Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

S. Kichenassamy

# Périmètre sur les variétés et application aux équations aux dérivées partielles

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1986-1987), exp. n° 14, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1986-1987____A13_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES 1986 - 1987

# PERIMETRE SUR LES VARIETES ET APPLICATION AUX EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

par S. KICHENASSAMY

Exposé n°XIV

24 Février 1987

Le périmètre d'une partie mesurable de $\mathbb{R}^N$ a été défini dans [1] par E. de Giorgi ; c'est la variation totale de sa fonction caractéristique. Il vérifie une inégalité isopérimétrique et permet d'établir des estimations a priori dans de nombreux problèmes linéaires et non linéaires (voir Talenti [3] et ses références).

Nous allons donner ici une généralisation de cette notion au cas de parties de variétés compactes.

Nous définirons dans une première partie le périmètre d'une partie $E$ d'une variété riemannienne compacte orientée comme la variation totale de sa fonction caractéristique $\chi_E$, et nous montrerons que ce périmètre est la limite des variations totales des régularisées de $\chi_E$ par le noyau de la chaleur. Nous en déduirons une inégalité isopérimétrique, et une formule de type Fleming-Rishel.

Dans un second temps, nous étudierons un problème quasilinéaire elliptique dans $\mathbb{R}^N$, dont l'étude a nécessité l'introduction du périmètre sur les variétés (Kichenassamy [2]). On verra que les méthodes usuelles de symétrisation dans $\mathbb{R}^N$ achoppent, mais que l'on pourra conclure en introduisant une méthode de symétrisation sur $S^N$ ; cette technique met en jeu les propriétés du périmètre évoquées dans la première partie.

## 1. PERIMETRE DANS UNE VARIETE.

On considère dans cette section une variété riemannienne $(M,g)$ compacte, orientée et sans bord.

a) <u>Première définition</u> :

Soit $u \in L^1(M)$. On définit sa <u>variation totale</u>

(1) $$V(u) = \sup_{\substack{\varphi \text{ champ de vecteurs } C^\infty \\ |\varphi| \leqslant 1}} \int_M u \operatorname{div}\varphi \, dV .$$

On définit le <u>périmètre</u> d'une partie mesurable $E$ de $M$ par

(2) $$P(E) = V(\chi_E)$$

où $\chi_E$ désigne la fonction caractéristique de $E$ .

Remarques. i) Lorsque $E$ admet un bord de classe $C^{\infty}$, $P(E)$ correspond à la mesure de $\partial E$ au sens usuel (soit le volume de $\partial E$ pour la structure riemannienne induite)

ii) $V(u) = V(1-u)$ pour tout $u$ et donc $P(E)=P(M-E)$.

iii) Il est facile de voir que si $(u_n)$ tend vers $u$ dans $L^1(M)$, alors $V(u) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} V(u_n)$.

b) Deuxième définition :

Soit $u_o \in L^1(M)$. On pose $u(t) = \int_M e_o(x,y,t)u_o(y)dV(y)$ où $e_k(x,y,t)$ désigne le noyau de la chaleur pour les k-formes.

Lemme 1.1. Il existe $\theta$ ne dépendant que de $M$ tel que $f_{u_o} : t \mapsto e^{-\theta t}\int_M |du(t)|dV$ soit décroissante.

On pose alors que le périmètre de $E$ est la limite, lorsque $t\downarrow 0$, de la fonction $f_{\chi_E}$. L'équivalence des deux définitions résulte du

Lemme 1.2. Pour tout $u_o \in L^1(M)$,

$$V(u_o) = \lim_{t\downarrow 0} \int_M |du(t)|dV \tag{3}$$

où $u$ est la solution de l'équation de la chaleur avec donnée initiale $u_o$.

Preuves de 1.1. et 1.2. Nous donnons ici de brèves indications sur ces démonstrations, renvoyant à Kichenassamy [2] pour les détails.

- La preuve du Lemme 1.1. repose sur un calcul explicite aboutissant à une relation de la forme

$$\frac{d}{dt} \int_M J(|du|)dV \leq C \int_M J(|du|)dV$$

où $J$ est une fonction convexe approchant la valeur absolue et $C$ est une borne sur les termes de courbure intervenant dans les formules de Weizenböck.

- Le lemme 1.2. repose essentiellement sur la propriété $d_x e_k = \delta_y e_{k+1}$ du noyau de la chaleur.

c) Inégalité isopérimétrique :

Théorème 1.3. Il existe une constante $C_I$ telle que pour tout $E$ mesurable inclus dans $M$ on ait

$$P(E) \geqslant C_I \min(|E|,|M-E|)^{1-1/N} \quad .$$

Preuve. On déduit de l'inégalité de Sobolev pour les régularisées de $u_o \in L^1(M)$ que

$$V(u_o) \geqslant C^{te} \inf_{c\in\mathbb{R}} \left(\int_M |u_o - c|^{\frac{N}{N-1}} dV\right)^{1-1/N} \quad .$$

On applique ensuite ce résultat à $u_o = \chi_E$ .

d) Formule de type Fleming-Rishel :

Il s'agit du résultat suivant

Théorème 1.4. Pour tout $u \in L^1(M)$, $V(u)$ est fini si et seulement si $t \mapsto P(u > t)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ et l'on a alors l'égalité :

$$V(u) = \int_{-\infty}^{\infty} P(u > t)dt \ .$$

Remarque : Le résultat correspondant dans le cas de l'espace euclidien est dû à Fleming et Rishel [4].

