad t^2 = x^2 + y^2\}$$

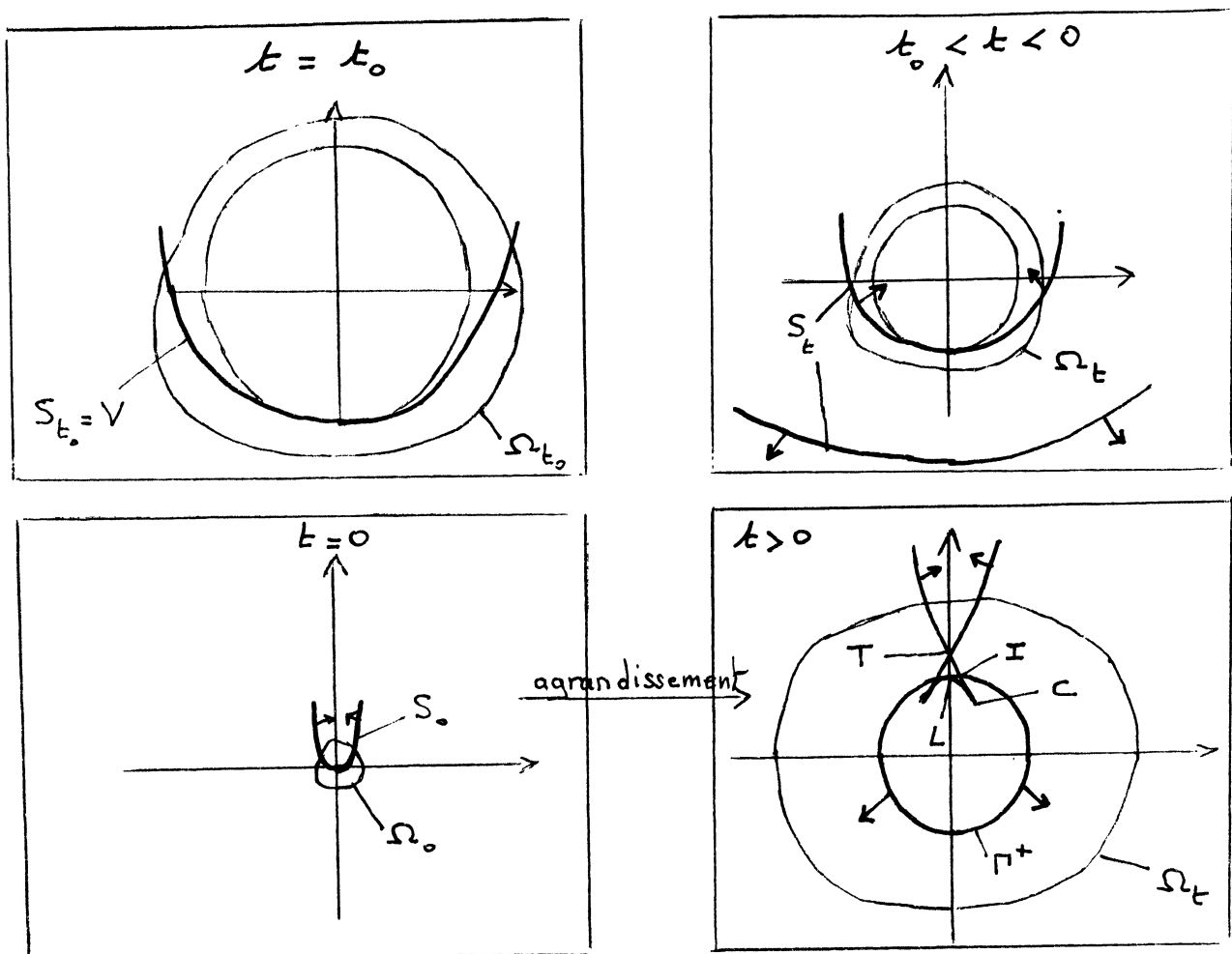


Figure 1

Soit $S = Q \cup \Gamma^+$ et Ω_t, S_t les traces à l'instant t de Ω et S . On a alors le film Figure 1.

