Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

Y. Laurent

Construction des cycles évanescents d'un système différentiel par seconde microlocalisation

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1987-1988), exp. nº 11, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1987-1988____A11_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (École Polytechnique), 1987-1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES
Unité associée au C.N.R.S. n° 169

ECOLE POLYTECHNIQUE
F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 691.596 F

Séminaire 1987-1988

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

CONSTRUCTION DES CYCLES EVANESCENTS D'UN SYSTEME DIFFERENTIEL PAR SECONDE MICROLOCALISATION

Y. LAURENT

Exposé n°XI

22 Mars 1988

Introduction.

Le but de cet exposé est de montrer le lien entre une construction purement géométrique (les cycles évanescents) et le problème de Cauchy pour les équations aux dérivées partielles.

1. Les cycles évanescents en géométrie analytique

Soit X une variété analytique complexe et $f : X \to \mathbf{C}$ une application holomorphe.

Un faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels sur X est dit "constructible" s'il existe une suite décroissante $X = X_0 \supset X_1 \ldots \supset X_N = \emptyset$ de sous-ensembles analytiques fermés de X telle que, pour tout j, $\mathcal{F}|_{X_j - X_{j+1}}$ soit localement constant de type fini.

Un complexe $\mathcal{F}^\cdot = \ldots \to \mathcal{F}^p \xrightarrow{\lambda_p} \mathcal{F}^{p+1} \to \ldots$ de faisceaux sur X est à cohomologie constructible si ses groupes de cohomologie $\mathcal{H}^p(\mathcal{F}^\cdot) = \operatorname{Ker} \lambda_p / \operatorname{Im} \lambda_{p-1}$ sont, pour tout p, des faisceaux constructibles.

Exemple : Soit $P\left(t, \frac{d}{dt}\right) = a_m(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^m + \ldots + a_0(t)$ un opérateur différentiel sur $\mathbf{C}$ et soit $\mathcal{O}_\mathbf{C}$ le faisceau des fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}$, alors le complexe $\mathcal{O}_\mathbf{C} \xrightarrow{P} \mathcal{O}_\mathbf{C}$ est à cohomologie constructible.

En effet le noyau Ker P et le conoyau Coker P sont, en tout point t de $\mathbf{C}$, de dimension finie sur $\mathbf{C}$ et si T est l'ensemble des zéros de a_m ; Ker P est localement constant sur $\mathbf{C} \setminus T$ tandis que Coker P est nul sur $\mathbf{C} \setminus T$.

A tout faisceau constructible $\mathcal{F}$ sur X (et à tout complexe à cohomologie constructible $\mathcal{F}^\cdot$ sur X) on associe le complexe à cohomologie constructible $\mathbf{R}\Phi_f(\mathcal{F})$ des "cycles évanescents de $\mathcal{F}$" sur $Y = f^{-1}(0)$ de la manière suivante (cf. Deligne [D] et Malgrange [M]) :

Soit $\tilde{\mathbf{C}}^*$ un revêtement universel de $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ et $j : \tilde{\mathbf{C}}^* \to \mathbf{C}$ l'application canonique, posant $\tilde{X}^* = X \underset{\mathbf{C}}{\times} \tilde{\mathbf{C}}^*$ on obtient le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{\bar{i}} & X & \xleftarrow{\bar{j}} & \tilde{X}^* \\ \downarrow f & & \downarrow f & & \downarrow f \\ \{0\} & \xrightarrow{i} & \mathbf{C} & \xleftarrow{j} & \tilde{\mathbf{C}}^* \end{array}$$

On pose alors $\mathbf{R}\Psi_f(\mathcal{F}) = \bar{i}^{-1}\mathbf{R}\bar{j}_*\bar{j}^{-1}\mathcal{F}$ et on définit $\mathbf{R}\Phi_f(\mathcal{F})$ par le triangle :

$$\ldots \to \mathcal{F}|_Y \to \mathbf{R}\Psi_f(\mathcal{F}) \to \mathbf{R}\Phi_f(\mathcal{F}) \xrightarrow{+1} \ldots$$

L'action de la monodromie sur $\tilde{\mathbf{C}}^*$ induit un automorphisme T de $\mathbf{R}\Phi_f(\mathcal{F})$.

