Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

Y. Colin de Verdière

Construction de laplaciens dont une partie finie (avec multiplicités) du spectre est donnée

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1986-1987), exp. nº 7, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1986-1987____A6_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

SEMINAIRE EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES 1986 - 1987

CONSTRUCTION DE LAPLACIENS DONT UNE PARTIE FINIE (AVEC MULTIPLICITES) DU SPECTRE EST DONNEE.

par Y. COLIN DE VERDIERE

Exposé n°VII

16 Décembre 1986

1. ENONCE DU PROBLEME.

Soit $S = \{\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_N\}$ une suite donnée de N nombre réels, on se pose des problèmes du type suivant : trouver dans une famille $\mathcal{F}$ d'opérateurs autoadjoints $\geqslant 0$, à résolvante compacte, un opérateur A tel que S soit la suite des N premières valeurs propres de A , répétées suivant leur multiplicité.

Par exemple, si X est une variété différentiable compacte connexe de dimension d , $\mathcal{F}$ peut être l'ensemble des laplaciens riemanniens Δ_g sur X , ou bien l'ensemble des opérateurs de Schrödinger $\Delta_{g_o}+V$ (g_o fixée) ayant 0 comme plus petite valeur propre. On peut aussi considérer pour $d \geqslant 2$, la famille $\mathcal{F}_N^d$ des laplaciens euclidiens dans un ouvert borné C^1 de $\mathbb{R}^d$ avec condition de Neumann au bord, ou $\mathcal{F}_D^d$ si l'on considère les conditions de Dirichlet.

2. LES OBSTRUCTIONS.

La principale obstruction connue à ces problèmes est l'existence de majorations des multiplicités. Désignons pour une variété compacte connexe avec ou sans bord, par $m(X)$ la plus grande multiplicité possible pour le λ_2 d'un opérateur différentiel elliptique du second ordre autoadjoint et à coefficients réels ; on a alors les résultats suivants prouvés par Cheng, puis Besson :

<u>Théorème</u>. $m(S^2) = 3$; $m(P^2(\mathbb{R})) = 5$; $m(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2) = 6$ <u>et si</u> $b(X) = \dim H_1(X;\mathbb{Z}_2)$, $m(X) \leqslant 2b(X) + 3$.

En fait, nous avons aussi pu prouver, en adaptant la méthode de Besson que, si B est la bouteille de Klein, $m(B) = 5$.

Pour ce qui est du <u>problème de Dirichlet euclidien</u>, il y a d'autres types de contraintes dues à Polya-Payne et Weinberger les valeurs propres d'un tel problème vérifient des inégalités universelles du type $\lambda_{n+1} \leqslant C\lambda_n$.

3. QUELQUES RESULTATS.

<u>Théorème</u>. (i) <u>si</u> X <u>est une variété compacte de dimension 3</u>, <u>alors pour tout</u> N <u>et tout</u> S <u>de longueur</u> N , <u>il existe une métrique riemannienne</u> g_o <u>tel que</u> Δ_{g_o} <u>ait la suite</u> S <u>comme suite de</u> N <u>premières valeurs propres</u> ;

en particulier $m(X) = +\infty$.

(ii) *si* X *est une surface compacte et* $C(X)$ *le nombre chromatique de* X , i.e. *le plus grand entier* n *tel que le graphe complet à* n *sommets se plonge dans* X , *si* S *est une suite de longueur* $N = C(X)$, *il existe un opérateur de Schrödinger* $H = \Delta_g + V$ *sur* X *ayant* S *comme suite des* N *premières valeurs propres*. *En particulier* $m(X) \geqslant C(X)-1$. *Ce résultat est optimal pour les surfaces de genre* 0 *et* 1 : $S^2, P^2(\mathbb{R})$, B *et* $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

(iii) *si* $S = \{\lambda_1 = 0 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_N\}$, *il existe sur toute variété compacte de dimension* $\geqslant 2$, *une métrique riemannienne* g *telle que* Δ_g *ait* S *comme suite des* N *premières valeurs propres*.

