

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

S. KICHENASSAMY

Périmètre sur les variétés et application aux équations aux dérivées partielles

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1986-1987), exp. n° 14,
p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1986-1987___A13_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1986-1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES 1986 - 1987

PERIMETRE SUR LES VARIETES ET
APPLICATION AUX EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

par S. KICHENASSAMY

Le périmètre d'une partie mesurable de \mathbb{R}^N a été défini dans [1] par E. de Giorgi ; c'est la variation totale de sa fonction caractéristique. Il vérifie une inégalité isopérimétrique et permet d'établir des estimations a priori dans de nombreux problèmes linéaires et non linéaires (voir Talenti [3] et ses références).

Nous allons donner ici une généralisation de cette notion au cas de parties de variétés compactes.

Nous définirons dans une première partie le périmètre d'une partie E d'une variété riemannienne compacte orientée comme la variation totale de sa fonction caractéristique χ_E , et nous montrerons que ce périmètre est la limite des variations totales des régularisées de χ_E par le noyau de la chaleur. Nous en déduisons une inégalité isopérimétrique, et une formule de type Fleming-Rishel.

Dans un second temps, nous étudierons un problème quasilinéaire elliptique dans \mathbb{R}^N , dont l'étude a nécessité l'introduction du périmètre sur les variétés (Kichenassamy [2]). On verra que les méthodes usuelles de symétrisation dans \mathbb{R}^N achoppent, mais que l'on pourra conclure en introduisant une méthode de symétrisation sur S^N ; cette technique met en jeu les propriétés du périmètre évoquées dans la première partie.

1. PERIMETRE DANS UNE VARIETE.

On considère dans cette section une variété riemannienne (M, g) compacte, orientée et sans bord.

a) Première définition :

Soit $u \in L^1(M)$. On définit sa variation totale

$$(1) \quad V(u) = \sup_{\substack{\varphi \text{ champ de vecteurs } C^\infty \\ |\varphi| \leq 1}} \int_M u \operatorname{div} \varphi \, dV .$$

On définit le périmètre d'une partie mesurable E de M par

$$(2) \quad P(E) = V(\chi_E)$$

où χ_E désigne la fonction caractéristique de E .

Remarques. i) Lorsque E admet un bord de classe C^∞ , $P(E)$ correspond à la mesure de ∂E au sens usuel (soit le volume de ∂E pour la structure riemannienne induite)

ii) $V(u) = V(1-u)$ pour tout u et donc $P(E) = P(M-E)$.

iii) Il est facile de voir que si (u_n) tend vers u dans $L^1(M)$, alors $V(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} V(u_n)$.

b) Deuxième définition :

Soit $u_0 \in L^1(M)$. On pose $u(t) = \int_M e_k(x,y,t) u_0(y) dV(y)$ où $e_k(x,y,t)$ désigne le noyau de la chaleur pour les k -formes.

Lemme 1.1. Il existe θ ne dépendant que de M tel que $f_{u_0} : t \mapsto e^{-\theta t} \int_M |du(t)| dV$ soit décroissante.

On pose alors que le périmètre de E est la limite, lorsque $t \downarrow 0$, de la fonction f_{χ_E} . L'équivalence des deux définitions résulte du

Lemme 1.2. Pour tout $u_0 \in L^1(M)$,

$$(3) \quad V(u_0) = \lim_{t \downarrow 0} \int_M |du(t)| dV$$

où u est la solution de l'équation de la chaleur avec donnée initiale u_0 .

Preuves de 1.1. et 1.2. Nous donnons ici de brèves indications sur ces démonstrations, renvoyant à Kichenassamy [2] pour les détails.

- La preuve du Lemme 1.1. repose sur un calcul explicite aboutissant à une relation de la forme

$$\frac{d}{dt} \int_M J(|du|) dV \leq C \int_M J(|du|) dV$$

où J est une fonction convexe approchant la valeur absolue et C est une borne sur les termes de courbure intervenant dans les formules de Weizenböck.

- Le lemme 1.2. repose essentiellement sur la propriété $d_x e_k = \delta_y e_{k+1}$ du noyau de la chaleur.

c) Inégalité isopérimétrique :

Théorème 1.3. Il existe une constante C_I telle que pour tout E mesurable inclus dans M on ait

$$P(E) \geq C_I \min(|E|, |M-E|)^{1-1/N} .$$

Preuve. On déduit de l'inégalité de Sobolev pour les régularisées de $u_0 \in L^1(M)$ que

$$V(u_0) \geq C^{te} \inf_{c \in \mathbb{R}} \left(\int_M |u_0 - c|^{\frac{N}{N-1}} dV \right)^{1-1/N} .$$

On applique ensuite ce résultat à $u_0 = \chi_E$.

d) Formule de type Fleming-Rishel :

Il s'agit du résultat suivant

Théorème 1.4. Pour tout $u \in L^1(M)$, $V(u)$ est fini si et seulement si $t \mapsto P(u > t)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ et l'on a alors l'égalité :

$$V(u) = \int_{-\infty}^{\infty} P(u > t) dt .$$

Remarque : Le résultat correspondant dans le cas de l'espace euclidien est dû à Fleming et Rishel [4].