Dans la suite nous aurons besoin d'avoir une sous-variété Y qui soit une hypersurface lisse de X, lorsque cela n'est pas le cas on s'y ramène par l'application graphe $X \hookrightarrow X \times \mathbf{C}$ définie par $x \mapsto (x, f(x))$

Si $\tilde{f} : X \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ est la projection canonique $\tilde{f}(x,t) = t$ on aura le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & X \times \mathbf{C} \\ \| & & \downarrow \tilde{f} \\ X & \xrightarrow{f} & \mathbf{C} \end{array}$$

$\tilde{f}$ est lisse et $X \approx \tilde{f}^{-1}(0)$ est une hypersurface lisse de $X \times \mathbf{C}$.

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau constructible sur X on considère son image directe par g qui est à support dans le graphe de f et on a $\mathbf{R}\Phi_f(\mathcal{F}) \approx \mathbf{R}\Phi_{\tilde{f}}(g_*\mathcal{F})$.

Dans la suite nous supposerons donc toujours que f est lisse et donc que Y *est une hypersurface lisse de* X.

On peut alors interpréter les cycles évanescents d'une autre manière. A tout faisceau $\mathcal{F}$ constructible sur X on peut associer son microlocalisé le long de Y, $\mu_Y(\mathcal{F})$, qui est un complexe de faisceaux sur $\Lambda = T_Y^*X$ le fibré conormal à Y dans X (cf. Kashiwara-Schapira [K-S]).

Une coordonnée t sur $\mathbf{C}$ étant fixée, $\dot{T}_Y^*X = T_Y^*X - \{0\}$ s'identifie à $Y \times \mathbf{C}^*$ et $\mu_Y(\mathcal{F})$ est localement constant sur $\mathbf{C}^*$, donc si on fixe un point base de $\mathbf{C}^*$, $\mu_Y(\mathcal{F})$ est donné par un complexe sur Y avec une action de la monodromie de $\mathbf{C}^*$. Ce complexe n'est autre que $\mathbf{R}\Phi_f(\mathcal{F})$ avec l'action T de la monodromie.

2. Correspondance de Riemann-Hilbert

Soit $\mathcal{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels à coefficients holomorphes sur X.

Un $\mathcal{D}_X$-module à gauche $\mathcal{M}$ est cohérent si, localement, on peut l'écrire comme le conoyau d'une application linéaire $\mathcal{D}_X^{N_1} \xrightarrow{A_0} \mathcal{D}_X^{N_0}$. Un tel module admet (localement) une résolution libre de longueur finie, c'est à dire qu'il existe un complexe

$$0 \to \mathcal{D}_X^{N_p} \xrightarrow{A_{p-1}} \mathcal{D}_X^{N_2} \to \cdots \xrightarrow{A_0} \mathcal{D}_X^{N_0} \to 0 \tag{1}$$

dont les groupes de cohomologie sont nuls sauf le dernier qui vaut $\mathcal{M}$.

A un tel complexe on associe le complexe des solutions :

$$0 \leftarrow \mathcal{O}_X^{N_p} \xleftarrow{A_{p-1}} \cdots \leftarrow \mathcal{O}_X^{N_1} \xleftarrow{A_0} \mathcal{O}_X^{N_0} \leftarrow 0 \tag{2}$$

où A_j (qui est une matrice d'opérateurs différentiels) opère de la manière habituelle sur les fonctions holomorphes de $\mathcal{O}_X$.

Le complexe (2) dépend du choix de la résolution (1) de $\mathcal{M}$ mais par contre les groupes de cohomologie de ce complexe (et en particulier le noyau de A_0; c'est à dire les solutions du système $A_0 u = 0$) ne dépendent que de $\mathcal{M}$. Plus précisément l'image de (2) dans la catégorie dérivée des faisceaux de $\mathbf{C}$-vectoriels sur X ne dépend que de $\mathcal{M}$, on la note $\mathbf{R}\hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ ou encore $\mathrm{Sol}(\mathcal{M})$.

Plus généralement, étant donné un complexe $\mathcal{M}^\cdot$ du type (1) (mais dont les groupes de cohomologie ne sont pas nécessairement nuls) on lui associe de la même manière son complexe de solutions $\mathbf{R}\hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{O}_X) = \mathrm{Sol}(\mathcal{M}^\cdot)$.