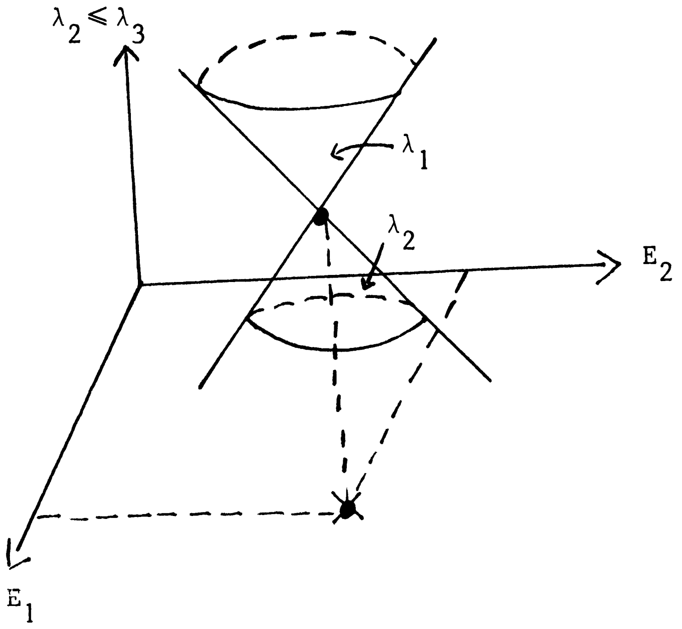
(iv) *Même résultat que* (iii) *avec un ouvert borné de* $\mathbb{R}^2$ *et le laplacien euclidien avec condition de Neumann*.

4. LES METHODES.

La méthode générale est d'utiliser la théorie des perturbations singulières des valeurs propres. On se heurte ainsi à des difficultés à cause des valeurs propres multiples qui ont tendance à se disperser par perturbation. Pour compenser cette dispersion, on doit utiliser des idées de transversalité introduites par Arnold (1972) dans les problèmes de valeurs propres. On est amené ainsi à introduire la notion de stabilité suivante, que nous décrivons en dimension finie pour simplifier :

Si $(H_a)_{a\in K}$ est une famille de matrices symétriques $n \times n$ réelles paramétrés par une variété K , si H_{a_o} admet une valeur propre μ_o de multiplicité n_o , on dira que *la valeur propre* μ_o *de* H_{a_o} *vérifie l'hypothèse d'Arnold* (SAH dans [CV3]) si l'application $a \to H_a$ coupe transversalement en d_o la sous-variété $W_{\mu_o,n_o} \subset \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^n)$ des matrices ayant λ_o comme valeur propre de multiplicité n_o . En particulier comme la codimension de W_{λ_o,n_o} est $\frac{r_o(r_o+1)}{2}$, on voit que K doit être au moins de cette dimension.

Un exemple : On s'intéresse à l'opérateur $H = \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ avec 3 puits de potentiel consécutifs d'énergie $E_o = 0$, E_1 et E_2 . Le graphe des valeurs propres $\lambda_2 \leqslant \lambda_3$ de H en fonction de E_1 et E_2 dans l'approximation semi-classique est de la forme suivante :



Il y a un point isolé où $\lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3 < \dots$. Il est facile de tester l'hypothèse d'Arnold par linéarisation : si $E_o = \mathrm{Ker}(H_{a_o} - \mu_o)$, on considère l'application linéaire $L : T_{a_o} K \to \mathrm{Sym}(E_o)$ donnée par :

$$L(\delta a) = \langle \delta H \,.\,|\,.\,\rangle \restriction_{E_o} \quad ,$$

et l'hypothèse SAH équivaut à la surjectivité de L .

Nous avons ainsi pu en particulier vérifier qu'elle est vraie pour toutes les valeurs propres > 0 du laplacien usuel sur S^2 relativement à la famille de tous les laplaciens, et qu'il en est de même sur $\mathbb{R}^2/\Gamma$ pour les valeurs propres de multiplicité $\leqslant 6$.

5. LES GRAPHES.

Pour utiliser la théorie des perturbations, il est préférable de partir de situations simples, les laplaciens combinatoires sur les graphes :

Si Γ est un graphe fini connexe, $V(\Gamma)$ l'ensemble de ses sommets et $E(\Gamma)$ l'ensemble de ses arêtes, on désigne par $\mathcal{O}_\Gamma$ l'ensemble (cône ouvert) des matrices symétriques A sur $L^2(V(\Gamma),\mu_o)$ ($\mu_o = \sum_{s\in V(\Gamma)} \delta(s)$) , telles que :

$$\begin{cases} \text{(i)} \; a_{s,s'} < 0 \text{ si } \{s,s'\} \in E(\Gamma) , \\ \text{(ii)} \; a_{s,s'} = 0 \text{ si } (\{s,s'\} \notin E(\Gamma) \text{ et } s \neq s') \end{cases}$$

Les opérateurs de $\mathcal{O}_\Gamma$ sont de bons équivalents des opérateurs de Schrödinger. En particulier, ils ont un spectre :

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \ldots \leqslant \lambda_N \ ; \ N = \# \ V(\Gamma) \ .$$

Le plus utilisé est le graphe complet K_N , pour lequel toute suite du type précédent est réalisable par un $A \in \mathcal{O}_{K_N}$ et pour lequel l'hypothèse SAH est trivialement vérifiée car :

$$T_A \mathcal{O}_\Gamma = \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^N) \ .$$

Nous avons introduit un invariant qui semble intéressant :

Définition : Si Γ est un graphe connexe fini, $\mu(\Gamma)$ est la plus grande multiplicité de la seconde valeur propre λ_2 d'un $A \in \mathcal{O}_\Gamma$ telle que λ_2 vérifie SAH relativement à $\mathcal{O}_\Gamma$.