Démonstration. On montre d'abord que, pour tout $u \in L^1(M)$, on a

$$(3) \quad V(u) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} P(u > t) dt ,$$

et

$$(4) \quad V(u) \geq \int_{-\infty}^{+\infty} P(u > t) dt .$$

Le théorème en résulte.

i) Preuve de (3) :

On écrit, pour tout x dans M ,

$$(5) \quad u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} b(t, x) dt$$

où

$$b(t, x) = \begin{cases} +1 & \text{si } u(x) > t \geq 0 \\ -1 & \text{si } u(x) \leq t < 0 \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Il est clair que $\int_M \int_{-\infty}^{\infty} |b(t,x)| dt dV(x) = \|u\|_{L^1(M)}$.

Soit φ un champ de vecteurs C^∞ . On a

$$(6) \quad \int_M u \operatorname{div} \varphi dV = \int_M dV(x) \int_{-\infty}^{\infty} b(t,x) \operatorname{div} \varphi dt$$

et on voit facilement que $V(b(t,x)) = P(u > t)$ pour tout t .

Prenant φ de longueur ≤ 1 on obtient

$$\int_M u \operatorname{div} \varphi dV \leq \int_{-\infty}^{\infty} P(u > t) dt,$$

d'où l'inégalité (3).

ii) Preuve de (4) : Il résulte de la deuxième définition du périmètre (Eq.(3)) qu'il existe des fonctions $(u_n)_{n \geq 1}$ telles que

$$(7) \quad u_n \rightarrow u \text{ p.p. et dans } L^1(M) ; V(u_n) \rightarrow V(u) ; u_n \in C^\infty(M) .$$

Par approximation, on peut supposer que les u_n sont des fonctions de Morse, auquel cas (par la formule de la "co-aire" par exemple)

$$(8) \quad V(u_n) = \int_{-\infty}^{\infty} P(u_n > s) ds .$$

Par le théorème de convergence dominée, $\chi_{u_n > s}$ tend vers $\chi_{u > s}$ dans $L^1(M)$, pour chaque s fixé. Par la Rem.iii) du a) ci-dessus,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P(u_n > s) \geq P(u > s) .$$

Le lemme de Fatou appliqué à (8) donne l'inégalité (4).

Remarque. Il résulte en particulier de ce théorème que si $u \in W^{1,1}(M)$,

$$-\frac{d}{dt} \int_{u > t} |\nabla u| dV = P(u > t) \text{ p.p. .}$$

2. APPLICATION A UN PROBLEME QUASILINEAIRE :

a) Le problème :

On cherche u solution du problème suivant :

$$(9) \quad \begin{cases} Au := -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = \sum_{i=1}^m \gamma_i \delta(x-a_i) & \text{dans } \mathbb{R}^N \\ u \rightarrow 0 & \text{lorsque } |x| \rightarrow \infty, \end{cases}$$

où $p > 1$, $N \geq 2$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $a_i \in \mathbb{R}^N$. On dira que u est solution de (9) si u est de classe C^1 dans $\mathbb{R}^N - \{a_1, \dots, a_m\}$, $|\nabla u|^{p-1} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ et si u vérifie (9) au sens des distributions. Il est facile de trouver une solution dans le cas $m=1$ (une seule singularité) : de fait si $\varphi(x) = C_p |x|^{(p-N)/(p-1)}$ si $p \neq N$ (resp. $C_N \operatorname{Log}(1/|x|)$ pour $p = N$) avec C_p , C_N convenablement choisis, alors $A\varphi = \delta$. Bien sûr, $\varphi \rightarrow 0$ à l'infini ssi $p \geq N$. Nous allons maintenant voir comment résoudre (9) dans le cas général :

Théorème 2.1. Supposons que $\sum_{i=1}^m \gamma_i = 0$ si $p \geq N$. Alors il existe une seule solution u de (9) telle que $u - \sum_{i=1}^m \gamma_i \varphi(x-a_i)$ soit bornée sur \mathbb{R}^N .

