G. Lebeau

Problème de Cauchy semi-linéaire en 3 dimensions d'espace. Un résultat de finitude

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1986-1987), exp. n° 1, p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1986-1987____A1_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

SEMINAIRE EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES 1986 - 1987

PROBLEME DE CAUCHY SEMI-LINEAIRE EN 3 DIMENSIONS D'ESPACE. UN RESULTAT DE FINITUDE.

par G. LEBEAU

Exposé n° I

14 Octobre 1986

I ENONCE DU RESULTAT.

Soit $(x_o,x')\in\mathbb{R}^4$, $x'=(x_1,x_2,x_3)$, $\square$ l'opérateur des ondes : $\square = \partial^2_{x_o} - \Delta_{x'}$, et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^4$ qui est un domaine d'influence pour $\omega = \Omega\cap x_o = 0$.

Soit $u\in H^s_{loc}(\Omega)$, $s>2$, vérifiant l'équation des ondes semi-linéaire

$$(1)\qquad \begin{cases} \square u = p(u) \quad \text{dans } \Omega \\ u|_{x_o=o} = u_o \in H^s_{loc}(\omega) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_o}\Big|_{x_o=o} = u_1 \in H^{s-1}_{loc}(\omega) \end{cases}$$

où $p(u) = \sum_{j=o}^{d} p_j(x)u^j$ est un polynôme de u, les fonctions $p_j(x)$ étant de classe C^∞ sur Ω.

<u>Théorème</u>. On suppose que u_o et u_1 sont des distributions intégrales de Fourier de Hörmander sur une lagrangienne $\Lambda\subset T^*\omega$, <u>analytique</u>. Alors pour tout réel σ, il existe un ensemble sous-analytique, homogène, isotrope $L_\sigma\subset T^*\Omega$ (ne dépendant que de Λ) tel que $WF^\sigma(u)\subset L_\sigma$ (WF^σ est le front d'onde Sobolev d'indice σ).

<u>Corollaire</u> : Pour tout entier k, u est de classe C^k sur un ouvert dense de Ω.

Le contre exemple de M. Beals ne se produit donc jamais avec des traces distributions lagrangiennes analytiques.
[Un ensemble sous-analytique $L\subset T^*\mathbb{R}^n$, homogène, est isotrope ssi la 1-forme ξdx s'annule sur toute courbe analytique tracée dans L] .

II IDEE DE LA PREUVE.

Soit v la solution du problème linéaire :

$$(2)\qquad \begin{cases} \square v = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ v|_{x_o=u_o} \qquad \dfrac{\partial v}{\partial x_o}\Big|_{x_o=o} = u_1 \end{cases}$$

Alors $v \in H^s(\Omega)$ et est une distribution intégrale de Fourier de Hörmander sur la lagrangienne L , réunion des bicaractéristiques de $\square$ passant au-dessus de Λ . On pose

(3) $$u = v + f \ ; \ f = f_+ + f_- \quad f_\pm = f \ 1_{\pm x_o \geq o}$$

On est donc ramené à prouver le théorème pour f_+ . On désigne par E_+ (resp E_-) la parametrix de $\square$ propageant vers le futur ($x_o \geq o$), (resp le passé). On suppose dans la suite qu'on a $s < 5/2$, de sorte que si $g \in H^s_{loc}(\Omega)$, on a $E_+(g.1_{x_o \geq o}) \in H^s_{loc}(\Omega)$. Pour tout entier ℓ , on décompose f_+ sous la forme :

(4) $$f_+ = a_\ell + s_\ell$$

où a_ℓ , s_ℓ sont des éléments de $H^s_{loc}(\Omega)$, à support dans $x_o \geq o$, définis par récurrence par :

(5) $$\begin{cases} a_o = 0 \qquad s_o = f_+ \\ a_{\ell+1} = E_+\big(\sum\limits_{j,k} p_j \ C_j^k \ v^{j-k} \ 1_{x_o \geq o} \ a_\ell^{\ k} \big) \\ s_{\ell+1} = E_+\big(\sum\limits_{j,k,m \geq 1} p_j \ C_j^k \ v^{j-k} \ C_k^m \ a_\ell^{k-m} \ s_\ell^m \big) \end{cases}$$

On obtient (5) en remplaçant f_+ par $a_\ell + s_\ell$ dans l'identité $f_+ = E_+(p(v1_{x_o \geq o} + f_+))$. Les a_ℓ sont calculables à partir de la solution v du problème linéaire. Pour étudier les s_ℓ , on utilise des espaces de Sobolev sur l'espace produit $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \times \ldots \times \mathbb{R}^4$ (k+1 facteurs).