Un $\mathcal{D}_X$-module cohérent est dit holonome si sa variété caractéristique est une sous-variété lagrangienne de T^*X, il est dit de plus régulier si ses solutions séries formelles sont égales à ses solutions convergentes. (Nous renvoyons à [K-K1] pour une définition précise).

On a le théorème suivant ([K-K1],[K3],[Me]) :

Théorème.—

1) *Si les groupes de cohomologie du complexe (1) sont holonomes, alors le complexe (2) est à cohomologie constructible.*

2) *Inversement, à tout complexe de faisceaux de* $\mathbf{C}$*-espaces vectoriels sur* X *à cohomologie constructible, on peut associer un complexe de* $\mathcal{D}_X$*-modules dont les groupes de cohomologie sont holonomes réguliers.*

Plus précisément, le foncteur $\mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{O}_X)$ définit une équivalence de catégorie entre les complexes de $\mathcal{D}_X$-modules à cohomologie holonome régulière et les complexes de $\mathbf{C}$-vectoriels à cohomologie constructible à condition de se placer dans les catégories dérivées (c'est à dire d'identifier deux complexes s'il y a entre eux un morphisme qui induit un isomorphisme en cohomologie), c'est la correspondance de **Riemann-Hilbert.**

De plus on sait caractériser les complexes à cohomologie constructible qui, par Riemann-Hilbert, proviennent d'un $\mathcal{D}_X$-module, ce sont les "faisceaux pervers".

Comme on sait que si $\mathcal{F}$ est un faisceau pervers, il en est de même de $\mathbf{R}\Phi_f(\mathcal{F})$, on voit que via Riemann-Hilbert on a définit une application "cycles évanescents" qui a un module holonome régulier sur X associe un module holonome régulier sur Y.

Il est naturel d'essayer de construire directement ces cycles évanescents au niveau des $\mathcal{D}_X$-modules holonomes réguliers sans passer par l'intermédiaire de la correspondance de Riemann-Hilbert.

C'est ce qui a été fait par Malgrange [M], Kashiwara [K2] et Sabbah [S] dans un cadre plus général, celui des $\mathcal{D}_X$-modules qui admettent une b-fonction, ou modules "spécialisables" :

Définition.— *Fixons des coordonnées* $(x_1, \ldots, x_n, t)$ *de* X *telles que* $Y = \{t = 0\}$.

Un $\mathcal{D}_X$*-module cohérent* $\mathcal{M}$ *est dit "spécialisable" le long de* Y *si pour toute section* u *de* $\mathcal{M}$ *il existe un polynôme* b *et un opérateur* P *de la forme*

$$P(x,t,D_x,D_t) = b(tD_t) + tQ(x,t,D_x,tD_t)$$

tel que $Pu = 0$.

En particulier tout $\mathcal{D}_X$-module holonome est spécialisable (Kashiwara [K1]).

Par exemple si on considère un système à une seule inconnue $P_1u = \ldots = P_Nu = 0$, le $\mathcal{D}_X$-module associé est $\mathcal{D}_X/\mathcal{D}_XP_1 + \ldots + \mathcal{D}_XP_N$ et dire qu'il est spécialisable signifie qu'il existe dans l'idéal $\mathcal{D}_XP_1 + \ldots + \mathcal{D}_XP_N$ un opérateur de la forme $b(tD_t) + tQ(t,x,D_x,tD_t)$.

Nous n'expliciterons pas ici la construction de Malgrange-Kashiwara, mais nous allons donner une autre construction qui fait appel à un problème de Cauchy dans un espace d'opérateurs microdifférentiels.

3. Problème de Cauchy.

Commençons par rappeler brièvement comment s'énonce le problème de Cauchy dans le cadre des $\mathcal{D}_X$-modules.

L'hypersurface Y est dite non caractéristique pour le module $\mathcal{M}$ si la variété caractéristique de $\mathcal{M}$ ne rencontre pas le conormal $T^*_Y X$ à Y dans X.

Dans ce cas, étant donnée une équation t de Y, la fonction t considérée comme un opérateur différentiel $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ est injective et a un conoyau $\mathcal{M}_Y$ qui est un $\mathcal{D}_Y$-module cohérent et on a le théorème de "Cauchy-Kovalewsky" :

$$\mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)|_Y \simeq \mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}_Y)$$

(Autrement dit $\mathcal{M}_Y$ décrit les relations entre les traces sur Y des solutions de $\mathcal{M}$).