Démonstration. On montre d'abord que, pour tout $u \in L^1(M)$, on a

(3) $$V(u) \leqslant {}_*\!\int_{-\infty}^{+\infty} P(u > t)dt \ ,$$

et

(4) $$V(u) \geqslant {}^*\!\int_{-\infty}^{+\infty} P(u > t)dt \ .$$

Le théorème en résulte.

i) Preuve de (3) :

On écrit, pour tout $x$ dans $M$ ,

(5) $$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} b(t,x)dt$$

où

$$b(t,x) = \begin{cases} +1 & \text{si } u(x) > t \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } u(x) \leqslant t < 0 \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Il est clair que $\int_M \int_{-\infty}^{\infty} |b(t,x)|dt\, dV(x) = \|u\|_{L^1(M)}$ .

Soit $\varphi$ un champ de vecteurs $C^\infty$ . On a

(6) $$\int_M u\, \mathrm{div}\varphi\, dV = \int_M dV(x) \int_{-\infty}^{\infty} b(t,x)\mathrm{div}\varphi\, dt$$

et on voit facilement que $V(b(t,x)) = P(u>t)$ pour tout $t$ .

Prenant $\varphi$ de longueur $\leqslant 1$ on obtient

$$\int_M u\, \mathrm{div}\varphi\, dV \leqslant {}_*\!\int_{-\infty}^{\infty} P(u>t)dt,$$

d'où l'inégalité (3).

ii) <u>Preuve de</u> (4) : Il résulte de la deuxième définition du périmètre (Eq.(3)) qu'il existe des fonctions $(u_n)_{n\geqslant 1}$ telles que

(7) $$u_n \to u \quad \text{p.p. et dans } L^1(M) \quad ; \quad V(u_n) \to V(u) \; ; \; u_n \in C^\infty(M) \; .$$

Par approximation, on peut supposer que les $u_n$ sont des fonctions de Morse, auquel cas (par la formule de la "co-aire" par exemple)

(8) $$V(u_n) = \int_{-\infty}^{\infty} P(u_n > s)ds \; .$$

Par le théorème de convergence dominée, $\chi_{u_n>s}$ tend vers $\chi_{u>s}$ dans $L^1(M)$, pour chaque $s$ fixé. Par la Rem.iii) du a) ci-dessus,

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} P(u_n > s) \geqslant P(u>s) \; .$$

Le lemme de Fatou appliqué à (8) donne l'inégalité (4).

<u>Remarque</u>. Il résulte en particulier de ce théorème que si $u \in W^{1,1}(M)$, $-\frac{d}{dt} \int_{u>t} |\nabla u| dV = P(u>t)$ p.p. .

2. APPLICATION A UN PROBLEME QUASILINEAIRE :

a) <u>Le problème</u> :

On cherche $u$ solution du problème suivant :

$$(9)\quad \begin{cases} Au:=-\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \Sigma_{i=1}^{m} \gamma_i \delta(x-a_i) & \text{dans } \mathbb{R}^N \\ u \to 0 \quad \text{lorsque } |x| \to \infty\,, \end{cases}$$

où $p>1$, $N \geqslant 2$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $a_i \in \mathbb{R}^N$. On dira que $u$ est <u>solution</u> de (9) si $u$ est de classe $C^1$ dans $\mathbb{R}^N - \{a_1,\ldots,a_m\}$, $|\nabla u|^{p-1} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et si $u$ vérifie (9) au sens des distributions. Il est facile de trouver une solution dans le cas m=1 (une seule singularité) : de fait si $\varphi(x) = C_p|x|^{(p-N)/(p-1)}$ si $p \neq N$ (resp. $C_N \operatorname{Log}(1/|x|)$ pour $p = N$) avec $C_p$, $C_N$ convenablement choisis, alors $A\varphi = \delta$. Bien sûr, $\varphi \to 0$ à l'infini ssi $p \geqslant N$. Nous allons maintenant voir comment résoudre (9) dans le cas général :

<u>Théorème 2.1. Supposons que</u> $\Sigma_{i=1}^{m} \gamma_i = 0$ <u>si</u> $p \geqslant N$. <u>Alors il existe une seule solution</u> $u$ <u>de</u> (9) <u>telle que</u> $u - \Sigma_{i=1}^{m} \gamma_i \varphi(x-a_i)$ <u>soit bornée sur</u> $\mathbb{R}^N$.