<u>Définition</u> 1. Soit $\underline{X}^k = (\underline{x}^1, \ldots, x^k) \in \mathbb{R}^{4k}$, $\bar{y}^* = (\bar{y}, \bar{\eta}) \in T^*\mathbb{R}^4 \setminus 0$ et $\sigma \geq 0$. Une distribution $b(x^1, \ldots, x^k; y)$ appartient à B^σ_k au point $(\underline{X}^k, \bar{y}^*)$ s'il existe $\phi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^{4k})$ égale à 1 près de $\underline{X}^k$, $\varphi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^4)$ égale à 1 près de $\bar{y}$ et Γ voisinage conique de $\bar{\eta}$ tels que

$$\widehat{\phi \cdot \varphi b}(\xi^1, \ldots, \xi^k; \eta) \prod_{j=1}^{k} (1 + |\xi^j|)^{-s} (1 + |\eta|)^\sigma \in L^2(\mathbb{R}^{4k} \times \Gamma)$$

On note $\dot{B}^\sigma_{k,\bar{y}^*} = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega^{k+1})$, support $(u) \subset$ $\{\forall j,\ x_j \in$ cône rétrograde issu de $y\}$ et $u \in B^\sigma_k$ en tout point $(X^k, \bar{y}^*)\}$

Ces espaces vérifient les propriétés suivantes

(6) 1) Si $a(x^j)\in H^s(\mathbb{R}^4)$ près de $\underline{x}^j$ et $b\in B_k^\sigma$ au point $(\underline{X}^k,\overline{y}^*)$, alors $ab\in B_k^\sigma$ au point $(\underline{X}^k,\overline{y}^*)$.

(7) 2) Si $b\in \dot{B}^\sigma_{k,\overline{y}^*}$ est à support compact en x

$$\int b(x^1,\dots,x^k;y)\,dx^1\dots dx^k \in H^\sigma_{\overline{y}^*}(\mathbb{R}^4)$$

où l'espace de droite est le Sobolev microlocal usuel.

(8) 3) Si $b\in \dot{B}^\sigma_{k,\overline{y}^*}$, on note $E_-^{\otimes k}(b)$ l'unique distribution qui vérifie $\square_{x_1}\dots\square_{x_k} E_-^{\otimes k}(b) = b$ et support $(E_-^{\otimes k}b)\subset\{\forall_j\ x^j \in$ cône rétrograde issu de $y\}$.
Alors $E_-^{\otimes k}(b)\in \dot{B}^\sigma_{k,\overline{y}^*}$. Si de plus

$$\forall X^k\ (X^k;\xi^1 = \quad = \xi^k = 0,\ \overline{y}^*)\notin WF(b)$$

alors $E_-^{\otimes k}(b)\in \dot{B}^{\sigma+1}_{k,\overline{y}^*}$

(9) 4) Soit $\prod_{j=1}^k \delta_{x^j,\ell_j}$ l'opérateur de $\mathcal{D}'(\Omega^{k+1})$ dans $\mathcal{D}'(\Omega^{\ell_1+\dots+\ell_k+1})$

défini par

$$\forall\varphi\in C_o^\infty(\Omega^{\ell_1+\dots+\ell_{k+1}})\quad \prod_{j=1}^k \delta_{x^J,\ell_j}(b).\varphi = \int b(x^1,..,x^k;y)\varphi(\underbrace{x^1,..,x^1}_{\ell_1\text{ fois}};\dots;\underbrace{x^k,..,x^k}_{\ell_k\text{ fois}},y$$

Alors si $b\in \dot{B}^\sigma_{k,\overline{y}^*}$, $\prod_{j=1}^k \delta_{x^j,\ell_j}(b)\in \dot{B}^\sigma_{\ell_1+\dots+\ell_k,\overline{y}^*}$

