Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

B. Helffer

Opérateurs de Schrödinger avec champ magnétique

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1986-1987), exp. nº 10, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1986-1987____A9_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tel (6) 941.82 00 - Poste N°
Telex ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES 1986 - 1987

OPERATEURS DE SCHRÖDINGER AVEC CHAMP MAGNETIQUE

par B. HELFFER

Exposé n°X

20 Janvier 1987

§ 1. INTRODUCTION - RESULTATS GENERAUX.

On s'intéresse à l'étude du spectre de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique et potentiel électrique dans $\mathbb{R}^n$, un ouvert régulier Ω de $\mathbb{R}^n$ (on considèrera alors la réalisation de Dirichlet) ou une variété C^∞ compacte M.

L'opérateur dans $\mathbb{R}^n$ s'écrit par exemple :

$$P_A(h) = \Delta_A(h) + V$$

avec

$$(1.1) \qquad \begin{cases} \Delta_A(h) = \sum_{j=1}^{n} (h\, D_{x_j} - A_j)^2 \\ A_j \in C^\infty \ , \ V \in C^\infty \ , \ V \geqslant - C \end{cases}$$

h est ici un petit paramètre > 0.

Il est alors classique (cf.[AV-HE-SI] ou [HU])que $P_A(h)$ (ou $P_A^\Omega(h)$ la réalisation de Dirichlet dans Ω) a une unique extension autoadjointe sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ (resp. $L^2(\Omega)$) partant de $C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ (resp. $C_o^\infty(\Omega)$). Un autre des aspects classiques de cette théorie est l'invariance par changement de Jauge : si $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, alors $U^{-1}\, P_A^\Omega U$ avec

$$U : u \to Uu = e^{i\varphi/h}\, u$$

est égal à $P^\Omega_{\vec{A}+\nabla\varphi}$.

En particulier, P_A^Ω et $P_{A+\nabla\varphi}^\Omega$ ont même spectre.

On préfère souvent travailler avec la 1-forme :

$$(1.2) \qquad \omega_A = \sum_{j=1}^{n} A_j\, dx_j$$

et la remarque précédente suggère que c'est la classe de ω_A modulo les différentielles $d\varphi$ qui joue le rôle important. Tout semble donc lié à la donnée de

$$(1.3)\quad B = d\omega_A = \sum_{j<k} \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \right) dx_j \wedge dx_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum B_{jk}\, dx_j \wedge dx_k$$

On verra qu'il faut être plus méticuleux, particulièrement dans le cas non simplement connexe.

Les questions qui nous préoccupent dans cet exposé sont les suivantes :

Q1 Quand la résolvante est-elle compacte ?

Q2 Comment la 1ère valeur propre dépend-elle de A ?

Q3 Quelle est la multiplicité de la 1ère valeur propre ?

Signalons que d'autres problèmes sont étudiés en collaboration avec J. Sjöstrand sur d'autres aspects semi-classiques que ceux présentés ici ([HE-SJ]$_{3,4}$) . Répondons tout d'abord à la question Q1 qui ne se pose que dans $\mathbb{R}^n$ ou dans un ouvert non borné. Il est connu que même lorsque V = 0, on peut avoir des bouteilles magnétiques dites de 3ème espèce (cf.[AV-HE-SI]), c.à d. avoir une résolvante compacte.

La théorie des représentations des groupes de Lie nilpotents (cf.[HE-NO]) fournit une mine d'exemples comme par exemple dans $\mathbb{R}^3$:

$$(D_{x_1} - x_2 x_3)^2 + (D_{x_2} + x_1 x_3)^2 + D_{x_3}^2$$

Le théorème suivant contient la plupart des exemples non pathologiques connus (une version légèrement plus générale est donnée dans [HE-MO]) :

<u>Théorème 1.1.</u> [HE-MO] On suppose que $V(x) = \sum_{j=1}^{p} V_j(x)^2$ avec $V_j \in C^\infty$.
On pose :

$$(1.4)\quad m_r(x) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{|\alpha| \leq r-1} |\partial_x^\alpha V_j| + \sum_{j,k} \sum_{|\alpha| \leq r-2} |\partial_x^\alpha B_{jk}|$$

et on suppose que

$$(1.5)\quad m_{r+1}(x) \leq C\, m_r(x)$$

$$(1.6)\quad m_r(x) \xrightarrow[|x| \to \infty]{} \infty$$

alors $P_A(h)$ est à résolvante compacte.

