Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

P. Gérard

Moyennes de solutions d'équations aux dérivées partielles

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1986-1987), exp. nº 11, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1986-1987____A10_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tel. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES 1986 - 1987

MOYENNES DE SOLUTIONS D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

par P. GERARD

Exposé n°XI

24 Février 1987

I INTRODUCTION. POSITION DU PROBLEME.

Un certain nombre de problèmes mathématiques issus de la Physique (homogénéisation, équations cinétiques, milieux aléatoires) posent la question suivante : étant donné un opérateur différentiel $P(x, D_x, \omega)$ dépendent d'un paramètre ω variant dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$, et une solution $u = u(x, \omega)$ de l'équation (1) $Pu = f$, étudier la "grandeur macroscopique" $\int_\Omega u d\mu$.

Un premier pas dans cette étude est de déterminer avec précision la régularité de cette quantité connaissant celles de u et de f. Il arrive en effet que $\int u d\mu$ intervienne dans l'équation (1) comme argument d'une fonction non linéaire ; dans un tel cas, même un simple critère de compacité de $\int u d\mu$ à u et f bornées, est très précieux.

Dans le cas d'une équation de transport ($P = \omega . \partial_x$), Golse-Lions-Perthame-Sentis ont mis en évidence dans [2] le gain de régularité obtenu pour $\int u d\mu$, lorsque u et f varient dans les espaces fonctionnels classiques, et Bardos-Golse-Perthame-Sentis ont appliqué ce résultat à un problème de perturbation singulier pour les équations de la photonique ([1]).

Dans cet exposé, nous nous proposons de décrire comment diverses méthodes d'analyse microlocale permettent d'étudier la régularité de $\int u d\mu$ pour des opérateurs P généraux.

Soit donc P un opérateur différentiel d'ordre m sur $\mathbf{R}^n$, à coefficients C^∞, et dépendant de ω de façon L^∞ ; soit $u = u(x, \omega) \in L^2(\Omega, H^{s+m-1}(\mathbf{R}^n))$ vérifiant $Pu \in L^2(\Omega, H^s(\mathbf{R}^n))$ μ étant bornée, on a bien sûr : $\int u d\mu \in H^{s+m-1}(\mathbf{R}^n)$. Quelle régularité supplémentaire peut-on espérer ? En d'autres termes, il s'agit d'étudier sous quelles hypothèses sur μ et P on a une estimation du type :

$$\left\| \int u d\mu \right\|^2_{s+m-1+\delta} \leq C \left(\int (\|Pu\|^2_s + \|u\|^2_{s+m-1}) d\mu \right)$$

pour un certain $\delta > 0$.

On peut évidemment supposer $s = 0, m = 1$, et P pseudodifférentiel classique. L'inégalité ci-dessus restant inchangée si P est modifié pour un opérateur d'ordre zéro, nous supposerons en outre que le symbole $p = p(x, \xi, \omega)$ de P est homogène de degré 1 en ξ.

1. LE CAS DES OPERATEURS A COEFFICIENTS CONSTANTS.

Le théorème suivant est essentiellement tiré de [2]:

1.1. Théorème. Soit μ une mesure positive bornée sur Ω, et soit $p = p(\xi, \omega)$ un symbole homogène de degré 1 en ξ, L^∞ en ω. Pour $\delta \in]O, 1]$, les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Pour toute fonction $u = u(x, \omega) \in L^2(\mathbf{R}^n \times \Omega, dx d\mu)$ vérifiant $p(D_x, \omega) u \in L^2(\mathbf{R}^n \times \Omega, dx d\mu)$ on a : $\int_\Omega u d\mu \in H^\delta(\mathbf{R}^n)$.

ii) Il existe une constante $C_o > 0$ telle que, pour tout $\xi \in S^{n-1}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \mu \{\omega, |p(\xi, \omega)| \leq \varepsilon\} \leq C_o \varepsilon^{2\delta}.$$

