G. David

Solutions de l'équation de Beltrami

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1986-1987), exp. nº 8, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1986-1987____A7_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES 1986 - 1987

SOLUTIONS DE L'EQUATION DE BELTRAMI.

par G. DAVID

Exposé n°VIII

20 janvier 1987

On parlera surtout, dans cet exposé, d'homéomorphismes quasiconformes, et on essaiera de convaincre les quelques membres de l'audience à qui cette notion ne serait pas encore familière de son utilité. On passera donc un certain temps à rappeler des définitions et des résultats assez anciens, puis on dira quelques mots sur des applications récentes du théorème d'existence, enfin on mentionnera un moyen de résoudre l'équation de Beltrami dans certains cas où la dilatation complexe ne vérifie pas $\|\mu\|_\infty < 1$.

1. HOMEOMORPHISMES QUASICONFORMES ; THEOREME D'EXISTENCE.

Dans tout ce qui suit, h sera un homéomorphisme d'un domaine U de $\mathbb{C}$ (ou même de $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \approx S^2$) dans un autre domaine V . On supposera de plus, pour simplifier, que h préserve l'orientation. Lorsque h est de classe C^1 , on dira que h est K-quasiconforme (pour un $K \geqslant 1$) si, en tout point x de U , l'application tangente à h en x envoie les cercles sur des ellipses dont le grand axe reste inférieur à K fois le petit axe.

Cette définition nous donne une idée de ce que sont les homéomorphismes quasiconformes, mais il convient de donner une définition qui soit valable aussi quand h est moins régulière : dans tous les cas intéressant, h n'est pas C^1 . Nous ne résistons pas au plaisir de donner une définition "géométrique" ; nous donnerons un peu plus loin une définition "analytique" plus maniable.

<u>Définition 1</u>. On appelle quadrilatère Q la donnée d'une courbe de Jordan orientée Γ , et de deux arcs disjoints contenus dans Γ . Si Q est un quadrilatère, on peut trouver une représentation conforme de l'intérieur de Γ sur l'intérieur d'un rectangle (de côtés de longueur a et b), de telle manière que les deux arcs choisis dans Γ s'envoient sur les côtés de longueur b du rectangle. Alors, le rapport $\frac{a}{b}$ est déterminé de manière unique, et sera appelé le module du quadrilatère.

<u>Définition 2</u>. On dira que l'homéomorphisme h est K-quasiconforme si, pour chaque quadrilatère Q contenu dans U ainsi que son intérieur, le module de l'image par h de Q est inférieur à K fois le module de Q .

Bien que cette définition (notamment par son caractère global) contraste plaisamment avec la définition précédente, on montre que les deux coïncident lorsque h est de classe C^1. Citons quelques propriétés des homéomorphismes quasiconformes (qu'on démontre, pour l'essentiel, en manipulant astucieusement la notion de longueur extrémale) :

- si f est K-q.c. et g est K'-q.c., alors $f \circ g$ (s'il est bien défini) est KK'-quasiconforme ; de même f^{-1} est K-q.c. ;

- si h est 1-q.c., alors h est conforme ;
- Une limite uniforme d'homéomorphisme K-quasiconformes est, si c'est un homéomorphisme, K-quasiconforme.
- Si h est un homéomorphisme K-q.c. du disque unité dans lui-même, et si $h(0) = 0$, alors $|h(z_1)-h(z_2)| \leqslant 16\,|z_1-z_2|^{1/K}$ pour z_1, z_2 dans le disque unité (Mori), d'où il s'ensuit que l'ensemble des homéomorphismes K-q.c. du disque qui fixent 0 est équicontinu. Cette propriété de compacité est l'une des propriétés agréables des fonctions holomorphes qui restent vraies dans le cas quasiconforme.

Ce qui a été dit jusqu'ici peut être généralisé (avec quelques modifications, notamment en ce qui concerne les modules) au cas où l'espace ambiant est de dimension sur $\mathbb{R}$ supérieure à 2. Dans le cas de la dimension 2, la structure complexe permet d'utiliser un outil puissant : la dilatation complexe μ.

On notera volontier h_z au lieu de $\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial h}{\partial x} - i\,\frac{\partial h}{\partial y})$, et $h_{\bar z}$ au lieu de $\frac{\partial h}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\,(\frac{\partial h}{\partial x} + i\,\frac{\partial h}{\partial y})$. Lorsque h est de classe C^1 (et préserve l'orientation), on calcule que h est K-q.c. si et seulement si $\mu = \frac{h_{\bar z}}{h_z}$ vérifie $\|\mu\|_\infty \leqslant \frac{K-1}{K+1}$.