La démonstration s'inspire des techniques de Kohn [KO] et d'Avron-Herbst-

Simon [AV-HE-SI] . Il s'agit de montrer une injection du domaine de P_A dans un espace L^2_ϕ avec $\phi \to \infty$. On montre l'existence d'une puissance fractionnaire ε de m t.q. l'on puisse choisir $\phi = m^\varepsilon$.

Problème en cours. (avec J. Nourrigat, X.P. Wang)
Regarder le cas de l'équation de Dirac. Le théorème ci-dessus est sûrement faux pour Dirac.

Notons qu'un critère moins explicite vient d'être donné dans [W] .

Dans [HE-MO], on donne une caractérisation du spectre essentiel quand (1.6) n'est pas vérifiée. En renforçant l'hypothèse (1.6), on peut décrire le spectre essentiel de $P^A(h)$ comme la réunion des spectres d'une famille d'opérateurs limites (à l'∞) qui sont des opérateurs de Schrödinger à potentiel magnétique et électrique polynômiaux. On retrouve ici les techniques d'hypoellipticité de [HE-NO], mais également l'esprit du célèbre théorème de HVZ .

Revenons aux questions Q2 et Q3. Il résulte de l'inégalité de Kato que si $\lambda_A(h)$ désigne la 1ère valeur propre (on suppose qu'elle existe), on a toujours :

$$\lambda_A(h) \geqslant \lambda_o(h) \tag{1.7}$$

Notons que l'inégalité de Kato permet également d'obtenir :

$$\operatorname{Inf}\sigma_{ess}(P_A(h)) \geqslant \operatorname{Inf}\sigma_{ess}(P_o(h)) \tag{1.8}$$

(où σ_{ess} désigne le spectre essentiel).

Au §2, on donnera un nouvel exemple où en réponse à la question Q3 on a multiplicité > 1 (les exemples antérieurs sont dus à [AV-HE-SI] et [LA-OCA]).

Aux §3 et 4, on tache de répondre à la question Q2 en prenant comme point de départ la démonstration de R. Lavine et O'Caroll de (1.7). Comme sous-produit de cette étude, on donne un nouveau contre-exemple à la conjecture paramagnétique de [HO-SCH-SE] qui est une variante du contre-exemple de J. Avron et B. Simon [AV-SI].

§ 2. UN EXEMPLE OU LA MULTIPLICITE DE LA 1ère VALEUR PROPRE EST 2 .

Il est connu que la multiplicité de la première valeur propre (qui est 1 pour l'opérateur de Schrödinger) peut devenir double lorsqu'on ajoute un potentiel magnétique (cf. les travaux de $[\text{AV-HE-SI}]_1$ et [LA-OCA]). Nous donnons ici une variante d'un exemple donné dans $[\text{HE-SJ}]_3$ et qui s'appuie sur le théorème de Kramers (cf. [LA-LI], [WA]) qui est classiquement utilisé pour montrer que les valeurs propres de l'équation de Dirac sont doubles.

On considère dans $\mathbb{R}^2$ l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}^2 - B(0,\delta)$ $(\delta > 0)$, un potentiel V tel que : $V(x) = V(-x)$, un potentiel magnétique $\vec{A}$ t.q. $\vec{A}(-x) = -\vec{A}(x)$ dans Ω et t.q. $B = 0$ dans Ω.