Pour la preuve de ce résultat et les motivations de (9) on renvoie le lecteur à [2]. Nous donnerons ici brièvement les étapes qui conduisent à l'existence d'une solution dans le cas $p < N$ et dans le cas $p = N$, ce dernier utilisant le périmètre étudié au § 1.

b) Existence - $p < N$:

On établit ici l'existence d'une fonction u telle que $Au = 0$ sur $\mathbb{R}^N - \{a_1, \dots, a_m\}$ et telle que $u - \sum_{i=1}^m \gamma_i \varphi(\cdot - a_i)$ soit bornée. On peut en déduire [2] que l'équation (9) est vérifiée et que u admet une limite lorsque $|x| \rightarrow \infty$, d'où l'existence d'une solution de notre problème.

1^e étape : On résout
$$\begin{cases} Au^\varepsilon = \chi^\varepsilon & \text{sur } B(1/\varepsilon) \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial B(1/\varepsilon) \end{cases}$$

pour tout $\varepsilon > 0$, en prenant pour χ^ε des fonctions approchant la mesure $\sum_i \gamma_i \delta(x-a_i)$ (convenablement choisies).

2^e étape : On montre, par une technique de symétrisation, que pour tout compact K de \mathbb{R}^N , il existe C_K tel que

$$\|u^\varepsilon\|_{L^q(K)} \leq C_K.$$

Ici, q est un réel $> p-1$ (indépendant de K).

3^e étape : On montre, grâce à des théorèmes de régularité pour l'équation

$\Delta u = 0$ (voir [2]) qu'il existe un $\alpha > 0$ tel que pour tout compact K de $\mathbb{R}^N - \{a_1, \dots, a_m\}$,

$$\|u^\varepsilon\|_{C^{1,\alpha}(K)} \leq C'_K .$$

Il est alors possible de passer à la limite.

La 2^e étape utilise une majoration des symétrisées $(u^\varepsilon)^*$ par un multiple de la fonction φ ; elle est possible parce que $\varphi \rightarrow 0$ pour $|x| \rightarrow \infty$. Lorsque $p = N$, il faut un autre argument.

c) Existence - $p=N$:

Il suffit d'amender la 2^e étape du b). Pour ce faire, on se ramène, grâce à l'invariance conforme du problème à borner les solutions de classe $W^{1,N}$ de

$$-\operatorname{div}_{S^N}(|\nabla u|_{S^N}^{N-2} \nabla u) = f \text{ sur la sphère } S^N, \text{ où } \|f\|_{L^1} \leq C^{te}$$

et ce en termes de la seule quantité $\|f\|_{L^1}$.

Posons $\mu(t) = \operatorname{mes}(u > t)$. Normalisons u (par addition d'une constante) de sorte que

$$(10) \quad \operatorname{mes}(u > 0) \text{ et } \operatorname{mes}(u < 0) \text{ soient } \leq \frac{1}{2} \operatorname{mes}(S^N).$$

On va maintenant estimer séparément les parties positive et négative de u .

Soit $t > 0$. (10) et l'inégalité isopérimétrique donnent

$$(11) \quad P(u > t) \geq C_I \mu(t)^{1-1/N} .$$

D'autre part, pour presque tout t on a

$$(12) \quad -\frac{d}{dt} \int_{u>t} |\nabla u| \, dV = P(u > t).$$

Multipliant l'équation satisfaite par u par $(u-t)^+$, on obtient

$$(13) \quad -\frac{d}{dt} \int_{u>t} |\nabla u|^N \, dV \leq \|f\|_{L^1}$$

pour presque tout t .

Enfin, $t \mapsto t^{-1/N-1}$ étant convexe on a (p.p en t)

$$(14) \quad \left(\frac{\frac{d}{dt} \int_{u>t} |\nabla u|^N dV}{\frac{d}{dt} \int_{u>t} |\nabla u| dV} \right)^{-\frac{1}{N-1}} \leq \frac{\mu'}{\frac{d}{dt} \int_{u>t} |\nabla u| dV} \quad .$$

Combinant (11)-(14) on obtient $-\mu' \geq C\mu$ et comme μ est non croissante, on en déduit que la symétrisée (uni-dimensionnelle) de u^+ est majorée par une fonction de la forme $s \mapsto a-b\text{Log}s$. Il en résulte une borne L^q pour u^+ , pour tout $q > 1$. On estime de même la fonction u^- . On achève la démonstration comme dans le cas $p < N$.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] E. de GIORGI : Su una teoria generale della misura (r-1)-dimensionale in uno spazio ad r dimensioni. Ann. Mat. Pura ed Appl. (4) 36 (1954) 191-213.
- [2] S. KICHENASSAMY : Quasilinear problems with singularities. Manuscripta Math. 57 (1987) 281-313.
- [3] G. TALENTI : Nonlinear elliptic equations, rearrangements of functions and Orlicz spaces. Ann. Mat. Pura ed Appl. (4) 120 (1979) 159-184.
- [4] W.H. FLEMING et R. RISHEL : An integral formula for total gradient variation. Arch. Mat. 11 (1960) 218-222.

*
*
*