Dans le cas général où h est quasiconforme, on montre que h est différentiable presque-partout, que les dérivées partielles h_z et $h_{\bar z}$ sont dans L^p_{loc} pour un $p > 2$ (qui dépend de K), et que h est une solution de

$$(*) \qquad \frac{\partial h}{\partial \bar z} = \mu\,\frac{\partial h}{\partial z} \quad \text{presque-partout},$$

pour une fonction μ qui est définie presque partout parce que $\frac{\partial h}{\partial z}$ est non-nulle presque-partout, et qui vérifie $\|\mu\|_\infty \leqslant \frac{K-1}{K+1}$.

Réciproquement, si $\|\mu\|_\infty \leqslant \frac{K-1}{K+1}$ est donnée, et si h est un homéomorphisme dont les dérivées h_z et $h_{\bar z}$ sont localement intégrables, et vérifient l'équation de Beltrami (*), alors h est K-q.c. Ceci nous donne une nouvelle définition, un peu plus maniable que la définition 2, d'un homéomorphisme quasiconforme.

L'un des attraits de la dilatation complexe μ est que l'on sait, depuis fort longtemps, résoudre l'équation $(*)$ lorsque $\|\mu\|_\infty < 1$. Le théorème d'existence qui suit est dû à Morrey ; la démonstration usuelle, qui donne de plus l'analyticité de la solution en fonction de μ, est due à Ahlfors-Bers.

Théorème 1. Soit $\mu \in L^\infty(\mathbb{C})$, avec $\|\mu\|_\infty < 1$. Alors il existe un homéomorphisme quasiconforme h de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sur lui-même, tel que h vérifie $(*)$.

Si on demande en outre que h fixe les points $0, 1$, et ∞, alors h est unique (on le notera h_μ).

Enfin, h_μ est une fonction analytique de μ (où μ est dans la boule unité ouverte de L^∞, et l'ensemble des h_μ est muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact).

Nous dirons au paragraphe 3 quelques mots de la démonstration de ce théorème.

Notons que le théorème d'existence donne aussitôt la forme générale des fonctions f qui vérifient $(*)$ et telles que, disons, f_z et $f_{\bar{z}}$ soient dans L^q_{loc} pour un $q > 1$: ce sont les fonctions de la forme $f = g \circ h_\mu$, où g est holomorphe. On en déduit d'ailleurs l'unicité.

Certains aiment penser au théorème 1 en termes de "structures presque-complexes". Une structure presque-complexe, sur $\mathbb{C}$, est la donnée d'une fonction mesurable μ telle que $\|\mu\|_\infty < 1$. L'existence de h_μ peut être interprétée comme l'existence, pour toute structure μ, d'un isomorphisme h de $\mathbb{C}$ (muni de la structure complexe habituelle $\mu = 0$) sur $\mathbb{C}$ (muni de la structure μ).

2. ITERATION DES FRACTIONS RATIONNELLES.

Le lecteur qui voudrait en savoir plus sur les homéomorphismes quasiconformes, ou leurs applications classiques (espaces de Teichmüller, notamment) est renvoyé à [A], [AE], [LV], [G]. Nous dirons ici quelques mots d'applications plus récentes à l'étude dynamique des itérés d'une fraction rationnelle.

L'idée d'utiliser des homéomorphismes quasiconformes dans un tel cadre est due à D. Sullivan (fin 1982). Elle a donné rapidement plusieurs résultat intéressants. Nous allons essayer de donner une idée de la manière dont Sullivan utilise le théorème d'existence pour prouver la non-existence de domaines errants pour une fraction rationnelle [S].

Donnons nous une fraction rationnelle r, définie et à valeurs dans la sphère de Riemann. Notons r^k, $k \in \mathbb{N}$, les itérés successifs de r (par exemple, $r^2 = r \circ r$). Soit alors D un domaine tel que, pour tout $x \in D$, la famille des itérés r^k , $k \in \mathbb{N}$, soit une famille normale au voisinage de x , et qui soit maximal pour cette propriété (on dira que D est un domaine de normalité). Pour terminer la classification, commencée par Fatou, des divers types de comportements dynamiques des itérés de r sur D , il ne restait plus qu'à prouver qu'il est impossible que tous les $r^k(D)$, $k \geq 0$, soient deux à deux disjoints.