On suppose que $V \to \infty$ lorsque $|x| \to \infty$ et que

$$\Phi = \int_{\partial B(0,\delta)} \omega_A \neq 0 \tag{2.1}$$

Comme exemple, on peut prendre le potentiel d'Oerstedt-Ampère : [cf.V.W] $\omega_A = \dfrac{-x_2 dx_1 + x_1 dx_2}{x_1^2 + x_2^2}$. Alors $P^\Omega_{tA}(1)$ est a résolvante compacte et commute avec l'opérateur Σ défini par

$$(\Sigma u)(x) = u(-x) \tag{2.2}$$

Pour $t = 0$, la 1ère valeur propre de $P^\Omega_o(1)$ correspond à une fonction propre paire. La 1ère valeur propre de $P^\Omega_o(1)$ correspondant à une fonction propre impaire est strictement supérieure :

$$\lambda^\Omega_o \text{ paire} < \lambda^\Omega_o \text{ impaire} \tag{2.3}$$

Soit φ la solution multivaluée de $\nabla\varphi = A$. Pour $t = \frac{2\pi}{\Phi}$, la fonction $e^{it\varphi}$ est bien définie dans Ω.

En particulier, $P_{\frac{2\pi}{\Phi}A}$ est unitairement équivalent à P_o par conjugaison par $e^{i 2\pi \frac{\varphi}{\Phi}}$.

La 1ère fonction propre paire u_o de P_o est envoyée sur la 1ère fonction propre de $P_{\frac{2\pi}{\Phi}A}$: $e^{-i 2\pi\frac{\varphi}{\Phi}} u_o$. Observons maintenant que la fonction

$x \to e^{-i\, 2\pi\, \varphi(x)/\Phi}$ est impaire car : $\frac{2\pi}{\Phi}(\varphi(x)-\varphi(-x)) = \frac{2\pi}{\Phi}(\frac{1}{2}\int\omega_A) = \pi$.

La 1ère fonction propre de $P_{\frac{2\pi}{\Phi}A}$ est impaire.

$$(2.4)\qquad \lambda^{\Omega}_{\frac{2\pi}{\phi}A}{}^{\text{impaire}} < \lambda^{\Omega}_{\frac{2\pi}{\phi}A}{}^{\text{paire}}$$

La conjonction de (2.3) et (2.4) permet facilement la détermination d'un t t.q.

$$\lambda^{\Omega}_{tA}{}^{\text{impaire}} = \lambda^{\Omega}_{tA}{}^{\text{paire}}$$

Dans l'esprit du §4, on peut en créant un puits loin de $B(0,\delta)$ produire les inégalités (2.3) et (2.4), pour h assez petit, pour un opérateur $P_A(h)$ avec un champ magnétique B à support dans $B(0,\delta)$.
On va cependant pousser l'argument pour démontrer la propriété :

$$(2.5)\qquad \lambda^{\Omega}_{\frac{\pi}{\Phi}A}{}^{\text{impaire}} = \lambda^{\Omega}_{\frac{\pi}{\Phi}A}{}^{\text{paire}}$$

Considérons l'opérateur J défini par

$$(Ju)(x) = e^{-2i\pi \frac{\varphi}{\Phi}(x)}\,\overline{u(x)}$$

J commute avec $P^{\Omega}_{\frac{\pi}{\phi}A}$ et est antilinéaire.

Considérons $K = \Sigma J$. On vérifie que $K^2 = -I$ et que K commute avec $P^{\Omega}_{\frac{\pi}{\phi}A}$. Le théorème de Kramers nous dit alors que si u est un vecteur propre, alors Ku est un vecteur propre indépendant ; En effet, si on avait $Ku = \lambda u$ on aurait $K^2u = -u = K(\lambda u) = |\lambda|^2 u$, ce qui est contradictoire. Par ailleurs K inverse la parité. On a donc bien (2.5).

Le problème est étudié par une méthode différente dans un cadre semi-classique plus générale dans $[\text{HE-SJ}]_{(3)}$.

