

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

A. GRIGIS

Coefficients de réflexion pour les potentiels de Hardy

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1986-1987), exp. n° 22,
p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1986-1987____A21_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1986-1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tel. (6) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691596 F

SEMINAIRE EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES 1986 - 1987

COEFFICIENTS DE REFLEXION POUR LES POTENTIELS DE HARDY

par A. GRIGIS

I. INTRODUCTION.

Les notions étudiées ici ont été introduites par V. Guillemin et A. Uribe dans [3] et [4]. Soit

$$(1.1) \quad P = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

avec V fonction d'une variable, π -périodique de moyenne nulle. L'opérateur P est dit de Schrödinger périodique ou de Hill. Ici on considérera des potentiels V non nécessairement réels.

Définition 1. V est dit potentiel de Hardy s'il est de la forme

$$(1.2) \quad V(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{2ikx}.$$

Donc si V est un potentiel de Hardy $V(x)$ s'étend holomorphiquement dans $\text{Im} x > 0$ et tend vers 0 quand $\text{Im} x$ tend vers l'infini.

Si on pose $\zeta = e^{2ix}$ on voit que $V(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{2ikx}$ un potentiel de Hardy si et seulement si la fonction $\zeta \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \zeta^k$ s'étend holomorphiquement au disque $|\zeta| < 1$.

Ici on s'intéresse au spectre périodique de P , c'est à dire aux valeurs de E telles que $(P-E)u = 0$ admette une solution 2π -périodique (en fait celles-ci seront π -périodiques ou π -antipériodiques).

Théorème 1. (Guillemin-Uribe [4]). Soit P comme ci-dessus avec V potentiel de Hardy.

1) Le spectre périodique est constitué de valeurs propres $\{n^2, n=0,1,2,\dots\}$, doubles pour $n > 0$.

2) Pour $n > 0$ il existe des fonctions

$$(1.3) \quad \begin{aligned} f_n &= e^{inx} + \sum_{\ell > n} b_{\ell}^{+} e^{i\ell x} \\ f_{-n} &= e^{-inx} + \sum_{\ell > -n} b_{\ell}^{-} e^{i\ell x} \end{aligned}$$

satisfaisant

$$(1.4) \quad \begin{aligned} (P-n^2) f_n &= 0 \\ (P-n^2) f_{-n} &= \chi_n f_n \end{aligned}$$

3) Le complexe χ_n appelé $n^{\text{ième}}$ coefficient de réflexion s'écrit

$$(1.5) \quad \chi_n = c_n + Q_n(c_1, \dots, c_{n-1})$$

avec Q_n polynôme quasihomogène vérifiant

$$(1.6) \quad Q_n(s c_1, s^2 c_2, \dots, s^{n-1} c_{n-1}) = s^n Q_n(c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$$

La preuve est assez simple. Comme V n'est pas réel, P sur la variété compacte $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ n'est pas autoadjoint mais il est de type Fredholm. Regardons les points 2) et 3). Les équations

$$(1.7) \quad (\ell^2 - n^2) b_\ell^+ + \sum_{j=1}^{\frac{1}{2}(\ell-n)} c_j b_{\ell-2j}^+ = 0 \quad \ell > n$$

déterminent les b_ℓ^+ successivement et on obtient f_n .

De même

$$(1.8) \quad (\ell^2 - n^2) b_\ell^- + \sum_{j=1}^{\frac{1}{2}(\ell+n)} c_j b_{\ell-2j}^- = 0 \quad -n < \ell < n$$

$$(1.9) \quad \chi_n = \sum_{j=1}^n c_j b_{n-2j}^- \quad \ell = n$$

$$(1.10) \quad (\ell^2 - n^2) b_\ell^- + \sum_{j=1}^{\frac{1}{2}(\ell+n)} c_j b_{\ell-2j}^- = \chi_n b_\ell^+ \quad \ell > n$$

déterminent successivement les b_ℓ^- pour $\ell < n$, χ_n , et les b_ℓ^- modulo ab_ℓ^+ (a constante) pour $\ell > n$.

On a donc 2) et on voit aisément que b_ℓ^- est un polynôme quasihomogène de degré $\frac{1}{2}(\ell+n)$ des variables $c_1, c_2, \dots, \frac{c_{\ell+n}}{2}$ pour $\ell < n$, on en déduit 3) et comme b_ℓ^\pm est nul si $\frac{1}{2}(\ell+n)$ est non entier on voit aussi que f_n et f_{-n} sont soit π -périodiques soit π -antipériodiques.