Près de $t = 0$, la géométrie de S est singulière. On note T la ligne de self intersection de Q_+ , I la ligne d'intersection transverse de Q_+ et Γ_+ , C la ligne des cusps de Q_+ et L la demi droite de contact d'ordre 4 entre Γ_+ et Q_+ . On note $S_{reg} = S - [T \cup I \cup C \cup L \cup (0)]$ et $T_S^* = T_{S_{reg}}^* \cup T_T^* \cup T_I^* \cup T_C^* \cup T_L^* \cup T_0^*$. On a alors le résultat suivant :

Théorème 1.— Soit u solution de (1) et (2). Alors

$$WF(u) |_{t > t_0} \subset T_S^*$$

La preuve de ce résultat repose sur l'estimation géométrique du paragraphe III : R. Melrose nous a communiqué qu'il en possédait également une démonstration.

III Contrôle géométrique des singularités

Pour contrôler la géométrie de $WF(u)$, on introduit des ensembles de suites

$$(6) \quad (x_n, \zeta_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T^* \mathbb{C}^{1+d}$$

qui vérifient

7 La suite x_n converge vers un point de Ω .

8 Il existe une suite convergente $\eta_n \in \mathbb{C}^{1+d}$, $|\eta_n| = 1$ et une suite $\lambda_n \in \mathbb{C}^*$ telle que $\zeta_n = \lambda_n \eta_n$.

9 La suite (x_n, ζ_n) est caractéristique, c'est à dire $\zeta_{n,0}^2 = (\zeta'_n)^2$.

On notera $\mathcal{E}$ un ensemble de telles suites satisfaisant de plus aux quatre axiomes suivants :

A.1 Toute suite (x_n, ζ_n) vérifiant (7) (8) (9) et $\zeta_n \rightarrow 0$ appartient à $\mathcal{E}$.

A.2 Si $(x_n, \zeta_n) \in \mathcal{E}$ et y_n vérifie $\lim y_n = \lim x_n$ et $|y_n - x_n| |\zeta_n| \rightarrow 0$ alors $(y_n, \zeta_n) \in \mathcal{E}$

A.3 Si $(x_n, \zeta_n) \in \mathcal{E}$ et si y_n est telle que $\lim y_n \in \Omega$ appartient au demi-cône d'onde de sommet $\lim x_n$ qui ne rencontre pas l'hyperplan $x_0 = 0$ portant les données de Cauchy et si (y_n, ζ_n) , (x_n, ζ_n) sont sur la même bicaractéristique complexe de $\square$ alors $(y_n, \zeta_n) \in \mathcal{E}$

A.4 Soit pour $j = 1, \dots, N$ (x_n, ζ_n^j) N suites de $\mathcal{E}$ possédant le même point base x_n , et soit ζ_n une suite telle que (x_n, ζ_n) vérifie (7) (8) (9) et

$$\lim \zeta_n^1 + \dots + \zeta_n^N - \zeta_n = 0$$

Alors $(x_n, \zeta_n) \in \mathcal{E}$

Définition 1.—

i) Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de suites vérifiant (7) (8) (9). On note $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ le plus petit ensemble $\mathcal{E}$ contenant $\mathcal{A}$ vérifiant A1, 2, 3, 4.

ii) Soit $\mathcal{E}$ vérifiant A1, 2, 3, 4. On note $Z(\mathcal{E})$ l'adhérence de l'ensemble des points $(x, \zeta) \in T^* \mathbb{C}^{1+d} |_{\Omega}$ tels qu'il existe N suites $(x_n, \zeta_n^j) \in \mathcal{E}$ $j = 1, \dots, N$ avec

$$x = \lim x_n$$

$$\zeta = \lim \zeta_n^1 + \dots + \zeta_n^N$$

(le point (x, ζ) n'est pas caractéristique en général).

Soit à présent $\omega^{\mathbb{C}}$ un petit voisinage complexe de ω et $V^{\mathbb{C}} \subset \omega^{\mathbb{C}}$ l'hypersurface lisse complexifiée de V . On note $\mathcal{A}_V$ l'ensemble des suites (x_n, ζ_n) vérifiant (7) (8) (9) et telles qu'il existe une suite $(y'_n, \eta'_n) \in T_{V^{\mathbb{C}}}^* \omega^{\mathbb{C}}$ avec