1.2. Commentaires. Quitte à remplacer u par $\chi(x, D_x) u$, où $\chi(x, \xi)$ est supportée dans un voisinage conique de (x_o, ξ_o), on en déduit immédiatement un énoncé microlocal,

donnant l'équivalence de :
i) $\forall u \in L^1(\Omega, \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n))$ vérifiant $u, p(D_x, \omega)\, u \in L^2(\Omega, L^2(\Gamma))$ pour un certain voisinage conique Γ de (x_o, ξ_o), on a $\int u d\mu \in H^\delta(x_o, \xi_o)$.
ii) Il existe une constante $C_o > 0$ et un voisinage conique γ de ξ_o tels que
$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall \xi \in \gamma \cap S^{n-1}, \quad \mu\{\omega, |p(\xi, \omega)| \leq \varepsilon\} \leq C_o \varepsilon^{2\delta}$.
- Le théorème ci-dessus affirme qu'en gros, une solution de $p(D_x, \omega)$ est en moyenne d'autant plus régulière que μ s'annule sur l'ensemble caractérsitique de p. D'un point de vue microlocal, la condition (ii) exprime que, relativement à μ, la direction ξ est "rarement" caractéristique pour p, et donc u est "souvent" H^1 en ξ.

1.3. Preuve du théorème 1.1.
i) $\Rightarrow$ ii). Par le théorème du graphe fermé, on a l'inégalité :

$$\left\| \int u d\mu \right\|_\delta^2 \leq C \left(\int (\|p(D)u\|_0^2 + \|u\|_0^2 \, d\mu \right)$$

Appliquant à $u(x, \omega) = \psi(x)\theta(\omega)$ pour toute $\psi \in C_0^\infty$, et utilisant la transformation de Fourier, on en déduit :

$$\forall \eta \in \mathbf{R}^n, \quad \forall \theta \in L^2(\Omega), \left| \int \theta d\mu \right|^2 |\eta|^{2\delta} \leq C \int |\theta(\omega)|^2 (1 + |p(\eta, \omega)|^2) d\mu(\omega)$$

d'où le résultat en prenant $\eta = \frac{\xi}{\varepsilon}, \xi \in S^{n-1}, \theta = 1_{\{|p(\xi)| \leq \varepsilon\}}$.

ii) $\Rightarrow$ i). On calcule la transformée de Fourier de $\int u d\mu$:

$$\int \hat{u}(\xi, \omega) d\mu(\omega) = \int_{|p(\xi,\omega)| \leq 1} + \int_{|p(\xi, \omega| \geq 1} \equiv I_1 + I_2.$$

On estime I_1 et I_2 par l'inégalité de Schwarz :

$$(1) \qquad |I_1|^2 \leq \frac{C}{|\xi|^{2\delta}} \int |\hat{u}(\xi, \omega)|^2 \, d\mu(\omega)$$

compte tenu de (ii).

$$(2) \qquad |I_2|^2 \leq \left(\int_{|p(\xi,\omega)| \geq 1} \frac{d\mu(\omega)}{|p(\xi, \omega)|^2} \right) \left(\int |p(\xi, \omega) \hat{u}(\xi, \omega)|^2 \, d\mu(\omega) \right)$$

Notant $\xi_0 = \frac{\xi}{|\xi|}$ et $\nu = |a(\xi_0, \mu)|$, on a :

$$\int_{|p(\xi,\omega)|\geq 1} \frac{d\mu(\omega)}{|p(\xi,\omega)|^2} = \frac{1}{|\xi|^2}\int_{1/|\xi|}^{\infty} \frac{d\nu(t)}{t^2} \leq \frac{C}{|\xi|^{2\delta}},$$

puisque, d'après (ii), $\nu([0,\varepsilon]) \leq C_0\varepsilon^{2\delta}$.

Compte tenu de (1) et (2), ceci achève la démonstration de (i).

1.4. Remarque. Si X est un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$, la même preuve conduit à l'équivalence des deux assertions ci-dessous :
(i') l'opérateur de moyennisation

$$\begin{aligned} \{u \in L^2(X \times \Omega, dxd\mu), p(D,\omega)u \in L^2\} &\to L^2(X) \\ u &\mapsto \int_\Omega u d\mu \end{aligned}$$

est compact.

(ii') $\mu\{\omega, |p(\xi,\omega)| \leq \varepsilon\} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$ uniformément en $\xi \in S^{n-1}$.

