C. Sabbah

Polynômes de Bernstein-Sato à plusieurs variables

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1986-1987), exp. nº 19, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1986-1987____A18_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES 1986 - 1987

POLYNOMES DE BERNSTEIN-SATO A PLUSIEURS VARIABLES.

par C. SABBAH

Exposé n°XIX

28 Avril 1987

Polynômes de Bernstein-Sato à plusieurs variables

Claude Sabbah

1 Le polynôme de Bernstein

Je rappelle dans ce paragraphe quelques résulats concernant le polynôme de Bernstein-Sato associé à un polynôme $f : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$ ou à une fonction analytique $f : X \to \mathbf{C}$ définie sur une variété analytique complexe X, au voisinage d'un compact K de X.

1.1 Si $s \in \mathbf{C}$ est tel que $Re(s) > 0$, on peut définir f^s comme une fonction analytique si l'on se place dans un domaine où $\arg(f)$ admet une détermination. Il existe un polynôme non nul à une variable $B(s) \in \mathbf{C}[s]$ et un opérateur différentiel $P(x, \partial_x, s)$ à coefficients analytiques tels que l'on ait la relation

$$B(s) \cdot f^s = P(x, \partial_x, s) \cdot f^{s+1}$$

Ceci permet de définir f^s comme une "distribution méromorphe en s". On appelle *polynôme de Bernstein-Sato* de f le générateur b de l'idéal des polynômes B satisfaisant une telle relation, dont le coefficient dominant est égal à 1. L'existence d'un tel polynôme est prouvée par Bernstein [1], Björk [2].

1.2 Le polynôme de Bernstein intervient dans les problèmes suivants :

- soit $\varphi : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact contenu dans K. L'intégrale

  $$I_\varphi(s) = \int |f|^{2s} \varphi \, dx \wedge d\bar{x}$$

  est une fonction holomorphe de s pour $\{s \in \mathbf{C} | Re(s) > 0\}$. Cette fonction se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$, dont les pôles sont des décalés entiers des zéros de b ou de $\bar{b}$ (on verra plus loin que ce sont les mêmes), c'est à dire sont de la forme $\alpha - n$ avec $b(\alpha) = 0$ et $n \in \mathbf{N}$. On voit ce résultat en considérant l'expression $b(s)\bar{b}(s)I(s)$ et en appliquant une intégration par parties (*voir* [2]).

- on obtient ainsi une distribution T

  $$\varphi \to Rés_{\{s=-1\}} I_\varphi(s)$$

  qui vérifie l'équation $| f |^2 \, T = 1$

- on peut aussi utiliser le polynôme de Bernstein pour obtenir une solution fondamentale pour un opérateur à coefficients constants (*voir* [2, Chap. 7]).

1.3 Les zéros du polynôme de Bernstein sont des rationnels strictement négatifs ([3]). Si f est à singularité isolée et si α est un zéro du polynôme de Bernstein de f au voisinage de cette singularité, le nombre complexe $\exp -2i\pi\alpha$ est une racine de l'opérateur de monodromie agissant sur la cohomologie de la fibre de Milnor F de f en cette singularité x_0 (*voir* [9] pour des résultats plus généraux). Rappelons que l'on a

$$F = \{x \in \mathbf{C}^n / \|x - x_0\| < \varepsilon \ll 1 \text{ et } f(x) = t, |t| \ll \varepsilon\}$$

1.4 Si u est une distribution sur $\mathbf{C}^n$, satisfaisant un système holonome d'équations aux dérivées partielles à coefficients holomorphes, on a aussi une relation

$$b_u(s) \cdot f^s u = P_u(x, \partial_x, s) \cdot f^{s+1} u$$

Mais dans ce cas, les zéros de b_u ne sont pas nécessairement rationnels ou négatifs.

2 Le cas de plusieurs fonctions

La méthode de la phase stationnaire a été en fait introduite par Kelvin pour étudier des intégrales oscillantes à plusieurs paramètres :

$$J(t, \tau) = \int_{\mathbf{R}^n} \exp i(tf(x) + \tau g(x)) \, \varphi(x) dx$$

Un problème général est aussi de calculer une intégrale de phase stationnaire avec une phase dépendant de paramètres

$$J(t, \lambda) = \int_{\mathbf{R}^n} \exp it f_\lambda(x) \, \varphi(x) dx$$

Les mêmes problèmes se posent pour la transformation de Mellin :

1. prolongement méromorphe de la fonction de deux variables

$$I(s, \sigma) = \int_{\mathbf{R}^n} f^s g^\sigma \varphi(x) dx$$

2. étude de la fonction

$$I(s, \lambda) = \int_{\mathbf{R}^n} f_\lambda^s \, \varphi(x) dx$$

Je renvoie à [5,4,12] pour l'utilisation de tels résultats. Je vais m'intéresser au premier problème.