Supposons, nous dit Sullivan, qu'un tel domaine existe. Un raisonnement assez simple (et qui ne sera pas mentionné ici parce qu'il n'a aucun rapport avec l'équation de Beltrami) permet de se ramener au cas où D est simplement connexe, et où aucun des $r^k(D)$, $k \geq 0$, ne contient de point critique. On remarque alors que, si μ est n'importe quelle fonction mesurable (avec toutefois $\|\mu\|_\infty < 1$) définie sur D , alors on peut étendre μ à $\mathbb{C}$ tout entier, et de telle sorte que r préserve la structure presque-complexe définie par μ . [C'est ici qu'on se sert du fait que tous les $r^k(D)$ sont disjoints, et de ce que $r : r^k(D) \to r^{k+1}(D)$ est injective, pour pouvoir définir la fonction μ sur chaque $r^k(D)$] . Alors, le théorème d'existence nous donne un homéomorphisme h_μ , et l'application $r_\mu = h_\mu \circ r \circ h_\mu^{-1}$ préserve encore la structure complexe de $\mathbb{C}$. On en déduit que r_μ est méromorphe et, comme r_μ est toujours une application de même degré que r sur la sphère de Riemann, que r_μ est une fraction rationnelle de même degré que r .

On utilise maintenant le supplément de rigidité procuré par le fait que les fractions rationnelles de degré donné ont une dimension finie pour trouver de nombreuses dilatations μ non nulles pour lesquelles $r_\mu = r$. On peut alors en déduire une contradiction en prouvant que h_μ devrait être l'identité pour de tels μ . Là encore, nous n'entrerons pas dans les détails. Pour en savoir plus sur l'itération des fractions rationnelles, on pourra consulter [Bl],[Br],[DH],[F] par exemple.

On entrevoit maintenant l'utilité des homéomorphismes quasiconforme : une plus grande souplesse que les représentations conformes, tout en gardant, grâce à μ , une trace de la structure complexe. Dans de récents travaux de A. Douady et Hubbard, par exemple, ils permettent (à un petit changement de structure près) de réaliser ce qu'on n'osait espérer : recoller entre eux des morceaux de fonctions holomorphes (voir[D]).

3. RETOUR A L'EQUATION DE BELTRAMI.

Nous allons maintenant décrire brièvement la démonstration du théorème 1. On utilisera la transformée de Beurling $T = \partial\bar{\partial}^{-1}$, qui est une isométrie sur $L^2(\mathbb{C})$, et a sur L^p une norme qui tend vers 1 lorsque p tend vers 2.

On commence par trouver une solution de (*) lorsque μ est à support compact. On cherche alors une solution h telle que $h(0) = 0$ et telle que $h_z - 1$ soit dans L^p pour un $p > 2$. Dans ce cas, on voit vite que h est donné par

$$(1) \qquad h(z) = P(h_{\bar{z}})(z) + z \quad , \text{ où}$$

$$(2) \qquad Pg(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} g(\xi)\left(\frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi}\right) d\sigma(\xi) \quad ,$$

et ou $d\sigma$ est la mesure de Lebesgue.

Notons que c'est parce que $g = \mu h_z$ est dans L^p que l'on peut intégrer g contre le noyau de P, qui est dans $L^{2-\varepsilon}$ pour tout ε assez petit. En notant $f = h_z - 1$, l'équation (*) devient $f+1 = h_z = 1 + \frac{\partial}{\partial z}(Ph_{\bar{z}}) = 1+T[\mu(f+1)]$ d'où l'équation

$$(3) \qquad (1-T\mu)f = T\mu$$, en notant encore μ l'opérateur de multiplication par μ.

On choisit alors $p > 2$ assez proche de 2 pour que la norme de T sur L^p soit strictement inférieure à $1/\|\mu\|_\infty$.

Il suffit de prendre

$$(4) \qquad f = T\mu + T\mu T\mu + \ldots \quad ,$$

où la série converge dans L^p. On vérifie ensuite que h, ainsi défini, est bien un homéomorphisme, et on en déduit l'existence de h_μ lorsque μ est à support compact.

Dans le cas général, on constate qu'on peut chercher h_μ sous la forme $h = h_{\mu_2} \circ h_{\mu_1}$, où $\mu_1 = \mu\, \mathbb{1}_{\{|z|>1\}}$. L'existence de h_{μ_1} se déduit de ce qui précède en conjuguant avec $z \to 1/z$; les formules donnant les dérivées d'une composée permettent de déterminer μ_2 pour que $h_{\mu_2} \circ h_{\mu_1}$ ait la dilatation μ, et on s'aperçoit que μ_2 a un support compact. On peut donc trouver h_{μ_2}, et on en déduit l'existence de h_μ.