1.5. Signification des conditions ii), ii'). Plaçons-nous dans le cas où Ω est une variété, μ étant une densité positive à support compact sur Ω, et où p est une fonction C^∞ en ω, à valeurs réelles.
A ξ fixé, il s'agit d'étudier $\mu\{\omega, |f(\omega)| \leq \varepsilon\} = \mu_\varepsilon$ en fonction de ε. Il est clair que l'ordre de décroissance de μ_ε est lié aux singularités de f dans $f^{-1}(0)$. Donnons quelques exemples :
- Si 0 est valeur régulière de f, alors f peut être prise comme coordonnée locale, et $\mu_\varepsilon \leq C_\varepsilon$.
- Si $f^{-1}(0)$ ne contient que des points lisses ou des points critiques non dégénérés, le lemme de Morse et un calcul élémentaires donnent encore :
$\mu_\varepsilon \leq C\varepsilon$, sauf dans les cas :
$\dim\Omega = 1$ où $\mu_\varepsilon \leq C\varepsilon^{1/2}$
$\dim\Omega = 2$, $f^{-1}(0)$ contenant un point critique hyperbolique, où $\mu_\varepsilon \leq C\varepsilon \mathrm{Log}\frac{1}{\varepsilon}$
- Si f est positive, et si les points de $f^{-1}(0)$ sont non dégénérés (donc en nombre fini sur suppμ), la situation est bien sûr nettement meilleure : cette fois $\mu_\varepsilon \leq C\varepsilon^{p/2}$, où p est la dimension de Ω.

Notons que chacune des deux premières propriétés envisagées ci-dessus est ouverte pour $f \in C^\infty(\Omega,\mathbf{R})$, et que la troisième l'est pour $f \in C^\infty(\Omega,\mathbf{R}^+)$. Dés lors, si $f = p(\xi,.)$ dépend d'un paramètre $\xi \in S^{n-1}$, la décroissance correspondante de μ_ε est uniforme en ξ, et le théorème 1.1. s'applique.
- Si l'on désire des résultats plus généraux, il est d'abord naturel de supposer Ω, f analytiques réelles. Dans ce cas, à ξ fixé, on a déjà l'estimation $\mu_\varepsilon \leq C\varepsilon^{1/M-0}$, où M est la multiplicité maximale de f en chaque point de $f^{-1}(0)$. Bien sûr cette estimation est loin d'être optimale, et la détermination du bon ordre de décroissance est un problème délicat de théorie des singularités. Il est cependant déjà résolu dans un grand nombre de cas, notamment lorsque Ω est de dimension 2. Plus difficile est alors d'examiner le caractère uniforme par rapport à ξ des estimations obtenues, même pour ii)' : $\sup_\xi \mu_\varepsilon(\xi) \to 0$, qui

donne la compacité de l'opérateur de moyennisation. Un tel problème est lié à l'obtention de bons critères d'"équisingularité". [4].

1.6. Remarque. L'étude sommaire ci-dessus montre que (hormis le cas d'un symbole ≥ 0) on ne peut espérer a priori un gain de plus d'une demi-dérivée sur $\int u d\mu$, sauf bien sûr dans le cas d'annulations triviales de μ. Nous allons rencontrer dans le paragraphe ci-dessous une raison "a postériori" de cette limitation.

1.7. Un exemple. On suppose que $p = p(D_t, D_x, \omega)$ est un champ de vecteurs à coefficients constants, non singulier dans la direction t. Alors le problème

$$(1) \qquad \begin{cases} p(D_t, D_x, \omega)u = f \\ u_{|t=0} = u_0 \end{cases}$$

se résout à ω fixé pour $u_0 \in L^2(\Omega, H^s(\mathbf{R}^n))$, $f \in L^2(\Omega, H^s([-T,T] \times \mathbf{R}^n))$ en $u \in L^2(\Omega, H^s([-T,T] \times \mathbf{R}^n))$. Si μ vérifie (ii), le théorème 1.1 donne $\int u d\mu \in H^{s+\delta}([-T,T] \times \mathbf{R}^n)$ En particulier, si u_0 ne dépend pas de ω et si μ est de masse totale égale à 1, alors $\left(\int u d\mu\right)_{|t=0} = u_0$, et il est donc hors de question que l'on ait $\delta > \frac{1}{2}$, puisque u_0 est arbitraire dans $H^s(\mathbf{R}^n)$!
Inversement, si μ vérifie (ii) avec $\delta = \frac{1}{2}$,on obtient ainsi un grand nombre de formules de relèvement de $H^s(\mathbf{R}^n)$ dans $H^{s+1/2}(\mathbf{R}^n \times [-T,T]) \cap C([-T,T], H^s(\mathbf{R}^n))$.
Par exemple, si $p(\tau, \xi, \omega) = \tau - \omega.\xi, \Omega \subset \mathbf{R}^n$, la solution de (1) avec f=0 s'écrit $u(t,x,\omega) = u_0(x + t\omega)$.
- Si $\Omega = \mathbf{R}^n$, alors $p = 0$ est lisse par rapport à ω, et si $\mu = \varphi d\omega$ avec $\varphi \in L^\infty_{comp}(\mathbf{R}^n)$, on retrouve la formule classique de relèvement :