Soit $(f_1, \ldots, f_\kappa)$ des fonctions analytiques complexes sur $\mathbf{C}^n$. Soit aussi u une distribution holonome sur $\mathbf{C}^n$. Soit K un compact de $\mathbf{C}^n$.

Théorème 2.1 *Il existe pour tout $k \in \{1, \ldots, \kappa\}$ des équations fonctionnelles du type suivant*

$$B_k(s_1, \ldots, s_\kappa) \, f_1^{s_1} \cdots f_\kappa^{s_\kappa} \cdot u = P_k(x, \partial_x, s_1, \ldots, s_\kappa) \cdot f_1^{s_1} \cdots f_k^{s_k+1} \cdots f_\kappa^{s_\kappa} \cdot u$$

De plus, il existe un ensemble fini $\mathcal{L}$ de formes linéaires sur $\mathbf{Q}^\kappa$ à coefficients dans $\mathbf{N}$, premiers entre eux, telles que l'on ait

$$B_k(s_1, \ldots, s_\kappa) = \prod_{L \in \mathcal{L}} \prod_{i \in I_k} (L(s) + \alpha_{k,L,i})$$

où $\alpha_{k,L,i}$ est un nombre complexe.

Remarques.

1. D'après ce théorème, une intégrale

$$I(s,\sigma) = \int_{\mathbf{C}^n} |f|^{2s}\, |g|^{2\sigma}\, \varphi\, dx \wedge d\bar{x}$$

définie pour $Re(s) > 0, Re(\sigma) > 0$, se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}^2$ à pôles le long de droites de pentes rationnelles. Cette conséquence était connue de Kashiwara et Kawai (*voir* [5]) : on peut l'obtenir simplement en utilisant la résolution des singularités, et en démontrant l'assertion dans le cas où f et g sont des monômes.

2. Si $\kappa = 2$, les formes linéaires jouent le rôle des pentes d'un polygône de Newton.

3. Comme $\mathbf{C}[s_1, \ldots, s_\kappa]$ n'est pas principal, il n'y a pas nécessairement de polynôme minimal b_k parmi les polynômes B_k qui satisfont une telle équation fonctionnelle. De même, il n'y a pas *a priori* un ensemble $\mathcal{L}$ minimal.

On peut préciser cependant une méthode pour calculer un ensemble $\mathcal{L}$ lorsque la distribution u définit un module holonome *régulier*. Le résultat suivant est montré dans [11].

Théorème 2.2 *Supposons de plus que u satisfasse un système holonome régulier. Alors on peut trouver un ensemble $\mathcal{L}$ qui ne dépend que de la géométrie de la variété caractéristique du $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{D}_X u$ relativement à $f_1, \ldots, f_\kappa$.*

Remarque. Les zéros $\alpha_{k,L,i}$ de B_k dépendent en général du $\mathcal{D}$-module lui même et pas seulement de sa variété caractéristique. De plus, si $u = 1$, les polynômes B_k donné par le Théorème 2.2 sont tels que ces nombres complexes $\alpha_{k,L,i}$ sont en fait rationnels.

Exemple. Considérons le cas de deux fonctions f et g définies sur un voisinage de l'origine dans $\mathbf{C}^n$. Supposons que l'on ait $f(0) = 0$, $g(0) = 0$ et que le lieu critique de l'application (f,g) au voisinage de 0 soit fini sur $\mathbf{C}^2$. Soit Δ son image dans $\mathbf{C}^2$, qui est un germe de courbe plane. On peut alors choisir pour $\mathcal{L}$ l'ensemble composé des formes de coordonnées sur $\mathbf{Q}^2$ et des formes $L_i(s_1, s_2) = m_i s_1 + n_i s_2$ avec $m_i = (\Delta_i \cdot \{t_1 = 0\})$, $n_i = (\Delta_i \cdot \{t_2 = 0\})$, où Δ_i (pour i dans un ensemble fini d'indices) parcourt l'ensemble des branches locales de Δ.

Note. Une démonstration un peu différente de ce résultat a aussi été donnée par F. Loeser.