Lorsque $\mathcal{M}$ est un module spécialisable quelconque on peut encore considérer le complexe $\mathcal{M} \xrightarrow{t} \mathcal{M}$, le noyau de t n'est plus nécessairement nul mais le noyau et le conoyau sont encore cohérent ([L-S]).

4. Deuxième microlocalisation.

On considère comme précédemment une variété analytique complexe X et une hypersurface lisse Y de X, on note $\Lambda = T^*_Y X$ le fibré conormal à Y dans X.

On peut définir sur Λ un faisceau $\hat{\mathcal{D}}^2_\Lambda$ qui nous permettra de calculer les cycles évanescents. Nous allons ici décrire ce faisceau d'anneaux par des symboles dans un système de coordonnées et nous renvoyons à [L] pour une définition plus intrinsèque.

Fixons donc des coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n, t)$ de X avec $Y = \{t = 0\}$ et notons (x, τ) les coordonnées correspondantes de Λ.

Etant donné un ouvert Ω homogène réel en τ on définit, pour $m \in \mathbf{Z}$, $\hat{\mathcal{S}}_m(\Omega)$ comme l'ensemble des séries formelles $P = \sum_{-\infty<k\leq m} P_k(x, \tau, x^*, \tau^*)$ qui vérifient :

a) P_k est holomorphe en (x, τ) sur Ω et polynomiale en $(x^*, \tau^*) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$.

b) $\forall k \in \mathbf{Z}, \exists C_k > 0$, $\exists N_k \in \mathbf{N}$ $|P_k(x, \tau, x^*, \tau^*)| \leq C_k(1 + |\tau|^k)(|x^*| + |\tau||\tau^*|)^{N_k}$

On pose ensuite $\hat{\mathcal{S}}(\Omega) = \bigcup_m \hat{\mathcal{S}}_m(\Omega)$ et $\hat{\mathcal{S}}_{-\infty}(\Omega)$ est l'ensemble des séries $\sum P_k$ de $\hat{\mathcal{S}}(\Omega)$ telles que la nouvelle série $\sum Q_k$ définie par $Q_k = \sum_{\ell\geq k} P_\ell$ soit encore dans $\hat{\mathcal{S}}(\Omega)$.

Alors le faisceau $\hat{\mathcal{D}}^2_\Lambda$ peut être défini en un point θ de Λ comme $\varinjlim_{\theta\in\Omega} \hat{\mathcal{S}}(\Omega)/\hat{\mathcal{S}}_{-\infty}(\Omega)$.

(C'est à dire que si P est un élément de $\hat{\mathcal{D}}^2_\Lambda$ défini au voisinage de θ, il existe un voisinage Ω de θ tel que P soit représenté par un élément de $\hat{\mathcal{S}}(\Omega)$ modulo $\hat{\mathcal{S}}_{-\infty}(\Omega)$.

Si $P(x, t, D_x, D_t)$ est un opérateur différentiel de $\mathcal{D}_X$ défini au voisinage de Y, on peut l'écrire sous la forme

$$P(x, t, D_x, D_t) = \sum_{\alpha,\beta} p_{\alpha\beta}(x, t) D_x^\alpha D_t^\beta$$

soit en développant en série de Taylor en t :

$$P(x,t,D_x,D_t) = \sum_{\alpha,\beta,j} p^j_{\alpha\beta}(x) t^j D_x^\alpha D_t^\beta$$

et on lui associe l'élément de $\hat{\mathcal{D}}^2_\Lambda$ définit par la série $\sum_k P_k$ avec

$$P_k(x,\tau,x^*,\tau^*) = \sum_{\beta-j=k} p^j_{\alpha\beta}(x) \tau^{*j} x^{*\alpha} (-\tau)^\beta.$$

On obtient ainsi un morphisme injectif $p^{-1}\mathcal{D}_x \to \mathcal{D}^2_\Lambda$ (avec $p : \Lambda \to X$) et la structure d'anneau de $\mathcal{D}_X$ s'étend de la manière évidente à $\hat{\mathcal{D}}^2_\Lambda$ tout entier.

Notons $\Lambda' = T^*_Y X \setminus \{0\}$ et $q : \Lambda' \to Y$.