$$x_n = (0, y'_n) \quad \lim y'_n \in V$$

$$\zeta_n = (\zeta_{n,0}, \zeta'_n) \quad \zeta'_n = \eta'_n$$

Théorème 2.— Soit u solution de l'équation des ondes semi linéaire (1), vérifiant (2). Alors

$$WF(u) \subset Z(\mathcal{E}(\mathcal{A}_V)) \cap T^* \Omega$$

Exemple d'ensembles $\mathcal{E}$

Soient X_j $j = 1, \dots, N$ N champs de vecteurs

$$X_j = \sum_{\ell} X_{j,\ell}(x) \frac{\partial}{\partial x_{\ell}}$$

où les $X_{j,\ell}$ sont des fonctions lipschitziennes définies dans un voisinage Ω^C de Ω , vérifiant

$$\{\sigma(X_j), \sigma(\square)\} |_{\sigma(\square)=0} = \left(\sum_{k=1}^N \theta_{jk}(x, \zeta) \sigma(X_k) \right) |\zeta|$$

où les θ_{jk} sont bornées sur $T^*\Omega^C$ et où le crochet $\{., \sigma(\square)\}$ signifie qu'on dérive le long des bicaractéristiques. On définit $\mathcal{E}$ par :

Une suite (x_n, ζ_n) vérifiant (7) (8) (9) appartient à $\mathcal{E}$ si et seulement si $\sigma(X_j)(x_n, \zeta_n) \rightarrow 0$ pour $j = 1, \dots, N$.

Alors $\mathcal{E}$ vérifie A.1 et A.2 car les $X_{j,\ell}$ sont Lipschitz, A.4 car $\sigma(X_j)$ est linéaire en ζ . Enfin soit $(x, \zeta) = \rho \in \text{car} \square$ et $\rho(s)$ la bicaractéristique issue de ρ en $s = 0$, $\rho(s) = (x(s), \zeta(s))$, $x_0(s) = x_0 + s\zeta_0 |\zeta|^{-1}$ $x'(s) = x' - s\zeta' |\zeta|^{-1}$, $\zeta(s) = \zeta$ On a

$$\frac{d}{ds} \sigma(X_j)(\rho(s)) = \frac{1}{2|\zeta|} \{\sigma(X_j), \sigma(\square)\}(\rho(s)) = \sum \theta_{jk} \sigma(X_k)(\rho(s))$$

Si $\phi(s)$ est le vecteur $\sigma(X_j)(\rho(s))$ $j = 1, \dots, N$ on a $\frac{d\phi}{ds} = \Theta(s)\phi(s)$ avec Θ borné, d'où $|\phi(s)| \leq C^{te} |\phi(0)|$ et A.3 est vérifié.

Remarque : Le théorème 1 sur le pincement est une conséquence du théorème 2, via le calcul d'un $\mathcal{E}$ contenant $\mathcal{A}_V$ et vérifiant $Z(\mathcal{E}) \cap T^*\Omega = T_s^*$. Si $(x_n, \zeta_n) = \lambda_n \eta_n$ est une suite, son appartenance à $\mathcal{E}$ est définie selon la limite $(x_{\infty}, \eta_{\infty})$: Lorsque $(x_{\infty}, \eta_{\infty}) \notin T_{S^C}^*$ on impose $\lambda_n \rightarrow 0$. Lorsque $(x_{\infty}, \eta_{\infty}) \in T_{S_{reg}^C}^*$, $\mathcal{E}$ est défini par les champs tangents à S_{reg} .

Lorsque $(x_{\infty}, \eta_{\infty}) \in T_{L^C}^*$, $\mathcal{E}$ est défini par la réunion des 2 espaces définis par les champs tangents à $(Q_+$ et $\bar{L})$ et à $(\Gamma_+$ et $L)$.

L'ensemble $\mathcal{E}$ est alors entièrement déterminé en utilisant a priori son invariance par propagation, et on vérifie aisément qu'il satisfait à A1, 2, 3. La vérification de A.4 en particulier lorsque $x_{\infty} = \{ \text{point de pincement} \}$ se fait à la main en utilisant les équations qui définissent $\mathcal{E}$.

IV Idée de la preuve du théorème 2

La preuve du théorème 2 repose d'une part sur la technique déjà utilisée dans [8], d'autre part sur des arguments de 2ème microlocalisation à croissance.