Pour la preuve de ce résultat et les motivations de (9) on renvoie le lecteur à [2]. Nous donnerons ici brièvement les étapes qui conduisent à l'existence d'une solution dans le cas $p<N$ et dans le cas $p=N$ ,ce dernier utilisant le périmètre étudié au § 1.

b) <u>Existence - $p<N$</u> :

On établit ici l'existence d'une fonction $u$ telle que $Au = 0$ sur $\mathbb{R}^N - \{a_1,\ldots,a_m\}$ et telle que $u - \Sigma_{i=1}^{m}\gamma_i\varphi(\cdot - a_i)$ soit bornée. On peut en déduire [2] que l'équation (9) est vérifiée et que $u$ admet une limite lorsque $|x| \to \infty$,d'où l'existence d'une solution de notre problème.

<u>1^e étape</u> : On résout $\begin{cases} Au^\varepsilon = \chi^\varepsilon & \text{sur } B(1/\varepsilon) \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial B(1/\varepsilon) \end{cases}$

pour tout $\varepsilon > 0$, en prenant pour $\chi^\varepsilon$ des fonctions approchant la mesure $\Sigma_i \gamma_i \delta(x-a_i)$ (convenablement choisies).

<u>2^e étape</u> : On montre, par une technique de symétrisation, que pour tout compact $K$ de $\mathbb{R}^N$, il existe $C_K$ tel que

$$\|u^\varepsilon\|_{L^q(K)} \leqslant C_K \quad .$$

Ici, $q$ est un réel $> p-1$ (indépendant de K).

<u>3^e étape</u> : On montre, grâce à des théorèmes de régularité pour l'équation

$Au = 0$ (voir [2]) qu'il existe un $\alpha > 0$ tel que pour tout compact $K$ de $\mathbb{R}^N - \{a_1, \dots, a_m\}$,

$$\| u^\varepsilon \|_{C^{1,\alpha}(K)} \leqslant C'_K \ .$$

Il est alors possible de passer à la limite.

La $2^e$ étape utilise une majoration des symétrisées $(u^\varepsilon)^*$ par un multiple de la fonction $\varphi$ ; elle est possible parce que $\varphi \to 0$ pour $|x| \to \infty$. Lorsque $p = N$, il faut un autre argument.

c) <u>Existence - p=N</u> :

Il suffit d'amender la $2^e$ étape du b). Pour ce faire, on se ramène, grâce à l'invariance conforme du problème à borner les solutions de classe $W^{1,N}$ de

$$- \operatorname{div}_{S^N}(|\nabla u|^{N-2}_{S^N} \nabla u) = f \quad \text{sur la sphère } S^N \ , \text{ où } \|f\|_{L^1} \leqslant C^{te}$$

et ce en termes de la seule quantité $\|f\|_{L^1}$ .

Posons $\mu(t) = \operatorname{mes}(u > t)$. Normalisons $u$ (par addition d'une constante) de sorte que

(10) $$\operatorname{mes}(u > 0) \text{ et } \operatorname{mes}(u < 0) \text{ soient } \leqslant \frac{1}{2} \operatorname{mes}(S^N).$$

On va maintenant estimer séparément les parties positive et négative de $u$ .

Soit <u>$t > 0$</u> . (10) et l'inégalité isopérimétrique donnent

(11) $$P(u > t) \geqslant C_I \mu(t)^{1-1/N} \ .$$

D'autre part, pour presque tout $t$ on a

(12) $$- \frac{d}{dt} \int_{u>t} |\nabla u| \, dV = P(u > t).$$

Multipliant l'équation satisfaite par $u$ par $(u-t)^+$ , on obtient

(13) $$- \frac{d}{dt} \int_{u > t} |\nabla u|^N \, dV \leqslant \|f\|_{L^1}$$

pour presque tout $t$ .

Enfin, $t \mapsto t^{-1/N-1}$ étant convexe on a (p.p en t)

$$(14) \qquad \left( \frac{\frac{d}{dt} \int_{u>t} |\nabla u|^N dV}{\frac{d}{dt} \int_{u>t} |\nabla u| dV} \right)^{-\frac{1}{N-1}} \leqslant \frac{\mu'}{\frac{d}{dt} \int_{u>t} |\nabla u| dV} .$$

Combinant (11)-(14) on obtient $-\mu' \geqslant C\mu$ et comme $\mu$ est non croissante, on en déduit que la symétrisée (uni-dimensionnelle) de $u^+$ est majorée par une fonction de la forme $s \mapsto a - b\operatorname{Log} s$. Il en résulte une borne $L^q$ pour $u^+$, pour tout $q > 1$. On estime de même la fonction $u^-$. On achève la démonstration comme dans le cas $p < N$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] E. de GIORGI : Su una teoria generale della misura (r-1)-dimensionale in uno spazio ad r dimensioni. Ann. Mat. Pura ed Appl. (4) 36 (1954) 191-213.

[2] S. KICHENASSAMY : Quasilinear problems with singularities. Manuscripta Math. 57 (1987) 281-313.

[3] G. TALENTI : Nonlinear elliptic equations, rearrangements of functions and Orlicz spaces. Ann. Mat. Pura ed Appl.(4) 120 (1979) 159-184.

[4] W.H. FLEMING et R. RISHEL : An integral formula for total gradient variation. Arch. Mat. 11 (1960) 218-222.

*
* *
*