Théorème 1.— *Soit* $\mathcal{M}$ *un* $\mathcal{D}_X$*-module spécialisable et* $\hat{\mathcal{M}} = \hat{\mathcal{D}}^2_\Lambda \bigotimes_{p^{-1}\mathcal{D}_X} p^{-1}\mathcal{M}$.

a) *La fonction* t *opérant de* $\hat{\mathcal{M}}$ *dans lui-même est surjective sur* Λ'*, son noyau* $\tilde{\Phi}(\mathcal{M})$ *est un faisceau sur* Λ' *qui est localement de la forme* $q^{-1}\mathcal{N}$ *pour* $\mathcal{N}$ $\mathcal{D}_Y$*-module cohérent.*

b) *Si* $\mathcal{M}$ *et* $\mathcal{N}$ *sont deux modules spécialisables on a :*

$$\mathbf{R}\operatorname{hom}_{\hat{\mathcal{D}}^2_\Lambda}(\hat{\mathcal{M}}, \hat{\mathcal{N}}) \approx \mathbf{R}\operatorname{hom}_{q^{-1}\mathcal{D}_Y}(\tilde{\Phi}(\mathcal{M}), \tilde{\Phi}(\mathcal{N}))$$

La situation est donc un peu analogue a celle du paragraphe précédent avec un $\mathcal{D}_X$-module non caractéristique mais ici c'est le noyau de t qui est non nul et pas son conoyau.

Le résultat b) s'applique plus particulièrement à $\mathcal{N} = \hat{\mathcal{C}}^{\mathbf{R}}_{Y|X}$ complété formel du faisceau $\mathcal{C}^{\mathbf{R},f}_{Y|X}$ défini par Andronikof [A], on obtient alors :

$$\mathbf{R}\operatorname{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \hat{\mathcal{C}}^{\mathbf{R}}_{Y|X}) \simeq \mathbf{R}\operatorname{hom}_{q^{-1}\mathcal{D}_Y}(\tilde{\Phi}(\mathcal{M}), q^{-1}\mathcal{O}_Y)$$

L'espace $\Lambda' = T^*_Y X \setminus \{0\}$ est localement isomorphe à $Y \times \mathbf{C}^*$ donc $\tilde{\Phi}(\mathcal{M})$ qui est localement constant sur $\mathbf{C}^*$ est donné par un faisceau $\mathcal{N}$ sur Y, que l'on notera $\Phi(\mathcal{M})$, avec une action T de la monodormie de $\mathbf{C}^*$.

Théorème 2.— $(\Phi(\mathcal{M}), T)$ *est l'espace des cycles évanescents de Kashiwara-Malgrange.*

Pour la démonstration de ces théorèmes nous renvoyons à [L], en fait le théorème 1 se déduit facilement par des arguments algébriques du théorème suivant :

Théorème 3.— *Soit* $P = b(tD_t) + tQ(x,t,D_x,tD_t)$ *un opérateur différentiel avec* b *polynôme de degré* m*. Alors on a localement sur* Λ' *un isomorphisme :*

$$\hat{\mathcal{D}}^2_\Lambda / \hat{\mathcal{D}}^2_\Lambda P \simeq \left(\hat{\mathcal{D}}^2_\Lambda / \hat{\mathcal{D}}^2_\Lambda t\right)^m$$

Donnons une idée de la démonstration du théorème 3.

On a un théorème de type "Weierstrass" dans $\hat{\mathcal{D}}^2_\Lambda$ qui permet d'écrire P sous la forme $P = E\tilde{P}$ avec E inversible dans $\tilde{\mathcal{D}}^2_\Lambda$ et $\tilde{P}$ de la forme :

$$\tilde{P}(x,\tau,x^*,\tau^*) = (\tau\tau^*)^m + \sum_{j=0}^{m} P_j(x,x^*,\tau)(\tau\tau^*)^j$$

avec

$$P_j(x,x^*,\tau) = \lambda_j + \sum_{k>0} P_j^k(x,x^*)\tau^{-k}$$

Les nombres $\lambda_j \in \mathbf{C}$ sont les coefficients de b et P_j^k s'identifie à un l'opérateur $P_j^k(x,D_x)$ sur Y.