Définition 2.—

- (i) Un diagramme D est la donnée
- d'un ensemble fini $I = \{1, \dots, N\}$ muni d'une partition $I = I_1 \cup \dots \cup I_L$
 - d'une application $f : I \rightarrow I \cup \{0\}$ telle que $f(I_{\ell+1}) \subset I_\ell$, $f(I_1) = \{0\}$
 - d'une partie J de I , $J = J' \cup J''$, telle que pour $i \in J$ $f^{-1}(i) = \emptyset$ et pour $i \in J$ d'un $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$.

Soit e_+ la solution élémentaire sortante des ondes

- (ii) Si D est un diagramme, pour $y \in \Omega$ et $X = (x^1, \dots, x^N) \in \Omega^N$ on pose

$$[D](X, y) = \prod_{i \in I^1} e_+(y - x^i) \prod_{\substack{(\alpha, \beta) \in I^2 \\ f(\beta) = \alpha}} e_+(x^\alpha - x^\beta)$$

$$\{D\}(X, y) = \prod_{i \in J'} \delta_{x_0^i=0}^{\varepsilon_i} \otimes u_{\varepsilon_i}(x'^i) \prod_{i \in J''} \delta_{x_0^i=0}^{\varepsilon_i} \otimes 1$$

u_0, u_1 étant les données de Cauchy de u .

Il résulte des techniques de [8] qu'on a

$$(10) \quad \forall \sigma \ WF^\sigma(u) \subset \{(y, \eta), \exists D, \exists X(y, \eta, X, \Xi = 0) \in WF([D] \bullet \{D\})\}$$

Le théorème 2 est donc conséquence de

Proposition 1.—

$$\forall D(y, \eta, X, \Xi = 0) \in WF([D] \bullet \{D\}) \Rightarrow (y, \eta) \in Z(\mathcal{E}(\mathcal{A}_V))$$

C'est la preuve de cette proposition qui va consommer les hypothèses d'analyticité, et il suffit de prouver la proposition 1 lorsque les u_{ε_i} sont conormales analytiques homogènes sur V .

Soient $\Lambda_{[D]}$ et $\Lambda_{\{D\}}$ les lagrangiennes complexes associées aux distributions $[D]$ et $\{D\}$. On a

$$(11) \quad \Lambda_{\{D\}} = \left\{ \begin{array}{l} (x^1, \dots, x^N, y, \xi^1, \dots, \xi^N, \eta) \ \eta = 0, \xi^i = 0 \ \text{si} \ i \notin J, \ x_0^i = 0 \\ \text{pour} \ i \in J, \ (x'^i, \xi'^i) \in T_V^* \mathbf{C} \\ \text{ou} \ \xi'^i = 0 \ \text{pour} \ i \in J', \xi'^i = 0 \ \text{pour} \ i \in J'' \end{array} \right\}$$

Soit $\Gamma^{\mathbf{C}}$ le complexifié du cône d'onde, $T_{\Gamma^{\mathbf{C}}}^*$ son fibré conormal ($T_0^* \subset T_{\Gamma^{\mathbf{C}}}^*$) et

$$(12) \quad \Lambda_{\mathbf{a}} = T_{\Gamma^{\mathbf{C}}}^* \cup \{(x, 0) \in T^* \mathbf{C}^{1+d}\}$$

la variété $\Lambda_{[D]}$ est définie par

$$(13) \quad \begin{aligned} \Lambda_{[D]} = & \{ (x^1, \dots, x^N, y, \xi^1, \dots, \xi^N, \eta) \text{ tel qu'il existe } \Xi^1, \dots, \Xi^N, \\ & (x^i - x^{f(i)}, \Xi^i) \in \Lambda_{\alpha} (x^0 = y) \quad \eta = \sum_{i \in I'} \Xi^i \ ; \\ & \xi^i = -\Xi^i + \sum_{f(j)=i} \Xi^j \} \end{aligned}$$

Rappelons enfin la définition du $\hat{+}$ de Kashiwara-Schapira [6].