Remarque. Considérons le problème de la transformation de Mellin à paramètres. Plaçons-nous dans le cas où $g : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction analytique réelle, vue comme une famille $g_\lambda : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Soit φ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact et considérons l'intégrale

$$I_\varphi(s,\lambda) = \int_{\mathbf{R}^n} g_\lambda^s\, \varphi(x) dx$$

Si on considère une résolution des singularités de l'application $(g, \lambda) : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \to \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, on voit que, au voisinage d'une valeur spéciale de λ, par exemple $\lambda = 0$, il existe un entier q tel que, si on pose $\lambda' = \lambda^{1/q}$, on ait au voisinage de $\lambda = 0$

$$I_\varphi(s, \lambda) = \sum_{i \in I} \lambda'^{M_i s} J_{\varphi,i}(s, \lambda')$$

où I est un ensemble fini d'indices, M_i un entier positif ou nul, $J_{\varphi,i}$ une fonction méromorphe de s à coefficients analytiques réels en λ'. Remarquons les deux points suivants

- On ne peut pas imposer *a priori* que les $J_{\varphi,i}(s, \lambda')$ n'aient pas de pôles pour $Re(s) \geq 0$.
- L'ensemble des rationnels M_i/q se calcule à l'aide de la résolution des singularités de l'application (g, λ).

Il est probable que l'on peut trouver une telle décomposition avec des rationnels $r_i = M_i/q$ ne dépendant que de l'application complexifiée de (g, λ) et pas du choix d'une résolution. Si par exemple cette application tombe sous le coup de l'exemple précédent, cet ensemble de rationnels coïncide avec les pentes des formes linéaires qui ont été exhibées (ceci est suggéré par la considération de la transformée de Mellin de I_φ en λ), ainsi que me l'a indiqué F. Loeser.

3 Quelques indications sur la preuve du théorème 2.1

On transforme le problème en un problème sur les $\mathcal{D}$-modules holonomes. Ce dernier est traité à la manière de Kashiwara ([3]) : on considère un $\mathcal{D}$-module holonome sur $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^\kappa$ (à support dans le graphe de $(f_1, \ldots, f_\kappa)$). On note $t_1, \ldots, t_\kappa$ les coordonnées sur $\mathbf{C}^\kappa$

On définit sur $\mathcal{D}$, anneau des opérateurs différentiels à coefficients holomorphe en $x_1, \ldots, x_n$, $t_1, \ldots, t_\kappa$, des filtrations ${}^kV.(\mathcal{D})$ (pour tout $k \in \{1, \ldots, \kappa\}$) pour lesquelles t_k est de degré -1, ∂_{t_k} de degré 1, et les autres variables de degré 0. Chacune de ces filtrations est indexée par $\mathbf{Z}$. On obtient une filtration indexée par $\mathbf{Z}^\kappa$ en posant

$$V_{\sigma_1,\ldots,\sigma_\kappa}(\mathcal{D}) = {}^1V_{\sigma_1}(\mathcal{D}) \bigcap \cdots \bigcap {}^\kappa V_{\sigma_\kappa}(\mathcal{D})$$

On considère alors l'anneau de Rees

$$\mathcal{R}_V(\mathcal{D}) = \bigoplus_{\sigma \in \mathbf{Z}^\kappa} V_\sigma(\mathcal{D}) \cdot u^\sigma$$

où $u = (u_1, \ldots, u_\kappa)$ sont des variables indépendantes et où on a posé $u^\sigma = u_1^{\sigma_1} \cdots u_\kappa^{\sigma_\kappa}$.

Remarque. Quand $\kappa = 1$, l'anneau de Rees joue pour les $\mathcal{D}$-modules le rôle de l'anneau des opérateurs 2-microdifférentiels (*voir* [6]) le long de la variété lagrangienne $T^*_{Y_1}(\mathbf{C}^n \times \mathbf{C})$, où on a posé $Y_1 = \{t_1 = 0\}$. Pour κ quelconque, il joue le rôle d'une "2-microlocalisation simultanée" le long des sous-variétés $T^*_{Y_k}(\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^\kappa)$ (avec $k \in \{1, \ldots, \kappa\}$).

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$-module holonome et $U.(\mathcal{M})$ une filtration indexée par $\mathbf{Z}^\kappa$. On dit que $U.(\mathcal{M})$ est bonne pour $V.(\mathcal{D})$ si le module de Rees

$$\mathcal{R}_U(\mathcal{M}) = \bigoplus_{\sigma \in \mathbf{Z}^\kappa} U_\sigma(\mathcal{M}) \cdot u^\sigma$$

est un $\mathcal{R}_V(\mathcal{D})$-module cohérent. Pour chaque forme linéaire L à coefficients dans $\mathbf{N}$ premiers entre eux, on peut alors définir une filtration indexée par $\mathbf{Z}^\kappa$

$$^LU_\lambda(\mathcal{M}) = \sum_{\{\sigma | L(\sigma) \leq \lambda\}} U_\sigma(\mathcal{M}).$$