Le module $\hat{\mathcal{D}}^2_\Lambda/\mathcal{D}^2_\Lambda P$ est donc isomorphe à $(\hat{\mathcal{D}}^2_\Lambda)^m/(\hat{\mathcal{D}}^2_\Lambda)^m(t\mathfrak{I} - A)$ où $\mathfrak{I}$ est la matrice identité de dimension m et A est la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -P_0 & -P_1 & & \dots & -P_{m-1} \end{bmatrix}$$

On peut donc écrire $A = \sum_{k\geq 0} A_k\tau^{-k}$ avec

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -\lambda_0 & \dots & & & -\lambda_{m-1} \end{bmatrix}$$

et A_k matrice d'opérateurs différentiels sur Y.

Pour montrer le théorème il suffit de trouver une matrice R à coefficients dans $\hat{\mathcal{D}}^2_\Lambda$ telle que $R^{-1}(\tau^* - A\tau^{-1})R = \tau^*$, soit l'équation $\frac{\partial R}{\partial \tau} = A\tau^{-1}R$.

Nous chercherons R sous la forme $R = R_0(1 + \sum_{k\geq 1} R_k)$. Alors R_0 est solution de

$$\frac{\partial R_0}{\partial \tau} = A_0\tau^{-1}R_0$$

A_0 est une matrice à coefficients constants donc il existe une solution R_0 dont les coefficients sont de la forme $\tau^\alpha(\operatorname{Log}\tau)^j$ et vu la forme de A_0 ($\lambda_0,\dots,\lambda_{m-1}$ sont les coefficients de b), les nombres α sont les zéros de b et j varie de 0 à $\mu(\alpha) - 1$ où $\mu(\alpha)$ est la multiplicité de α comme zéro de b.

(La matrice R_0 est importante car c'est elle qui donne la monodromie T sur $\Phi(\mathcal{M})$.)

Les coefficients R_k seront ensuite définis par récurrence sur k comme solutions de

$$\frac{\partial R_k}{\partial \tau} = R_0^{-1}A_k\tau^{-k-1}R_0 + \sum_{j=1}^{k-1} R_0^{-1}A_{j-k}\tau^{+k-j-1}R_0R_j$$

Remarque : Lorsque P s'écrit $P = b(tD_t) + t\ Q(y,D_y,t,tD_t$ avec Q d'ordre inférieur ou égal au degré de b, l'opérateur $1 + \sum_{k>0} R_k$ définit ci-dessus est celui qui intervient dans Kashiwara-Kawai [K-K2] théorème 4.2.1.

Bibliographie.

[A] E. Andronikof, Thèse d'Etat Paris-Nord (juin 1987) et Microlocalisation tempérée, Exposé n°II, octobre 1987 dans ce séminaire.

[D] P. Deligne, Le formalisme des cycles évanescents, SGA 7, II, exposés 13 et 14, Springer Lect. Notes in Math. n°340 (1973).

[K1] M. Kashiwara, On the holonomic systems of differential equations II Inv. Math. 49 (1978), 121-135.

[K2] M. Kashiwara, Vanishing cycle sheaves and holonomic systems of differential equations, Springer Lect. Notes in Math. n°1016 (1983).

[K3] M. Kashiwara, The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems. Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ. t 20, 319-365 (1984).

[K-K1] M. Kashiwara and T. Kawai, On the holonomic systems of differential equations III, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ. 17, (1981), 813-979.

[K-K2] M. Kashiwara and T. Kawai, Second microlocalization and asymptotic expansion, Springer Lect. Notes in Physics n°126, (1980), 21-76.

[K-S] M. Kashiwara et P. Schapira, Microlocal Study of Sheaves, Astérisque 128 (1985).

[L] Y. Laurent, Vanishing cycles ans second microlocalization, a paraître dans Vol. in honour of Professor Sato.

[L-S] Y. Laurent et P. Schapira, Images inverses des modules différentiels, Comp. Mathem 61, (1987), 229-251.

[M] B. Malgrange, Polynôme de Bernstein-Sato et cohomologie évanescente, Astérisque no101-102 (1983).

[Me] Z. Mebkhout, Une équivalence de catégories, Comp. Mathem. 51 (1984), 243-267.

[S] C. Sabbah, $\mathcal{D}$-modules et cycles évanescents, Proceedings of the Conference held at La Rabida, 1984, Hermann, Paris 1987.

Y. LAURENT
Université Paris-Sud
Mathématiques Bât. 425
91405 Orsay Cedex
France