<u>Question</u>. Peut-on fabriquer n'importe quelle multiplicité ?...

§ 3 . VARIATION DE LA 1ère VALEUR PROPRE EN FONCTION DU POTENTIEL MAGNETIQUE : ETUDE QUALITATIVE.

Le théorème principal est conjecturé (et pratiquement démontré) par R. Lavine et O'Caroll [LA-O'CA] .

<u>Théorème 3.1</u>. On suppose que Ω est connexe. On garde les hypothèses (1.1) ; h est fixé et on suppose que $P^{\Omega}_{o}(h)$ et $P^{\Omega}_{A}(h)$ ont une première valeur propre

$\lambda_o^\Omega(h)$ (resp. $\lambda_A^\Omega(h)$).

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\lambda_A^\Omega(h) = \lambda_o^\Omega(h)$

(ii) $P_A^\Omega(h)$ et $P_o^\Omega(h)$ sont unitairement équivalents

(iii) (3.1) $\begin{cases} B = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et pour tout chemin } \gamma \text{ dans } \Omega \\ \frac{1}{2\pi h} \int_\gamma \omega_A \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Remarque 3.2..Si Ω est simplement connexe, (iii) devient simplement $B = 0$ .On a un théorème analogue sur une variété.

Démonstration. Le point délicat est de montrer (i) $\Rightarrow$ (iii). On part de l'identité de Lavine-O'Caroll. Si u_o est une première fonction propre de $P_o^\Omega(h)$, on a pour tout $\varphi \in C_o^\infty(\Omega)$.

$$(3.2) \qquad \| (h\nabla - iA - h \frac{\nabla u_o}{u_o})\varphi \|^2 = < P_A^\Omega \varphi/\varphi > - \lambda_o^\Omega \|\varphi\|^2$$

Supposons que $\lambda_A^\Omega(h) = \lambda_o^\Omega(h)$ et soit $u_A(h)$ une fonction propre de $P_A^\Omega(h)$ de norme 1 correspondant à $\lambda_A^\Omega(h)$. Il existe une suite $\varphi_n \in C_o^\infty(\Omega)$ t.q.

$$\varphi_n \longrightarrow u_A \text{ dans } L^2$$

et

$$P\varphi_n \longrightarrow Pu_A \text{ dans } L^2$$

On en déduit alors en utilisant (3.2) que :

$$(3.3) \qquad (h\nabla - iA - h \frac{\nabla u_o}{u_o}) u_A = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Posant $\varphi_A = u_A/u_o$, on obtient :

$$(3.4) \qquad h \, d\varphi_A = i\varphi_A \, \omega_A$$

De (3.4), on déduit que $\varphi_A \neq 0$ dans Ω . En effet si $\varphi_A(y) = 0$ pour un $y \in \Omega$, (3.4) impliquerait que φ_A est plat en y . Grâce à un théorème d'Aronszajn-Cordes ([AR],[CO] , cf.[AL,BA] pour l'énoncé directement utilisable), on obtiendrait alors que $\varphi_A \equiv 0$ dans la composante connexe de y donc dans Ω . Localement, pour une détermination du Logarithme, on obtient :

$$hd(\mathrm{Log}|\varphi_A|) + i\, hd(\mathrm{Arg}\varphi_A) = i\omega_A$$

soit $|\varphi_A| = \mathrm{cste}$ et $hd(\mathrm{Arg}\varphi_A) = \omega_A$.

On en déduit (3.1).

Remarque 3.3. Comme déjà signalé chez [LA-O'CA], il y a des liens directs entre ce théorème et la fameuse expérience proposée par Aharanov-Bohm en 1959 [AH-BO] qui avait donné lieu à des discussions sur la validité de la mécanique quantique (cf.[V.W],[WU,YA])

§ 4. VARIATION DE LA 1ère VALEUR PROPRE EN FONCTION DU POTENTIEL MAGNETIQUE : ETUDE SEMI-CLASSIQUE.