L'unicité de h_μ se déduit, en composant avec h_μ^{-1}, du cas où $\mu = 0$; l'analyticité de h_μ en fonction de μ s'obtient aisément en regardant avec un peu plus de précision comment $h\mu$ a été obtenu.

Pour finir, disons quelques mots de l'équation (*) lorsque $\mu(z) < 1$ p.p., mais $\|\mu\|_\infty = 1$. Si l'on ne restreint pas un peu la classe des μ considérés, on se rend compte rapidement qu'il n'y aura pas toujours de solution de (*)

qui soit un homéomorphisme.

Dans [L] , O. Lehto a donnée une condition assez générale pour l'existence d'une solution de (*) qui soit un homéomorphisme. Le résultat était obtenu en estimant avec précision le module de l'image par h d'un anneau topologique.

La condition sur μ énoncée par Lehto est moins restrictive que celle que nous allons énoncer dans la proposition suivante (en particulier, elle a l'avantage de tenir compte de l'argument de μ , et pas seulement de son module). Par contre, la démonstration de la proposition est un peu plus directe, et il est possible que les estimations sur h soient un peu plus précises que celles qu'on obtiendrait en détaillant les estimations de Lehto.

Nous dirons que μ vérifie une condition logarithmique s'il existe $C_o \geq 0$, $\alpha > 0$, et $0 < \varepsilon_o \leq 1$ tels que, pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_o$, on ait $|\{z \in \mathbb{C} \ ; \ |\mu(z)| > 1-\varepsilon\}| \leq C_o \, e^{-\alpha/\varepsilon}$.

Proposition [Da]. Si μ vérifie une condition logarithmique, alors il existe un (unique) homéomorphisme h du plan complexe, fixant 0, 1, et ∞ , ayant des dérivées h_z et $h_{\bar{z}}$ dans L^q_{loc} pour tout $q < 2$, et tel que (*) soit satisfaite.

On a de plus un certain contrôle sur h :

$$(5) \qquad |h(z) - h(z')| \leq C_1(M) \ \mathrm{Log}\left(2 + \frac{1}{|z'-z|}\right)^{-c_1\alpha} \quad \text{lorsque } z$$

et z' sont dans la boule de centre 0 et de rayon M (et où $C_1(M)$ dépend aussi de C_o , α , ε_o , mais où c_1 est une constante universelle) ;

$$(6) \qquad |h(z)-h(z')| \geq \frac{1}{C_2(M)} \ \exp - \frac{c_2}{\alpha} \left\{\mathrm{Log}\left(2 + \frac{1}{|z'-z|}\right)\right\}^2$$

dans les mêmes conditions ;

lorsque E est un ensemble mesurable contenu dans la boule de centre 0 et de rayon M , on a (avec les mêmes conventions)

$$(7) \quad \frac{1}{C_3(M)} \ \exp - \frac{c_3}{\alpha} \left\{\mathrm{Log}\left(2+ \frac{1}{|E|}\right)\right\}^2 \leq |h(E)| \leq C_4(M)\left\{\mathrm{Log}\left(2 + \frac{1}{|E|}\right)\right\}^{-c_4\alpha} .$$

Notons, avant de dire deux mots de la preuve, que, comme on a un certain contrôle sur la taille de h(E) et des dérivées h_z et $h_{\bar{z}}$, on trouvera les solutions f de (*) telles que, disons, f_z et $f_{\bar{z}}$ soient dans L^p_{loc} pour un $p > 2$, exactement comme dans le cas où $\|\mu\|_\infty < 1$: ce sont les fonctions de la forme $f = g \circ h$, où g est analytique.

Les estimations (5), (6) et (7), qui semblent très faibles, ne sont pourtant pas très loin d'être optimales (par contre, on ne connait pas les meilleures constantes c_1, c_2, c_3 et c_4). Dans un même ordre d'idées, on ne peut pas remplacer la condition logarithmique par une condition comme $|\{|\mu| > 1-\varepsilon\}| \leq C\,\varepsilon^{-N}$ si l'on veut avoir des solutions de (*) qui soient des homéomorphismes.