$$\tilde{u}(t,x) = \int_{\mathbf{R}^n} u_0(x + t\omega)\varphi(\omega) d\omega$$

- Si Ω est une hypersurface de $\mathbf{R}^n$, alors $p = 0$ est lisse en ω_0 sauf si ξ est normal à Ω en ω_0 ; dans ce cas, la hessienne de $\omega \mapsto \omega.\xi$ en ω_0 n'est autre que la hessienne d'une équation de Ω, restreinte à $T_{\omega_0} \times T_{\omega_0}$. On peut exprimer géométriquement le fait que cette hessienne soit non dégénérée. La structure d'espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ permet de définir une application C^∞

$$p \,: N^*\Omega \to (\mathbf{R}^n)^*$$
$$(x, \xi) \mapsto \xi$$

En passant au quotient par l'action de $\mathbf{R} \setminus \{O\}$, on obtient :

$$\bar{p} \,: \Omega \to P\left((\mathbf{R}^n)^*\right)$$

dont le jacobien en ω_0 n'est autre que le hessien sur $T_{\omega_0} \times T_{\omega_0}$ d'une équation de Ω. L'image $\bar{p}(\Omega) = \Omega^*$ est l'hypersurface duale de Ω; le théorème 1.1 et le paragraphe 1.6 montrent que, si ξ est un point lisse de Ω^*, alors $\int_\Omega u_0(x + t\omega) d\sigma(\omega) \in H^{s+\delta}$ dans toutes les directions (τ, ξ), et pour tout $u_O \in H^s$, avec : $\delta = \frac{1}{2}$ (éventuellement $\frac{1}{2} - 0$) si $n \geq 3$, et $\delta = \frac{1}{4}$ pour $n = 2$.

2 UN CAS GEOMETRIQUEMENT SIMPLE.

On suppose à nouveau que Ω est une variété munie d'une densité à support compact μ, et que $p = p(x, \xi, \omega)$ est un symbole réel, homogène d'ordre 1 sur $T^*X \times \Omega$, où X est un ouvert de $\mathbf{R}^n$.
Soit $(x_0, \xi_0) \in T^*X \backslash 0$. On fait l' hypothèse suivante sur p, naturellement optimale compte tenu du paragraphe précédent :
$\frac{\partial p}{\partial \omega}(x_0, \xi_0, \omega) \neq 0$ dès que $p(x_0, \xi_0, \omega) = 0$.

2.1. Théorème. Sous les hypothèses précédentes, si $u \in L^1(\Omega, \mathcal{D}'(X))$ vérifie u et $p(x, D_x, \omega)u \in L^2(\Omega, L^2(\Gamma))$ pour un voisinage conique Γ de (x_0, ξ_0), alors :

$$\int_\Omega u d\mu \in H^{1/2}(x_O, \xi_0).$$

Preuve. Par partition de l'unité sur Ω, on se ramène à la situation suivante : $\omega_0 \in \Omega_0(ouvert de \mathbf{R}^p), p(x_0, \xi_0, \omega_0) = 0, \frac{\partial p}{\partial \omega^1}(x_0, \xi_0, \omega_0) \neq O$, et on peut supposer que de plus $H_p(x_0, \xi_0, \omega_0)$ n'est pas colinéaire à $\xi.\partial_{\xi|(x_0,\xi_0)}$. † De plus, quitte à remplacer u par $\chi(x, D_x)u$, avec χ supporté dans Γ: u et $p(x, D_x, \omega)u \in L^2(\mathbf{R}^n \times \Omega_0)$, u est à support compact dans un voisinage de (x_0, ω_0).
Il s'agit de prouver que $\int u d\mu \in H^{1/2}(x_0, \xi_0)$
- L'hypothèse $\frac{\partial p}{\partial \omega^1} \neq 0$ permet d'écrire, notant $\omega = \left(\omega^1, \omega''\right)$:

$$p(x, \xi, \omega) = q(x, \xi, \omega)\left(\omega^1 - a\left(x, \xi, \omega''\right)\right)$$

où a est un symbole homogène de degré zéro, q est un symbole d'ordre 1 elliptique en (x_0, ξ_0, ω_0). On en déduit : $\left(\omega^1 - a\left(x, D_x, \omega''\right)\right)u \in L^2(H^1)$. D'autre part $H_p = -qH_a$, donc H_a n'est pas colinéaire à $\xi\partial_\xi$ en $\left(x_0, \xi_0, \omega_0''\right)$, et il existe ([3, lemmes 21.1.9 et 25.3. 5])un opérateur intégral de Fourier F dépendant de ω'', elliptique d'ordre zéro près de $\left(x_0, \xi_0, \omega_0''\right)$, tel que l'opérateur

$$Fa(x, D_x, \omega'') - x^1F$$

soit d'ordre -1 près de (x_0, ξ_0), uniformément en $\omega'' \in \Omega_0''$. Posant $v = Fu$, les hypothèses deviennent :

$$v \in L^2(\Omega_0 \times \mathbf{R}^n), (\omega^1 - x^1)v \in L^2(\Omega_0, H^1) \tag{2}$$

---

† Quitte à rajouter une coordonnée x^{n+1} et à considérer $D_{n+1} + p$ au lieu de p. (près de $\xi_{n+1} = 0$). Nous remercions B. Helffer d'avoir attiré notre attention sur ce point.

Si G est une paramétrix de F, on a $u = Gv$ modulo $L^2\left(\Omega_0, H^1\right)$. Notons que G ne dépend pas de ω_1, et donc

$$\int u d\omega = \int d\omega'' G\left(\int v d\omega^1\right) moduloH^1\left(x_0, \xi_0\right)$$

et il suffit de prouver que $\int v d\omega^1 \in L^2\left(\Omega_0'', H^{1/2}\right)$ sous les hypothèses (2), ce qui est élémentaire. (Utiliser par exemple la décomposition dyadique de v.)

2.2. Exemple. Si $p = \lambda(x,\omega).\partial_x$ est un champ de vecteurs non singulier en x_0, le théorème 2 s'applique en tout point ξ_0 au-dessus de x_0 si et seulement si le système de vecteurs $\left(\lambda, \frac{\partial\lambda}{\partial\omega^1}, ..., \frac{\partial\lambda}{\partial\omega^p}\right)$ est de rang supérieur ou égal à n. (Ce qui nécessite en particulier $\dim\Omega \geq n-1$).

2.3. Généralisation à des systèmes surdéterminés. Si $p_1, ..., p_q$ sont des symboles comme ci-dessus, on suppose cette fois que, si $p_j\left(x_0, \xi_0, \omega\right) = 0 \quad \forall j \in [1,q]$:
Le rang de $\left[\frac{\partial p_j}{\partial\omega^k}\right]_{\substack{1\leq j\leq q \\ 1\leq k\leq p}}$ en $\left(x_0, \xi_0, \omega\right)$ est égal à q.
Alors une démonstration analogue entraîne que :
si $u, p_1\left(x, D_x, \omega\right)u, ..., p_q\left(x, D_x, \omega\right)u \in L^2\left(\Omega, L^2(\Gamma)\right)$ on a : $\int u d\mu \in H^{1-1/2^q}\left(x_0, \xi_0\right)$.

3. UNE APPROCHE DU CAS GENERAL.

Nous reprenons le cas général d'une famille L^∞ p de symboles homogènes d'ordre 1 sur $T^*\mathbf{R}^n \times \Omega$, où Ω est un espace muni d'une mesure bornée μ.
Pour approcher le mieux possible la situation du paragraphe 1 où p agit comme un multiplicateur, il semble indiqué d'utiliser les méthodes de découpage de l'espace des phases introduites par L. Hörmander (voir par exemple [3], Tome III.)
Ces méthodes décrivent parfaitement la situation dans le cas d'un symbole positif ou nul.