Pour donner des exemples où on mesure explicitement $\lambda_A(h) - \lambda_o(h)$, on s'inspire des perturbations du type : la puce de l'éléphant, introduites pour l'étude des problèmes à plusieurs puits par Jona-Lasinio, Martinelli, Scoppola [JLMS] et étudiés plus précisément dans $[\text{HE-SJ}]_2$ et $[\text{SI}]_2$.

On abordera le problème général via 3 étapes

4.1 le modèle sur S^1

4.2 le modèle plan moins un disque

4.3 la puce magnétique

(4.1) Le modèle sur S^1 . Considérons sur S^1 l'opérateur : $(hD_x - A)^2 + V$ avec $A = \mathrm{cste}$ et $V\ C^\infty$. On identifie parfois V et sa version 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

Le premier exercice est de prendre $V = 0$ et de vérifier le théorème (3.1) en prenant les séries de Fourier.

Dans le cas général, on remarque que l'étude du spectre de $P_A(h)$ sur S^1 est équivalente à celle du problème de Floquet sur $\mathbb{R}$:

$$(4.1) \qquad \begin{aligned} (h^2 D_x^2 + V(x))\, u &= \lambda u \\ u(x+2\pi) &= e^{i\phi/h} u(x) \qquad \text{avec } \phi = 2\pi A \end{aligned}$$

C'est exactement le problème qui apparaît dans l'étude des bandes du spectre de Schrödinger avec potentiel périodique. Dans le cadre semi-classique, le problème est étudié dans les articles d'Harrell [HA], B. Simon $[\text{SI}]_1$ et d'Outassourt [OU]. Le théorème d'Outassourt [OU] donne par exemple :
On suppose que V n'admet qu'un puits non dégénéré par période, alors, si $\lambda_A(h)$ désigne la 1ère valeur propre du problème (4.1), on a :

(4.2) $$\lambda_A(h) - \lambda_o(h) = (1-\cos\frac{2\pi A}{h})\, \alpha(h)\, e^{-S_o/h} + O(e^{-S_o/h - \varepsilon_o/h})$$

avec $\varepsilon_o > 0$

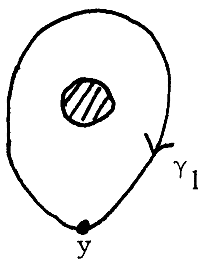
et avec : $\left\{\begin{array}{l} O \text{ uniforme par rapport à } A . \\ \alpha(h) \text{ un symbole elliptique } > 0 \\ S_o = \int_o^{2\pi} \sqrt{(V-\mathrm{Min}V)(t)}\,dt \end{array}\right.$

(4.2) Le modèle du plan moins un disque. Comme au §2, on considère $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus B(0,\delta)$ $(0 < \delta < 1)$ et l'opérateur

$$P_A^\Omega(h) = (h D_{x_1} - A_1)^2 + (h D_{x_2} - A_2)^2 + V$$

On suppose que $\vec{A}$ et V sont dans $C^\infty(\bar{\Omega})$, que $B = 0$ et que V est un potentiel à un puits non dégénéré en $y = (0,-1)$ (on normalise par $V(y) = 0$).
On regardera en fait $P_{tA}^\Omega(h)$ avec $t \in \mathbb{R}$ (pour regarder la dépendance en t).
On s'intéresse donc à l'asymptotique lorsque $h \to 0$ de $\lambda_{tA}^\Omega(h) - \lambda_o^\Omega(h)$. Pour observer le phénomène attendu, on supposera que le potentiel électrique crée une barrière entre $\partial\Omega$ et le puits y de sorte qu'un aller et retour de y à $\partial\Omega$ (pour la distance d'Agmon $V\, d_x^2$) est plus long que de faire un tour autour de $\partial\Omega$.
Plus précisément, soit $S_o = d_V(y,\partial\Omega)$ et soit S_1 la longueur minimale pour la distance d'Agmon d'un chemin fermé passant par y et non homotope à 0 .