Disons, pour finir, quelques mots de la manière dont on prouve la proposition en utilisant le shéma de la démonstration d'Ahlfors-Bers du théorème 1.

On commence par le cas particulier important où μ vérifie une condition logarithmique avec un α assez grand, et où $\varepsilon_o = 1$ (ce qui entraîne que $\mu = 0$ hors d'un ensemble de mesure finie). On essaie alors de définir la fonction f à l'aide de la série (4), puis h par la formule (1). On ne peut bien sûr espérer montrer que $f \in L^p$ pour un $p > 2$ (c'est faux), mais $f \in L^2$ ne suffit pas (car le noyau de P n'est pas dans L^2). L'idée est de prouver que, si α est assez grand, $|f|^2\{\mathrm{Log}(2+|f|)\}^{10}$, par exemple, est intégrable. Cela sera suffisant pour définir h, et même pour avoir un certain contrôle sur sa régularité.

On essaie donc de contrôler simultanément les normes L^2 et L^p, pour un $p > 2$, de $f_k = T\mu\ldots T\mu$ (k fois). Pour $\|f_k\|_p$, on utilise brutalement le fait que T est borné sur L^p avec une norme C_p, et on obtient $\|f_k\|_p \leq CC_p^k$.

Pour estimer $\|f_k\|_2$, on est obligé de se montrer un peu plus subtil (sinon on aura $\|f_k\|_2 \leq C$, ce qui n'est pas suffisant). On remarque que, comme f_k est dans L^p, sa fonction de distribution vérifie des inégalités du type $|\{|f_k| > \lambda\}| \leq CC_p^{kp}\,\lambda^{-p}$ pour tout $\lambda > 0$: l'essentiel de la norme L^2 de f_k ne peut pas être porté par un ensemble trop petit. Mais alors, quand on multiplie f_k par $|\mu|$ (qui ne peut pas être très proche de 1 sur un ensemble trop grand), on diminue sensiblement sa norme L^2. Des calculs plus précis donnent $\|f_k\|_2 \leq C(k+1)^{-20}$ pour peu que α soit assez grand. Il est ensuite facile, avec cette information sur $\|f_k\|_2$, de prouver que $|f|^2\{\mathrm{Log}(2+|f|)\}^{10}$ est intégrable, et d'en déduire des estimations sur h.

Dans le cas général, on procède encore à peu près comme Ahlfors et Bers : on essaie d'écrire $h_\mu = h_{\mu_1} \circ h_{\mu_2}$, en choisissant bien μ_2 (et donc μ_1) en fonction des estimations que l'on veut montrer.

BIBLIOGRAPHIE.

[A] L. AHLFORS : Quasiconformal mappings, Teichmüller spaces, and Kleinian groups, Proceedings I.C.M. Helsinki 1978, Vol.1, 71-84.

[AE] L. AHLFORS : Lectures on quasiconformal mappings. Van Nostrand 1966.

[Bl] P. BLANCHARD : Complex analytic dynamics on the Riemann sphere, Bull. Amer. Math. Soc. (1984) N°1, 85-141.

[Br] H. BROLIN : Invariant sets under iteration of rational functions, Arkiv för Matematik 6 (1965) 103-144.

[Da] G. DAVID : Solutions de l'équation de Beltrami avec $\|\mu\|_\infty = 1$, preprint, Ecole Polytechnique, 1986.

[D] A. DOUADY : Chirurgie sur les fonctions holomorphes ? Proceedings ICM Berkeley 1986, à paraître.

[DH1] A. DOUADY et J. HUBBARD : Itération des polynômes complexes, Publ. Math. Orsay, 1984-02 et 85-04.

[DH2] A. DOUADY et J. HUBBARD : On the dynamics of polynomial-like mappings, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Paris t.18, 1985.

[F] P. FATOU : Sur les équations fonctionnelles, Bull. Soc. Math. France 47, 1919, 161-271 et 48 (1920), 33-94, 208-314.

[G] F. GEHRING : Quasiconformal mappings, Proceedings ICM Berkeley 1986, à paraître.

[L] O. LEHTO : Homeomorphisms with a given dilatation, Proceedings of the 15th Scandinavian Congress, Oslo 1968, Lecture Notes 118, Springer 1970, 58-73.

[LV] O. LEHTO et K. VIRTANEN : Quasikonforme Abbildungen, Springer, 1965 (existe aussi en anglais).

[S] D. SULLIVAN : Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I : Solutions of the Fatou-Julia problem on wandering domains, Annals of Math 122, 1985,401-418.