3.1. Théorème. Soit p une famille L^∞ en ω de symboles homogènes d'ordre 1, positifs ou nuls. Pour $\delta \in]O, 1]$, les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) $\forall u \in L^2(dxd\mu)$ vérifiant $p\left(x, D_x, \omega\right) \in L^2(dxd\mu)$, on a :

$$\int_\Omega u d\mu \in H^\delta$$

(ii) Il existe une constante $C_0 > 0$ telle que, $\forall x \in \mathbf{R}^n, \forall\xi \in S^{n-1}$:

$$\forall\varepsilon > 0, \qquad \mu\left\{\omega, p(x,\xi,\omega) \leq \varepsilon\right\} \leq C_0\varepsilon^{2\delta}.$$

Preuve. Elle s'effectue suivant le même plan que celle du théorème 1.1.
(i) $\Rightarrow$ (ii) : on teste l'inégalité sur une fonction du type

$$u(y,\omega) = \varepsilon^{n/4} e^{i(y-x).\xi/\varepsilon} \psi((y-x)/\sqrt{\varepsilon})\theta_\varepsilon(\omega)$$

pour $x \in \mathbf{R}^n$, $\xi \in S^{n-1}$ fixés. On obtient :

$$\left|\int \theta_\varepsilon d\mu\right|^2 \varepsilon^{-2\delta} \leq C \int |\theta_\varepsilon(\omega)|^2 \left(\varepsilon^{-2} p(x,\xi,\omega)^2 + \varepsilon^{-1} \left|d_{x,\xi} p(x,\xi,\omega)\right|^2 + 1\right) d\mu(\omega).$$

Puisque $p \geq 0$, on a : $\left|d_{x,\xi} p\right|^2 \leq Cp$ et on conclut en prenant $\theta_\varepsilon = 1_{\{p(x,\xi) \leq \varepsilon\}}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) On découpe l'espace des phases en "boites" B_j du type $|\xi - \xi_j| \leq K\, |\xi_j|^{1/2}, |x - x_j| \leq K\, |\xi_j|^{-1/2}$, où K est une constante positive assez grande.
(voir [5]).Les B_j sont des boules de rayon fixe pour la métrique $(1/2, 1/2)$ ([3]) . On peut supposer leur empiètement borné. On introduit alors une suite $\varphi_j = \varphi_j(x,\xi)$ de fonctions C^∞ vérifiant :

$$\operatorname{supp}\varphi_j \subset B_j, \sum_j \varphi_j^2 = 1,$$

(φ_j) étant une suite bornée dans $S^0_{1/2,1/2}$. On note $\phi_j = \varphi_j(x, D)$.

3.2. Lemme. Si p est un symbole $\geq O$ homogène d'ordre 1, il existe une constante C, ne dépendant que des semi-normes de p, telle que :

$$\sum_j p\,(x_j,\xi_j)^2\, \|\phi_j u\|_0^2 \leq C\,(\|p(x,D)\,u\|_0^2 + \|u\|_0^2\,)$$

Preuve. C'est une paraphase de la démonstration du lemme 22.4.13 de [3] . Une fois écrit que

$$\|p(x,D)u\|_0^2 \geq C \sum_j \|\phi_j p(x,D)u\|_O^2\,,$$

on remarque que le symbole $\varphi_j \# p - p\,(x_j,\xi_j)\,\varphi_j$ s'écrit comme somme d'un terme d'ordre zéro, et d'un terme d'ordre $1/2$ dépendant des dérivées premières de p, et s'estimant donc à l'aide de $\sqrt{p}$ puisque $p \geq 0$.

3.3. Fin de la démonstration. On estime la norme H^δ de $\int u d\mu$ à l'aide des ϕ_j :

$$\left\|\int u d\mu\right\|_0^2 \leq C \left(\sum_j |\xi_j|^{2\delta} \left\|\int \phi_j u d\mu\right\|_O^2 + \int \|u\|_0^2\, d\mu\right).$$

On procède alors comme au paragraphe 1 :

$$\begin{aligned}\int \phi_j u d\mu &= \int_{p(x_j,\xi_j,\omega)\leq 1} + \int_{p(x_j,\xi_j,\omega)\geq 1} \\ &\equiv I_1^j + I_2^j\end{aligned}$$

avec

$$\left\|I_1^j\right\|_0^2 \leq C_0 \left|\xi_j\right|^{-2\delta} \int \|\phi_j u\|_0^2 \, d\mu$$

$$\left\|I_2^j\right\|_0^2 \leq C_1 \left|\xi_j\right|^{-2\delta} \int p\left(x_j, \xi_j, \omega\right)^2 \|\phi_j u\|_0^2 \, d\mu$$

et on conclut par le lemme 3.2.