Fig.



Pour simplifier, on supposera que S_1 est atteint le long d'une unique courbe $\gamma_1 \subset \Omega$. L'hypothèse fondamentale est :

(4.3) $$S_1 < 2\, S_o$$

On pose $\Phi = \int_{\gamma_1} \omega_A$ et on fait une hypothèse de non-dégénerescence de la "géodésique minimale" γ_1 (entre le point y identifié à un point $y^{(0)}$ du revêtement Ω^R et un autre point au-dessus de y différent de $y^{(0)}$) du type introduit dans $[HE-SJ]_1$.

On a alors le théorème suivant :

Théorème 4.1. Sous les hypothèses précédentes, on a :

$$\lambda_{tA}^{\Omega}(h) - \lambda_{o}^{\Omega}(h) = (1-\cos \frac{t\phi}{h}) \, \alpha(h) \, e^{-S_1/h} + O(e^{-(S_1+\varepsilon_o)/h}) \tag{4.4}$$

avec $\varepsilon_o > 0$.

O uniforme par rapport à t

et $d(h)$ elliptique > 0

Esquisse de la démonstration. Dans le revêtement Ω^R muni de la distance d'Agmon transporté d_V^R , on considère un ouvert convenable M_{ε_1} simplement connexe contenant la boule $B(y, \frac{S_1}{2} + \varepsilon_1)$ (avec $\varepsilon_1 > 0$, les boules sont pour la métrique d'Agmon). Comme précédemment y est identifié à un point $y^{(0)}$ de Ω^R . On désigne par u_o^R la première fonction propre normalisée du problème de Dirichlet dans M_{ε_1} avec potentiel magnétique nul associé à la valeur propre $\lambda_M^R(h)$.

Soit φ^R la solution dans Ω^R de :

$$\varphi^R(y^{(0)}) = 0 \quad , \quad \nabla\varphi^R = A$$

Soit enfin χ^R une fonction à support compact dans M_{ε_1} et égale à 1 sur $B(y, \frac{S_1}{2} + \frac{\varepsilon_1}{2})$. Alors une fonction propre approchée de $P_{tA}^{\Omega}(h)$ est construite en posant :

$$u_{tA}^{\Omega}(x,h) = \sum_{\substack{\pi(\dot{x})=x \\ \dot{x}\in\Omega^R}} (\chi^R(\dot{x}) e^{it\frac{\varphi^R(\dot{x})}{h}} u_o^R(\dot{x}))$$

où π est la projection canonique de Ω^R sur Ω .

On montre alors que :

$$\lambda_{tA}^{\Omega}(h) - \lambda_M^R(h) = ((P_{tA} - \lambda_M^R) \, u_{tA}^{\Omega}(h)/u_{tA}^{\Omega}(h)) + O(e^{-(S_1+\varepsilon_1/h)})$$

La dépendance en A est alors très explicite et on conclut comme dans le travail de A. Outassourt [OU].

4.3. La puce magnétique. On travaille maintenant dans $\mathbb{R}^2$ et on suppose que le champ magnétique est confiné dans le disque $B(0,\delta)$. On garde toutes les autres hypothèses du § 4.2 en particulier (4.3).

On a alors le théorème :

Théorème 4.2. Sous les hypothèses précédentes :

$$\lambda_{tA}(h) - \lambda_o(h) = (1-\cos \frac{t\phi}{h})\alpha(h)e^{-S_1/h} + O(e^{-(S_1+\varepsilon_o)/h}) \tag{4.5}$$

avec $\varepsilon_o > 0$.
O est uniforme pour $t \in [t_o,t_1]$
$\alpha(h)$ elliptique > 0

Démonstration. Compte tenu d'un résultat sur la décroissance des fonctions propres de $P_{tA}(h)$ associées aux premiers niveaux (elles décroissent comme $e^{-\frac{d_V(x,y)}{h}}$) (cf.[HE-SJ]$_3$) , la comparaison entre les premières valeurs propres de $P_{tA}(h)$ et celles de $P^{\Omega}_{tA}(h)$ donne une variation maximale de l'ordre de $O_\varepsilon(e^{-2\frac{d_V(y,\partial\Omega)}{h}+\frac{\varepsilon}{h}}) = O_\varepsilon(e^{-2S_o/h+\varepsilon/h})$ $(\forall\varepsilon>0)$(cf.[HE-SJ]$_1$)

(4.4) et (4.3) donnent alors le résultat.