Si L_k est la forme de coordonnées $L_k(\sigma) = \sigma_k$, on trouve ainsi une filtration bonne pour la filtration ${}^kV.(\mathcal{D})$ introduite plus haut. Le théorème de Bernstein ou Björk, adapté à la manière de Kashiwara, nous dit que, pour L fixée, il existe un polynôme de Bernstein et une relation, pour tout $\lambda \in \mathbf{Z}$

$$\prod_{i \in I} [L(t_1\partial_{t_1}, \ldots, t_\kappa\partial_{t_\kappa}) + \lambda + \alpha_{L,i}] \cdot {}^LU_\lambda(\mathcal{M}) \subset {}^LU_{\lambda-1}(\mathcal{M})$$

avec $\alpha_{L,i} \in \mathbf{C}$.

Le point clé consiste maintenant à montrer qu'il existe un ensemble fini $\mathcal{L}$ tel que la filtration indexée par $\mathbf{Z}^\kappa$ définie pour $\sigma \in \mathbf{Z}^\kappa$ par

$$\bar{U}_\sigma(\mathcal{M}) = \bigcap_{L \in \mathcal{L}} {}^LU_{L(\sigma)}(\mathcal{M})$$

soit aussi une bonne filtration.

Ce résultat est démontré dans [10] en utilisant une variante du "théorème d'aplatissement" d'Hironaka, variante prouvée de même dans [10] en collaboration avec F. Castro.

On obtient ainsi le théorème 2.1 sous la forme suivante

Il existe un ensemble fini $\mathcal{L}$ et des polynômes B_k comme dans l'énoncé du théorème 2.1 tels que, pour tout $\sigma \in \mathbf{Z}^\kappa$ on ait l'inclusion

$$B_k(t_1\partial_{t_1}, \ldots, t_\kappa\partial_{t_\kappa}) \cdot U_\sigma(\mathcal{M}) \subset U_{\sigma - 1_k}(\mathcal{M})$$

où $\sigma - 1_k = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k - 1, \ldots, \sigma_\kappa)$.

Remarque. Le point clé précédent consistait en un résultat de finitude : finitude de l'ensemble $\mathcal{L}$. On peut prouver par les mêmes méthodes d'autres résultats de finitude. Par exemple, on peut chercher à comparer une filtration ${}^1V.(\mathcal{D})$ avec la filtration $F.(\mathcal{D})$ par le degré des opérateurs différentiels. On retrouve ainsi, dans le cas des $\mathcal{D}$-modules, la finitude des "indices critiques" d'un module holonome le long de la variété $T^*_{Y_1}(\mathbf{C}^n \times \mathbf{C})$ introduits par Y. Laurent ([7,8]).

Références

[1] J. Bernstein, *The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter,* Funct. An. and Appl. **6** (1972),

[2] J.-E. Björk, *Rings of Differential Operators,* North Holland, Amsterdam, 1979.

[3] M. Kashiwara, *B-functions and holonomic systems,* Invent. Math. **38** (1976), 33–53.

[4] M. Kashiwara, T. Kawai, *Micro-local analysis of Feynman amplitudes, Seminar on microlocal analysis,* Ann. of Math. Studies **93** P.U.P., Princeton, 1979.

[5] M. Kashiwara, T. Kawai, *On the holonomic systems for* $\prod(f_i+\sqrt{-1}\,0)^{\lambda_i}$, Publication R.I.M.S. Kyoto Univ. **15** (1979), 551–575.

[6] Y. Laurent, *Théorie de la deuxième microlocalisation dans le domaine complexe,* Progress in Math. **53** Birkhaüser, Boston, 1985.

[7] Y. Laurent, *Calcul d'indices et irrégularité pour les systèmes holonomes,* Astérisque **130** (1985), 352–364.

[8] Y. Laurent, *Polygônes de Newton et b-fonctions pour les modules microdifférentiels,* Prépublication Univ. Paris Sud 1986.

[9] B. Malgrange, *Polynôme de Bernstein-Sato et cohomologie évanescente,* Astérisque **101–102** (1983), 243–267.

[10] C. Sabbah, *Proximité évanescente, I. La structure polaire d'un* $\mathcal{D}$*-module, Appendice en collaboration avec F. Castro,* à paraitre dans Compositio Math. (1987),

[11] C. Sabbah, *Proximité évanescente, II. Equations fonctionnelles pour plusieurs fonctions analytiques,* Prépublication École Polytechnique décembre 1986.

[12] A. Yger, *Formules de division et prolongement méromorphe,* Prépublication de l'Université de Bordeaux I octobre 1986.

Unité Associée au C.N.R.S. n° 169

Centre de Mathématiques
École Polytechnique
F-91128 Palaiseau Cedex