3.4. Exemple. On prend $p\left(x, D_x, \omega\right) = (1-\Delta)^{-1/2} \sum_{i=1}^q X_i^2$, où les X_i sont des champs de vecteurs sur $\mathbf{R}_x^n$, dépendant de ω élément d'une variété Ω, munie d'une densité μ à support compact.
Le rang de la hessienne de $p(x, \xi, \omega)$ n'est autre que le rang de la matrice $M(x, \xi, \omega) = \left[\left\langle \xi, \frac{\partial X_i}{\partial \omega^k} \right\rangle\right]_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq k \leq p}}$. Fixons $(x_0, \xi_0) \in S^*\mathbf{R}^n$, et posons :

$$r = \min\left\{rgM\left(x_0, \xi_0, \omega\right), \left\langle \xi_0, X_i\left(x_0, \omega\right)\right\rangle = 0 \forall i\right\}$$

Alors on vérifie à l'aide du théorème 3.1. que :

$$u \in L^2\left(H^1\right), \sum X_i^2 u \in L^2 \Rightarrow \int u d\mu \in H^{1+\min(1, r/4)}$$

en $\left(x_0, \xi_0\right)$.

3.5 Un résultat partiel dans le cas général. Si p n'est plus positif ou nul, on ne peut plus estimer les premières dérivées de p par $\sqrt{p}$,et le lemme 3.2 n'est plus utilisable. Cependant, si l'on utilise le fait que p est un symbole d'ordre 1, on a encore :

$$|\xi|^{-1/2} \left|\partial_x p\right| + |\xi|^{1/2} \left|\partial_\xi p\right| \leq \alpha |p|$$

dès que $|p| \geq C |\xi|^{1/2}$!
Si l'on ne garde que les B_j correspondant à $\left|p\left(x_j, \xi_j\right)\right| \geq C \left|\xi_j\right|^{1/2}$, le lemme 3.2 reste vrai. Bien sûr, l'intégrale I_1^j correspondant aux "mauvais ω " estcette fois beaucoup plus grande, puisqu'on a ajouté les ω correspondant à $1 \leq p\left(x_j, \xi_j, \omega\right) \leq C\left(\xi_j\right)^{1/2}$. On obtient donc $\left\|I_1^j\right\|_0^2 \leq C_0 \left|\xi_j\right|^{-\delta} \int \|\phi_j u\|_0^2 \, d\mu$, et on aboutit au résultat suivant :

Théorème. On suppose vérifiée la condition :

$$\sup_{(x,\xi) \in S^*\mathbf{R}^n} \mu\{\omega, |p(x, \xi, \omega)| \leq \varepsilon\} \leq C\varepsilon^{2\delta}$$

Alors u, $p\left(x, D_x, \omega\right) u \in L^2(dx d\mu)$ entraîne $\int u d\mu \in H^{\delta/2}$.

3.6 Remarques . a) le résultat ci-dessus n'est bien sûr pas optimal. L'impossibilité d'approcher les caractéristiques de p à une distance moindre que $|\xi|^{1/2}$ (qui est une forme du principe d'incertitude) fait apparaître une perte de $\delta/2$ dérivées par rapport aux cas particuliers étudiés précédemment, dont nous ignorons si elle a effectivement lieu dans certains cas.

b) Notons que la méthode ci-dessus permet en outre de prouver dans le cas général la compacité de l'opérateur de moyennisation sous l'hypothèse $\sup_{(x,\xi)\in S^*\mathbf{R}^n} \mu\{\omega, |p(x,\xi,\omega)| \leq \varepsilon\} \to 0$.

L'auteur remercie F. Golse de lui avoir parlé de ce problème, ainsi que S. Alinhac et G. Lebeau pour les fructueuses discussions qu'il a pu avoir avec eux à ce sujet.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] C. BARDOS, F. GOLSE, B. PERTHAME, R. SENTIS : Les équations du transfert radiatif non accrétives ; existence de solutions et approximation Rosseland, à paraître au Journal of Functional Analysis.
[2] F. GOLSE, P.L. LIONS, B. PERTHAME, R. SENTIS : Regularity of the moments of the solution of a transport equation, à paraître au Journal of Functional Analysis.
[3] L. HORMANDER : The Analysis of Linear Partial Differential Operators, Tomes III et IV.
[4] F. LOESER : Communication personnelle.
[5] A. MELIN : Lower bounds for pseudo-differential operators, Ark. Mat. 9, 117-140 (1971).