Remarque 4.3. On laisse au lecteur le soin d'imaginer des extensions naturelles sur les variétés. Les problèmes Mathématiques qui en découlent sont de même nature au niveau topologique que ceux apparaissant dans l'expérience de Aharanov-Bohn. Il y a cependant une différence sensible. L'effet Aharanov-Bohn semble être un problème de Scattering. Nous avons introduit ici un problème de première valeur propre.

4.4. Contre-exemple à la conjecture paramagnétique. Des idées voisines de celles développées ici donnent également des contre-exemples à la conjecture paramgnétique formulée dans [HO-SCH-SE], reprise dans [AV-HE-SI] et finalement infirmée par J. Avron et B. Simon [AV-SI] (Nous remercions R. Seiler de nous avoir signalé cet article).
Rappelons qu'il s'agit d'étudier dans $L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2)$ l'opérateur :

$$\widetilde{P}_{tA}(h) = I_d\left(\sum_{j=1}^{2} (h\, D_j - tA_j)^2 + V(x) + th \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B(x)\right)$$

avec $B(x) = \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_1}\right)(x)$.

(Dans le cas général c'est le carré de Dirac plus un potentiel électrique)

La conjecture était :

$$\text{Inf}\,\sigma\,(\widetilde{P}_{tA}(h)) \leqslant \inf\,\sigma(\widetilde{P}_o(h)) \tag{4.6}$$

Un contre exemple est alors aisément fourni dans l'esprit du § 4.3 (l'exemple de Avron-Simon est basée sur une idée très proche) de la manière suivante. On suppose que B est à support dans $B(0,\delta)$ et dans l'ouvert Ω introduit au § 4.2 on a :

$$\widetilde{P}^{\Omega}_{tA}(h) = \begin{pmatrix} P^{\Omega}_{tA}(h) & 0 \\ 0 & P^{\Omega}_{tA}(h) \end{pmatrix}$$

On a alors d'après (4.4) (en prenant toutes les hypothèses de ce §)

$$\widetilde{\lambda}^{\Omega}_{tA}(h) - \widetilde{\lambda}^{\Omega}_{o}(h) = (1-\cos \frac{t\phi}{h})\, \alpha(h)\, e^{-S_1/h} + O(e^{-(S_1+\varepsilon_o)/h}) \tag{4.7}$$

Quand on passe à $\mathbb{R}^2$, on fait une modification de l'ordre de $O(e^{-2S_o/h})$ qui ne modifie pas (4.7). On contredit alors aisément (4.6) pour toute une famille de couples (t,h).

§ 4.5. <u>Remarque finale</u>. A. Voros nous a indiqué des travaux de Robnik et Berry sur des billards de Aharonov-Bohm (cf. par exemple [BE]). De la bibliographie de leurs travaux, je mentionnerai l'important survey de Olariu-Popescu [O.P]. Le survey mentionne un article de Peshkin [PE] relié à nos § 3 et 4 dans un cas très particulier.

Signalons enfin que l'effet d'Aharonov-Bohn est encore contesté par une école de Physique (cf. le livre : Fundamental Aspects of Quantum theory, Nato Asi Series - Séries B - Physics Vol.144 (1985)). Dans l'esprit des remarques de [PE], la contestation des effets quantiques du potentiel magnétique devient, en particulier via les travaux du §3 et 4 et aussi par des travaux antérieurs moins mathématiques, une contestation des fondements de la mécanique quantique : caractère univoque de la fonction d'onde, validité de l'équation de Schrödinger pour décrire le phénomène quantique. Il semble cependant qu'une majorité de physiciens ne conteste pas l'effet d'Aharonov-Bohn.