De (5) on déduit le

Corollaire 1. Le potentiel de Hardy V est déterminé par les coefficients de réflexion χ_n

En effet l'application $(c_n) \rightarrow (\chi_n)$ est inversible à droite.

Remarque 1. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) V admet π/M pour période, M entier
- ii) $\chi_n = 0$ pour tout n non multiple de M .

Bien que (5) soit une expression simple, par exemple

$$(1.11) \quad \chi_1 = c_1, \quad \chi_2 = c_2 + \frac{1}{4} c_1^2, \quad \chi_3 = c_3 + \frac{1}{4} c_1 c_2 + \frac{1}{64} c_1^3,$$

il n'est pas si aisé de trouver des majorations de χ_n . Dans [4] il est démontré que si V est C^∞ la suite (χ_n) est à décroissance rapide. D'autre part les potentiels pour lesquels tous les χ_n sauf un nombre fini sont nuls, sont déterminés dans le même article. Enfin, contrairement à ce qui se passe pour les largeurs des intervalles d'instabilité (voir [1],[2] et leurs références) toute suite (χ_n) à décroissance rapide n'est pas la suite des coefficients de réflexion d'un potentiel C^∞ . Par exemple si $\chi_n = 0$ pour $n \geq 2$ il faut $|\chi_1| < 8$ pour qu'il en soit ainsi.

II. LES POTENTIELS DE HARDY REEL-ANALYTIQUES.

Ici nous nous intéressons au comportement asymptotique de χ_n quand n tend vers l'infini pour des potentiels réel-analytiques. La méthode est celle que nous avons utilisé dans [1] pour estimer la largeur γ_n du $n^{\text{ième}}$ intervalle d'instabilité pour l'équation de Hill quand le potentiel est réel. Les résultats sont du même type comme le suggère l'exemple suivant :

Exemple 1. Pour $V(x) = v e^{2ix}$ $v \neq 0$ on calcule aisément

$$(2.1) \quad \chi_n = \frac{v^n}{4^{n-1} ((n-1)!)^2}$$

Cet exemple est à rapprocher de l'expression de γ_n pour le potentiel de Mathieu $V(x) = \mu \cos 2x$

$$(2.2) \quad \gamma_n = \frac{\mu^n}{8^{n-1} ((n-1)!)^2} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Ici comme dans [1] nous utilisons une fonction indicatrice de croissance de $V(x)$ étendu au domaine complexe

Définition 2. On définit $M_{\pm}(E)$ par :

$$(2.3) \quad M_{\pm}(E) = \sup\{A, V(x) \text{ holomorphe et } |V(x)| < E \text{ dans } \pm(\operatorname{Im} x \mp A) < 0\}$$

Si V est de Hardy et $E > m = \sup\{V(t), t \in \mathbb{R}\}$ on a $M_{\pm}(E) = +\infty$.

On peut alors énoncer le

Théorème 2. Soit V un potentiel de Hardy réel-analytique.

Pour $n > n(\varepsilon)$ on a

$$(2.4) \quad |\chi_n| \leq \exp(-2(1-\varepsilon)nM_-(n^2))$$

En particulier si V s'étend holomorphiquement à $\operatorname{Im} x > -B$ on a pour $n > n(\varepsilon)$

$$(2.5) \quad |\chi_n| \leq \exp(-2(B-\varepsilon)n).$$

Pour les potentiels polynomiaux on a un résultat plus précis.

Théorème 3. Soit un potentiel de Hardy polynomial

$$(2.6) \quad V(x) = v e^{2iNx} + \sum_{n=1}^{N-1} c_n e^{2inx}, \quad v \neq 0$$

Pour n assez grand le coefficient de réflexion χ_n s'écrit

$$(2.7) \quad \chi_n = \frac{2n}{\pi} \sum_{h=0}^{N-1} e^{-2z_k(n^2)} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

avec

$$(2.8) \quad z_k(n^2) = + \frac{n}{2N} \operatorname{Log}\left(\frac{n^2}{v}\right) + i \frac{kn}{N} - n \sum_0^{\infty} \lambda_j \left(\frac{v}{n^2}\right)^{j/N} e^{-\frac{2ijk\pi}{N}}$$

Plus précisément il existe un polynôme $Q(t) = \sum_{j=1}^{N-1} \lambda_j t^j$ dont les coefficients dépendent algébriquement de ceux de V tel que

$$(2.9) \quad \chi_n = \frac{2n}{\pi} \left(\frac{ve^{2n/N}}{4n^2}\right)^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} A_k(n) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

$$(2.10) \quad A_k(n) = \exp\left(-\frac{2ink\pi}{N} - 2n Q\left(\left(\frac{v}{n^2}\right)^{1/N} e^{-\frac{2ik\pi}{N}}\right)\right)$$

Pour le problème de l'annulation des χ_n due aux compensations entre les $A_k(n)$ on peut se reporter à la discussion de [1].