Définition 3.— Soient Λ_1 et Λ_2 deux lagrangiennes de $T^*\mathbb{C}^n$. On note $\Lambda_1 \hat{+} \Lambda_2$ l'ensemble des points $(x, \xi) \in T^*\mathbb{C}^n$ tels qu'il existe des suites $(x_i^k, \xi_i^k) \ i = 1, 2 \quad k \in \mathbb{N}$ avec

$$\begin{cases} x_i^k \rightarrow x & i = 1, 2 \\ \xi_1^k + \xi_2^k \rightarrow \xi \\ |\xi_1^k| |x_1^k - x_2^k| \rightarrow 0 \end{cases}$$

Proposition 2.— Le spectre analytique du produit $[D] \bullet \{D\}$ est contenu dans $\Lambda_{[D]} \hat{+} \Lambda_{\{D\}}$. ■

Compte tenu des axiomes A.1, 2, 3, 4 vérifiés par $\mathcal{E}(\mathcal{A}_V)$, cette proposition entraîne la proposition 1.

La proposition 2 est conséquence du résultat suivant (voir [7]).

Proposition 3.— Soit $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \quad x = (x', x''), N$ la sous-variété $x'' = 0$. On suppose

$$\exists M, \delta > 0, g \in L^1 \quad \left| \hat{f}(\eta', \eta'') \right| \leq (1 + |\eta'|)^M \frac{g(\eta'')}{(1 + |\eta''|)^\delta}$$

Alors le spectre analytique de la trace $f|_N$ vérifie

$$SS(f|_N) \subset T^*N \cap WF_{T_N^*}^2(f)$$

où WF^2 est le deuxième micro support à croissance et l'injection de T^*N dans $T^*(T_N^*)$ est composée de $(\pi : T_N^* \rightarrow N)$

$$T^*N \xrightarrow{Id \times \{0\}} T^*N \times_{\pi} T_N^* \xrightarrow{\pi^*} T^*(T_N^*).$$

Comme $\Lambda_1 \hat{+} \Lambda_2 = T^*\mathbb{C}^n \cap (C_{T_\Delta^*}(\Lambda_1 \otimes \Lambda_2))$ où Δ est la diagonale, la proposition 2 est conséquence de

$$(14) \quad WF_{T_{\Delta}^*}^2([D] \otimes \{D\}) \subset C_{T_{\Delta}^*}(\Lambda_1 \otimes \Lambda_2)$$

avec l'identification hamiltonienne du fibré cotangent $T^*(T_\Delta^*)$ au fibré normal $T_{T_\Delta^*}$ et où $C_{T_\Delta^*}$ désigne le cône normal le long de T_Δ^* .

L'estimation (14), qui est le point d'analyse essentiel de la preuve, se démontre en utilisant les techniques développées dans Delort-Lebeau [4]. Il en existe aussi certainement une démonstration utilisant la théorie des D -modules holônomes singuliers réguliers de Kashiwara- Kawai[voir[5]].

Bibliographie

- [1] J.M. Bony. "Interaction des singularités..." Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz 81/82 n°2 et 83/84 n°10.
- [2] J.M. Bony. "Singularités des solutions de problèmes de Cauchy hyperboliques non linéaires" "Advances in Microlocal Analysis" Castel Vecchio 1985 Nato ASI series Ed. Garnir-Reidel.
- [3] J.Y. Chemin. Thèse de Doctorat. Université d'Orsay 1986.
- [4] J.M. Delort et G. Lebeau. "Distributions I. Lagrangiennes" à paraître au Journal de Math pures et appliquées.
- [5] M. Kashiwara et I. Kawai. "Deuxième microlocalisation" Proc. les Houches 1979 Lec. Notes 126. Springer.
- [6] M. Kashiwara et P. Shapira. "Microlocal Study of Sheaves" Astérisque n°128 1985.
- [7] G. Lebeau. "Deuxième microlocalisation à croissance" Seminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz 82/83 n°15.
- [8] G. Lebeau. "Problème de Cauchy semi-linéaire. Un résultat de finitude". A paraître au Journal Fonct. Analysis et séminaire E.D.P. 86/87 n°1 Ecole Polytechnique.
- [9] R. Melrose et N. Ritter. "Interaction of progressing waves for semi-linear wave equations I". Ann. of Math. 121 (1985) 187-213 et II.
- [10] R. Melrose. "Conormal rings and semi-linear wave equations" in Advances in Microlocal Analysis" Castel Vecchio 1985 Nato ASI Series Ed. Garnir-Reidel.

Faculté des Sciences
Bât. 425
Département de Mathématiques
91405 ORSAY CEDEX