On pose à présent $B^\sigma_{\overline{y}^*} = \bigoplus_{k=1}^\infty \dot{B}^\sigma_{k,\overline{y}^*}$, et on définit par récurrence des sous-$\mathbb{C}$-espaces vectoriels V_ℓ^ν $0\leqslant\nu\leqslant\ell$ de $B^o_{\overline{y}^*}$, (indépendants de $\overline{y}^*$) en posant

$$(10)\qquad \begin{cases} V_\ell^o = \mathbb{C}.\delta_{x=y} \\ V_\ell^\nu = \mathbb{C}.\ \text{e.v engendré par les distributions de la forme} \\ \pi\delta_{x^j,\ell_j} \prod_{j=1}^k a_{\ell-\nu}^{k_j-\ell_j}(x^j)v^{n_j-k_j}(x^j)p_{n_j}(x^j)E_-^{\otimes k}(b) \end{cases}$$

où $b(x^1,\dots,x^k;y)\in V_\ell^{\nu-1}$ et $\ell_j\leqslant k_j\leqslant n_j\leqslant d$.

En utilisant des intégrations par parties successives, on montre alors :

<u>Lemme</u> 1. $\forall i \in \{0,\dots,\ell\}$, $s_\ell(y)$ est combinaison linéaire finie de fonctions de la forme

(11) $$\int s_{\ell-i}(x^1).\ \dots\ .s_{\ell-i}(x^k)\ b(x^1,\dots,x^k;y)\ dx^1\dots dx^k$$

avec $b \in V_\ell^i$.

Soit alors Z_ℓ^i les sous-ensembles de $T^*\Omega$:

(12) $$Z_\ell^i = \{\overline{y}^* \in T^*\Omega\ ,\ \exists b(x^1,\dots,x^k;y) \in V_\ell^i\ ,\ \exists(\underline{x}^1,\dots,\underline{x}^k)$$
tels que $\forall_j\ \underline{x}_o^j \geq 0$ et $(\underline{x}^1,\dots,\underline{x}^k\ ;\ \xi' = = \xi^k = 0\ ;\ \overline{y}^*) \in WF(b)\}$

En utilisant les propriétés des espaces $\dot{B}^\sigma_{k,\overline{y}^*}$, et la définition des V_ℓ^i , on obtient :

<u>Lemme</u> 2. Si $\overline{y}^* \in Z_\ell^o \cup \dots \cup Z_\ell^{\ell-1}$ on a $s_\ell \in H^\ell_{\overline{y}*}(\Omega)$

A ce stade, on n'a pas encore utilisé l'hypothèse sur les traces.

<u>Définition</u> 2. Une distribution T vérifie l'hypothèse (I) ssi le front d'onde de T est contenu dans un ensemble homogène, sous-analytique, isotrope.

L'hypothèse (I) est stable par image directe : en effet si $Z \subset T^*(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y)$ est sous-analytique, homogène, isotrope et contenu dans $|x| \leq M$, $\{(y,\eta),\ \exists x, (x,0;y,\eta) \in Z\}$ est sous-analytique, homogène, isotrope.

Pour démontrer le théorème, il suffit donc, d'après (4) et le lemme 2, de prouver que les a_ℓ vérifient l'hypothèse (I), ainsi que tous les éléments des V_ℓ^i . En utilisant un grand nombre de fois la stabilité de l'hypothèse (I) par produit-tensoriel et image directe, on est ramené à prouver le résultat suivant, conséquence du théorème de désingularisation analytique réel de Hironaka :

<u>Lemme</u> 3. Soit $f_1,\dots,f_N$, $g_1,\dots,g_N$ des fonctions analytiques $\sigma_1(x,\lambda_1),\dots,\sigma_N(x,\lambda_N)$ des symboles C^∞ de degré < -1 . Alors

$$u(x) = 1_{\{g_1 \geq o,\dots,g_N \geq o\}} \prod_{j=1}^N \int e^{i\lambda_j f_j(x)}\ \sigma_j(x,\lambda_j)d\lambda_j$$

vérifie l'hypothèse (I) .

BIBLIOGRAPHIE.

[1] M. BEALS : "Self spreading..." Ann. of Math 118.

[2] J.M. BONY : "Interaction des singularités..." Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz 81-82 n°2 et 83-84 n°10.

[3] J.M. BONY : "Singularités de P^b de Cauchy..." Advances in Microlocal Analysis. Congrès Nato. Castelvecchio 1985 Reidel Ed. H.G. Garnir.

[4] Y. CHEMIN : Thèse 3ème cycle 1986 Orsay.

[5] R. MELROSE : "Conormal Rings..." Advances in Microlocal Analysis. Congrès Nato Castelvecchio 1985 Reidel Ed. H.G. Garnir.

*
* *
*