Nous donnons maintenant l'idée de la preuve du théorème 3 sans détailler les arguments qui sont déjà dans [1].

a) Situation géométrique.

On convient $\operatorname{Re}(E-V(x))^{1/2} > 0$ pour $\operatorname{Im} t = 0$ et E grand positif et on considère le changement de variable

$$(2.11) \quad z(x, E) = i \int_0^x (E-V(t))^{1/2} dt$$

qui est régulier dans $\operatorname{Im} x > -M_-(E)$.

Dans cette région on a

$$(2.12) \quad z(x+\pi, E) = z(x, E) + i\pi T(E)$$

mais V étant de Hardy,

$$(2.13) \quad T(E) = \int_0^\pi (E-V(t))^{1/2} dt = \pi E^{1/2}$$

Les lignes de Stokes, c'est-à-dire les courbes de niveaux de $\operatorname{Re} z(x)$ ont une allure générale parallèle à l'axe réel dans $\operatorname{Im} x > -M_-(E)+c$.

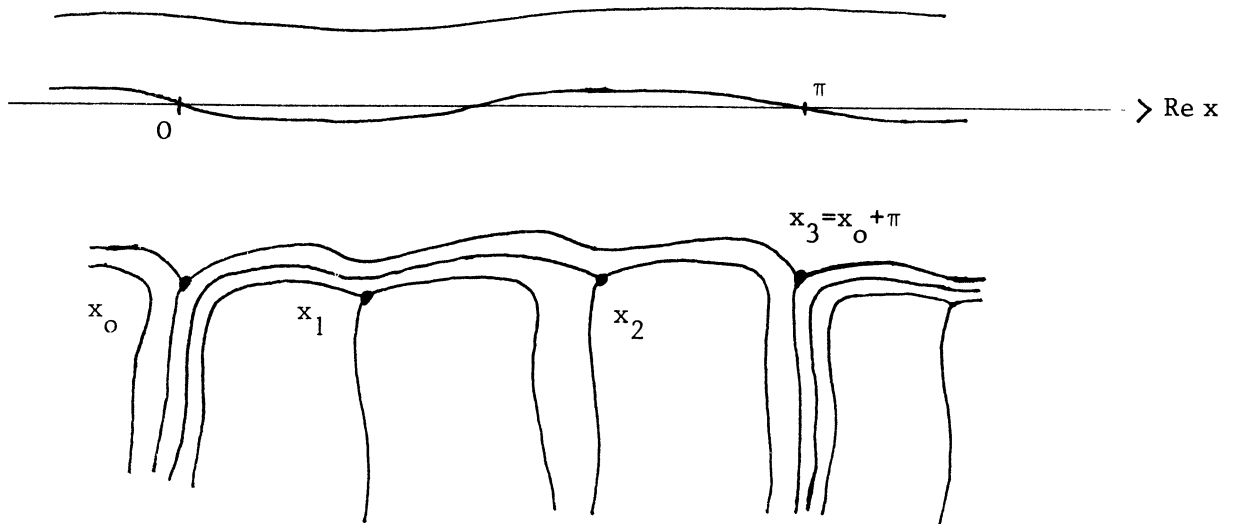
Par contre dans $\operatorname{Im} x < -M_-(E) + C$ il y a des points tournants :

$$(2.14) \quad x_k(E) = \frac{i}{2N} \operatorname{Log} \frac{E}{v} + \frac{k\pi}{N} + F(\alpha_k)$$

$$\alpha_k = \left(\frac{v}{E}\right)^{1/N} e^{-\frac{2ik\pi}{N}}$$

ou F est une série et $\alpha_k = \left(\frac{v}{E}\right)^{1/N} e^{-\frac{2ik\pi}{N}}$, et les lignes de Stokes ont la même allure que pour V réel (voir [1]).