Références.

[AH-BO] Y. AHARONOV - D. BOHM : Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum theory The Physical review vol.115 n°3, Aug 1959.

[AL-BA] S. ALINHAC - M.S. BAOUENDI : Uniqueness for the characteristic cauchy problem and strong unique continuation for higher order partial differential inequalities Amer. J. of Math. Vol. 102 n°1 p.179-217.

[AR] N. ARONSZAJN : A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order. J. Math. Pures Appl. (9) 36 (1957) pp.235-249.

[AV-HE-SI] J. AVRON - I. HERBST - B. SIMON : Schrödinger operators with magnetic fields :

[1] General interactions. Duke Math. Journal Vol.45 n°4 Dec.78

[2] Separation of Center of Mass in Homogeneous Magnetic fields.Annals of Physics 114 p.431-451 (1978).

[3] Atoms in Homogeneous Magnetic fields Comm. Math. Phys. 79 p.529-572 (1981).

[AV-SE] J. AVRON - R. SEILER : Paramagnetism for non relativistic Electrons and Euclidian Massless Dirac Particles. Phys. Rev. Letters Vol.42 April 1979 n°15 p.931-934.

[AV-SI] J.E. AVRON - B. SIMON : A counter example to the paramagnetic conjecture Physics letters Vol.75 A n°1,2 (24 Déc.1979).

[BE] M. BERRY : Journal of Physics serie A (19) (1986) p.2281.

[C-S-S] J.M. COMBES - R. SCHRADER - R. SEILER : Classical bounds and limits for Energy Distributions of Hamilton operators in Electromagnetic fields Annals of Physics 111 p.1-18 (1978).

[CO] H. CORDES : "Über die Bestimmtheit der Lösungen elliptischer Differential gleichungen durch Anfangs vorgaben";Nachr. Akad. Wiss. Göttingen II (1956) pp.230-258.

[HA] E.M.HARRELL : The band structure of a one dimensional, periodic system in the scaling limit. Ann. Physics 119 (1979) p.351-369.

[HE-MO] B. HELFFER - A. MOHAMED : Caractérisation du spectre essentiel de l'opérateur de Schrödinger avec un champ magnétique. Manuscrit.

[HE-NO] B. HELFFER - J. NOURRIGAT : Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs. Progress in Mathematics Vol.58, Birkhäuser, Boston (1985).

[HE-SJ] B. HELFFER - J. SJÖSTRAND :

[1] Multiple wells in the semi-classical limit I;Comm. in P.D.E.,9 (4) (1984) p.337-408.

[2] Multiple wells in the semi-classical limit II;Annales de l'I.H.P., vol.42, n°2 (1985) p.127-212.

[3] Effet tunnel pour l'équation de Schrödinger avec champ magnétique Preprint de l'Ecole Polytechnique Déc.86.

[4] En préparation.

[HO-SCH-SE] H. HOGREVE - R. SCHRADER - R. SEILER : A conjecture on the spinor functional determinant;Nuclear Phys. B 142 (1978) p525 .

[HU] W. HUNZIKER : Schrödinger Operators with Electric or Magnetic fields Proc. Int. Conf. in Math. Phys., Lausanne (1980) Lect. Notes in Physics n°116.

[IV] A. IWATSUKA : Magnetic Schrödinger Operators with compact resolvent J. Math. Kyoto Univ. 26-3 (1986) p.357-374.

[JLMS] G. JONA-LASINIO - F. MARTINELLI et E. SCOPPOLA : New approach in the semi-classical limit of Quantum Mechanics I- Multiple tunneling in one dimension;comm. in Math. Phys. 80 (1981) p.223-254.

[KA] T. KATO : Israël J. of Math.13 (1972) p.125-174.