Il résulte par exemple des méthodes que j'utilise que l'on a le :

Théorème. Γ planaire $\Leftrightarrow \mu(\Gamma) \leqslant 3$.

La démonstration utilise les considérations du § suivant, le théorème de Cheng et la caractérisation de Kuratowski des graphes non planaires.

6. ESQUISSE D'UN CAS PARTICULIER.

On va esquisser la preuve du :

Théorème. Si Γ se plonge dans une surface X , il existe sur X un opérateur de Schrödinger $H = \Delta + V$ tel que $\lambda_2(H)$ est de multiplicité $\mu(\Gamma)$. En particulier $\mu(\Gamma) \leqslant m(X)$.

Cette preuve sera esquissée lors de l'exposé oral.
Schématiquement, on procède ainsi :

1) Dessiner Γ sur X .

2) Choisir une métrique g_o sur X telle que les arêtes de Γ sont géodésiques et g_o euclidienne au voisinage de Γ .

3) Construire une famille de domaines $\Omega(\varepsilon_a)$ dépendant de paramètre $\varepsilon_a > 0$, $a \in E(\Gamma)$ qui sont des voisinages de Γ macroscopiques (fixés) près des sommets et microscopique de largeur ε_a le long des arêtes.

4) Evaluer les petites valeurs propres du problème de Neumann dans $\Omega(\varepsilon_a)$ en termes de valeurs propres d'un laplacien combinatoire sur Γ et contrôler aussi les espaces propres. Cette approximation est différente de l'approximation semi-classique : elle semble porter en mécanique quantique le nom de "tight-binding approximation".

5) Introduire des opérateurs $\Delta_{g_o \mu_\varepsilon}$ qui sont les laplaciens associés à $\int_X |df|^2 \mu_\varepsilon$ sur $L^2(X,\mu_\varepsilon)$ où $\mu_\varepsilon = v_{g_o}$ sur $\Omega(\varepsilon_a)$, $\mu_\varepsilon = \varepsilon v_{g_o}$ sur $X \setminus \Omega(\varepsilon_a)$. Préciser la convergence du spectre de $\Delta_{g_o,\mu_\varepsilon}$ $(\varepsilon \to 0)$.

6) Lisser la mesure μ_ε en ν_ε .

7) Constater que $\Delta_{g_o,\nu_\varepsilon}$ est unitairement équivalent à un opérateur de Schrödinger $\Delta_{g_o} + V$.

Dans les étapes 4), 5), 6) on utilise des hypothèses du type Arnold permettant de ne pas perdre la multiplicité en route.

BIBLIOGRAPHIE.

Les résultats présentés ici ont été annoncés dans [CV1] et sont détaillés dans les articles suivants en cours de parution ou de rédaction :

[CV1] Y. Colin de Verdière : Spectre de graphes et spectres de variétés riemanniennes Proc. ICM 86 (Berkeley). A paraître.

[C-C] Y. Colin de Verdière, B. Colbois : Sur la multiplicité de la première valeur propre positive d'une surface à courbure constante. Prépublication Institut Fourier n°62 (Oct.86).

[CV2] Y. Colin de Verdière : Sur la multiplicité de la première valeur propre du laplacien. Commentarii Math. Helv. 61 (1986), 254-270.

[CV3] Y. Colin de Verdière : Sur une hypothèse de transversalité d'Arnold. Prepublication de l'Institut Fourier n°59 (oct.86).

[CV4] Y. Colin de Verdière : Construction de laplaciens dont une partie finie du spectre est donnée. En préparation.

[CV5] Y. Colin de Verdière : Sur un invariant spectral des graphes et un critère de planarité. En préparation.

BIBLIOGRAPHIE (suite).

[AD] Arnold : Modes and quasi-modes. J. of Functional Analysis and its applications 6 (1972), 94-101.

[BN] G. Besson : Sur la multiplicité de la première valeur propre des surfaces riemanniennes. Ann. Institut Fourier 30 (1980), 109-128.

[CG] S. Cheng : Eigenfunctions and nodal sets. Commentarii Math. Helv. 51 (1979), 43-55 .

[PPW] Payne, Polya, Weinberger : On the ratio of consecutive eigenvalues, J. of Math and Phys. 35 (1956), 289-298.

****