Figure. Lignes de Stokes pour un potentiel de Hardy polynomial, $N = 3$



On calcule aussi les "intégrales d'action" de 0 aux points tournants :

$$(2.15) \quad z_k(E) = z(x_k(E)) = -\frac{E^{1/2}}{2} \text{Log}(\alpha_k) - E^{1/2} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \alpha_k^j$$

les λ_j , pour $j < N$ étant des polynômes quasi homogènes des $\frac{c_n}{v}$, c_n coefficient de V .

b) Solutions de (P-E) u = 0.

Comme dans [1] on construit 2 solutions indépendantes de l'équation (P-E) u = 0, E étant fixé, assez grand.

$$(2.16) \quad \begin{aligned} u(x) &= (V(x)-E)^{-1/4} e^{z(x)} (1+a^+(x, x_+)) \\ v(x) &= (V(x)-E)^{-1/4} e^{-z(x)} (1+a^-(x, x_-)) \end{aligned}$$

avec $a^\pm(x_\pm, x_\pm) = 0$

Les points de base sont choisis à l'infini sur la droite $\text{Re } x = -\frac{\pi}{2N}$

$$x_\pm = -\frac{\pi}{2N} \pm i\infty$$

et les expressions $a^+(x, x_+)$ et $a^-(x, x_-)$ ont de bons développements asymptotiques quand E tend vers l'infini si $x \rightarrow \text{Re } z(x, E)$ est monotone sur un chemin joignant x_\pm à x en dehors des points tournants.

c) L'endomorphisme $\tau(E)$.

Soit τ défini par $\tau f(x) = f(x-\pi)$. C'est un endomorphisme de l'espace $S(E)$ des solutions de (P-E) u = 0.

Lemme 1. On a avec $T(E) = \pi E^{1/2}$

$$(2.17) \quad \begin{aligned} \tau u &= e^{-iT(E)} u \\ \tau v &= c(E) u + e^{iT(E)} v \\ c(E) &= i e^{-iT(E)} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2z_k(E)} (1+O(E^{-1/2})) \end{aligned}$$

Ce lemme se démontre aisément en calculant les wronskiens $W(u, v)$, $W(u, \tau u)$, $W(v, \tau v)$, $W(v, \tau u)$ par les formules de [1].

Comme E est valeur propre périodique si et seulement si ± 1 est valeur propre de $\tau(E)$ on retrouve que les valeurs propres périodiques sont n^2 , $n = 0, 1, \dots$

Pour $E = n^2$ on note u_n et v_n les solutions ci-dessus et on a

$$(2.19) \quad \begin{aligned} (P-n^2)u_n &= 0 & (\tau-(-1)^n)u_n &= 0 \end{aligned}$$

$$(P-n^2)v_n = 0 \quad (\tau-(-1)^n)v_n = c_n u_n$$

avec

$$(2.20) \quad c_n = c(n^2) = i(-1)^n \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2z_k(n^2)} \left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

d) Lien entre χ_n et c_n

D'abord on remarque que u_n et f_n sont proportionnelles et en comparant leur comportement quand $\text{Im} x$ tend vers $+\infty$ on obtient

$$(2.21) \quad u_n = (-n^2)^{-1/4} f_n$$

D'autre part on construit une fonction

$$(2.22) \quad g_n = \frac{x}{-2in} f_n + \sum_{\substack{\ell > n \\ \ell - n \text{ pair}}} k_\ell e^{i\ell x}$$

solution de

$$(2.23) \quad (P-n^2)g_n = f_n$$

On en déduit

$$(2.24) \quad f_{-n} = \chi_n g_n + \alpha_h v_n + \beta_h u_n$$

En comparant f_{-n} et v_n quand $\text{Im} x$ tend vers $+\infty$, on a

$$(2.25) \quad \alpha_n = (-n^2)^{1/4} \left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

D'autre part

$$(2.26) \quad \tau g_n = (-1)^n \left(g_n + \frac{\pi}{2in} f_n\right)$$

d'où on obtient

$$(2.27) \quad (\tau-(-1)^n)f_{-n} = (-1)^n \frac{\pi}{2in} \chi_n f_n + \alpha_n c_n (-n^2)^{-1/4} f_n = 0$$

si bien que

$$(2.28) \quad \chi_n = \frac{-2in}{\pi} (-1)^n c_n \left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$(2.29) \quad \chi_n = \frac{2n}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2z_k(n^2)} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Le théorème est démontré.

III. LE CAS GENERAL.

On considère un potentiel V réel-analytique, ni forcément réel, ni nécessairement de Hardy. Les quantités $M_+(E)$ et $M_-(E)$ peuvent donc être toutes deux finies et différentes. D'autre part

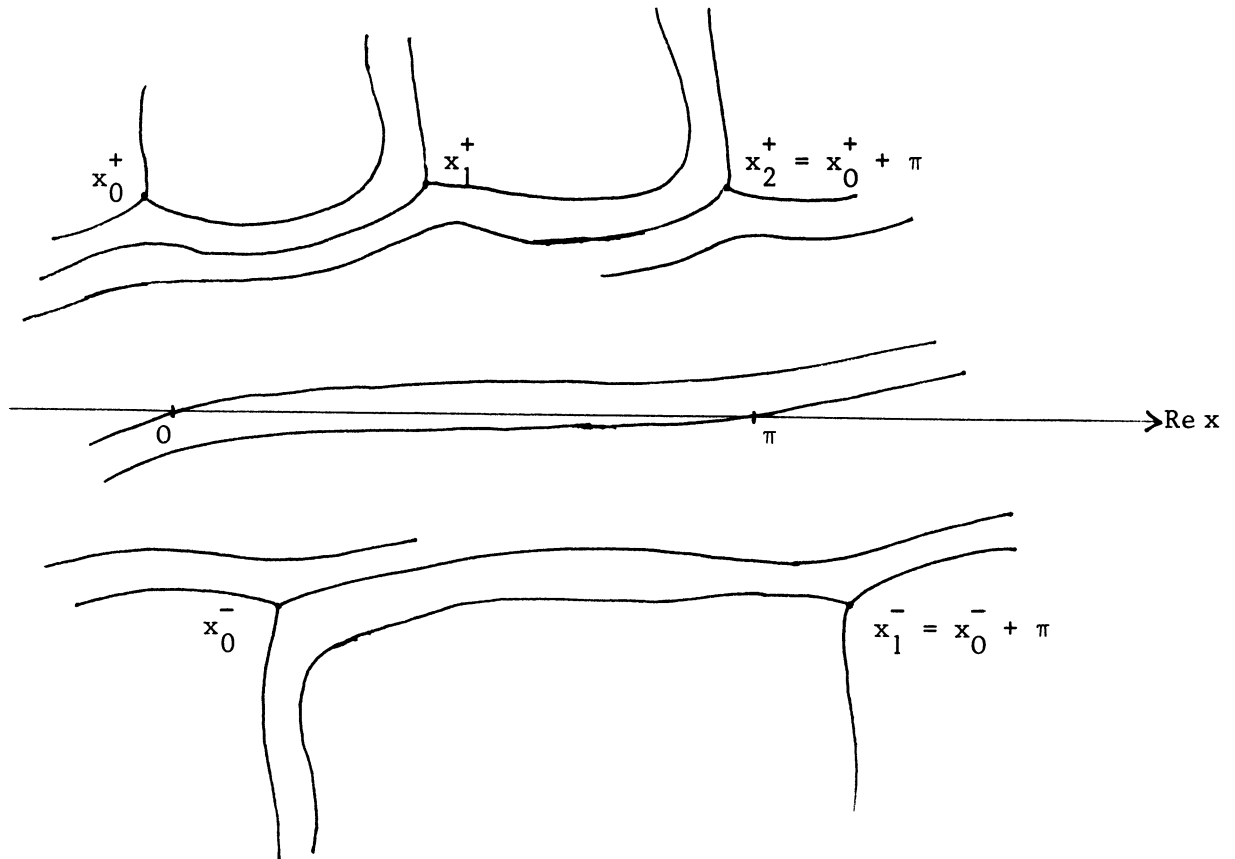
$$(3.1) \quad T(E) = \int_0^\pi (E - V(t))^{1/2} dt = \pi E^{1/2} + O(E^{-3/2})$$

n'est pas forcément réelle si bien que x et $x + \pi$ ne sont plus sur la même ligne de Stokes.

Si V est un polynôme trigonométrique

$$(3.2) \quad V(x) = \sum_{-N_-}^{N_+} c_n e^{2inx} \quad c_0 = 0 \quad c_{N_+} = v_+ \neq 0 \quad c_{N_-} = v_- \neq 0$$

il y a $N_+ + N_-$ points tournants dans une bande $\{a < \text{Re } x < a + \pi\}$ pour a bien choisi et la géométrie des lignes de Stokes est du type ci-dessous (on a pris $N_+ = 2, N_- = 1$)



Lignes de Stokes pour V de la forme (3.2), $N_+ = 2, N_- = 1$

On construit les solutions u et v comme au paragraphe 2 en prenant les points de base à l'infini

$$(3.3) \quad \begin{aligned} x_+ &= \operatorname{Re} x_0^+ - \frac{\pi}{2N_+} + i\infty \\ x_- &= \operatorname{Re} x_0^- - \frac{\pi}{2N_-} - i\infty \end{aligned}$$

La matrice de $\tau(E)$ s'exprime dans la base u, v .

$$\begin{aligned} \tau u &= au + bv \\ \tau v &= cu + dv \end{aligned}$$

Lemme 2.

$$(3.4) \quad \begin{aligned} a &= e^{-iT(E)} (1+O(E^{-1/2})) \\ d &= e^{-iT(E)} (1+O(E^{-1/2})) \\ c &= i e^{-iT(E)} \sum_{\substack{N_- - 1 \\ 0}}^{-2z_k^-(E)} (1+O(E^{-1/2})) \\ b &= -i e^{iT(E)} \sum_{\substack{N_+ - 1 \\ 0}}^{2z_k^+(E)} (1+O(E^{-1/2})) \end{aligned}$$

D'autre part $\det \tau = ad - bc = 1$ et E est valeur propre périodique ssi ± 1 est valeur propre de $\tau(E)$. Mais si ± 1 est valeur propre de $\tau(E)$ elle est double et $a+d = \pm 2$. Donc $(a-d)^2 + 4bc = 0$ soit $a-d = \pm 2ibc$ si bien que $\pm 1 = a \pm i\sqrt{bc}$.

On en déduit que les valeurs propres périodiques E_n^+ et E_n^- proches de n^2 , (elles peuvent être complexe) ont un développement asymptotique commun E_n donné par $a(E_n) = \pm 1$ et le splitting $\gamma_n = E_n^+ - E_n^-$ est donné par

$$(3.5) \quad \gamma_n \sim \frac{-2i\sqrt{b(E_n)c(E_n)}}{a'(E_n)} \quad a(E_n) = e^{in\pi}$$

D'autre part on voit que $\gamma_n = 0$ si et seulement si $b(E_n)c(E_n) = 0$. Dans ce cas P a une valeur propre double et la partie nilpotente est nulle si et seulement si $b(E_n)$ et $c(E_n)$ sont nuls.

On en déduit les résultats suivants sur le splitting des valeurs propres périodiques.

Théorème 4. Soit V réel-analytique. Pour $n > n(\varepsilon)$

$$(3.6) \quad |\gamma_n| < \exp(-n(1-\varepsilon)(M_+(n^2) + M_-(n^2)))$$

En particulier si V s'étend holomorphiquement à une bande $-B_- < \text{Im } x < B_+$ on a pour $n > n(\epsilon)$

$$(3.7) \quad |\gamma_n| < \exp(-(B_+ + B_- - \epsilon)n)$$

Théorème 5. Soit V de la forme (3.2). Pour n assez grand.

$$(3.8) \quad \gamma_n = \frac{4n}{\pi} (1+O(\frac{1}{n})) \left(\sum_{\substack{0 \leq k < N_+ \\ 0 \leq \ell < N_-}} e^{2\omega_{k\ell}(E_n)} (1+O(\frac{1}{n})) \right)^{1/2}$$

avec

$$(3.9) \quad \omega_{k\ell}(E) = \int_{x_k^-(E)}^{x_k^+(E)} (V(t)-E)^{1/2} dt$$

et

$$E_n = n^2 + O(\frac{1}{n^2})$$

L'étude du spectre de l'opérateur de Hill dans $L^2(\mathbb{R})$ pour les potentiels complexe semble un problème intéressant.

Nous tenons à remercier V. Guillemin de nous avoir signalé l'article [4] et les relations possibles avec notre travail [2].

REFERENCES.

- [1] A. GRIGIS, Estimations asymptotiques des intervalles d'instabilité pour l'équation de Hill, à paraître aux Annales de l'E.N.S.
- [2] A. GRIGIS, Sur l'équation de Hill analytique Séminaire Bony-Meyer-Sjöstrand 1984-85 exposé n°16 et Estimations asymptotiques des valeurs propres de l'équation de Hill polynomiale, Actes des Journées EDP de St Jean de Monts 1986, conférence n°7.
- [3] V. GUILLEMIN et A. URIBE, Spectral properties of a certain class of complex potentials, Transactions of the AMS 279 (2) pp. 759-771.
- [4] V. GUILLEMIN et A. URIBE, Hardy functions and the inverse spectral method, Comm. in PDE 8 (13) 1983 pp.1455-1474.

*
*
*

Alain GRIGIS
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau cedex