B. LASCAR

Propagation des singularités Gevrey pour des opérateurs hyperboliques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1985-1986), exp. nº 6, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1985-1986____A6_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES 1985 - 1986

PROPAGATION DES SINGULARITES GEVREY POUR DES OPERATEURS HYPERBOLIQUES.

par B. LASCAR

Exposé n°VI

22 Octobre 1985

0.Introduction.Enoncé des résultats.

On considére dans ce travail des résultats de propagation de singularités Gevrey pour des équations hyperboliques.

Le probléme de Cauchy hyperbolique dans les classes de Gevrey est un probléme classique,pour lequel il existe une trés vaste bibliographie,dont il est impossible ici de faire état.Du reste,nous ne nous interesserons ici qu'à l'aspect purement microlocal;on peut ainsi considerer qu'un thèoréme de propagation de singularités hyperbolique est une version microlocale du résultat d'unicité correpondant.

L'avantage de ce point de vue est,qu'au prix de certaines difficultés,il permet un énoncé pour un opérateur pseudo-differentiel de régularité G^s en (x,ξ) sur le front d'onde G^s pour le même s,des solutions.

Notre méthode présente la particularité d'obtenir la régularité Gevrey,à partir d'une estimation d'énergie,sans itérations mais en utilisant des poids d'ordre infini et variables.Ceci nous permet de discuter le role des termes d'ordre inférieurs,pour les différentes valeurs de s,dans le cadre d'une même méthode.Nous pensons que ceci représente une simplification conceptuelle substantielle pour ce probléme.

Nous ne considerons ici que des cas où la multiplicité μ des caractéristiques est au plus double;l'indice s critique vaut donc 2.Ceci essentiellement parceque pour les opérateurs à caractérisque de multiplicité plus grande,on ne sait dans un cadre géneral (par exemple quand les caractéristiques ne sont pas C^∞) à peu prés rien sur le role des termes d'ordre inférieur.

La preuve consiste à appliquer une transformation canonique complexe,qui respecte les opérateurs pseudo-differentiels de régularité Gevrey,qui exprime dans ce contexte le fait de conjuguer l'opérateur par des poids microlocaux d'ordre infini et variables.La formalisation que nous preferons est,convenablement adaptée au cadre Gevrey, celle dûe à Sjöstrand qui consiste à introduire une fonction de poids dans une réalisation de l'identité.Dans le cadre C^∞,il s'agit du calcul de l'opérateur $P_s=e'_sPe_{-s}$ où $e_s=op_{1/2}(\exp(s(x,\xi)Lg<\xi>))$,$e'_s$ étant une paramétrixe de e_s;qui résulte du calcul de Weyl d'Hörmander [6].

Notre travail s'appuie d'une part sur les méthodes d'énergies:Hörmander [4],Ivrïi [5] (1) et (2),Lascar et Lascar [7];d'autre part sur des travaux de Sjöstrand [12] et [13] concernant les résolutions de l'identité et les singularités analytiques.

On va maintenant énoncer les résultats.

On dit que $\sigma(x,\xi)$ est un symbole Gevrey s de degré m si:

$$|D_x{}^\alpha D_\xi{}^\beta\sigma(x,\xi)|\leqslant C\ A^{|\alpha|+|\beta|}(\alpha!)^s(\beta!)^s<\xi>^{m-|\beta|}. \qquad (0.1).$$

On considére dans la suite un opérateur pseudo-différentiel P dont le symbole de Weyl s'écrit:

$\sigma(x,\xi)=p_m(x,\xi)+p_{m-1}(x,\xi)+q(x,\xi)$ pour ξ grand;où q est symbole Gevrey s de degré m-2,p_m (resp p_{m-1}) est positivement homogéne de degré m (resp m-1).

Soit Σ une variété G^s homogéne passant par $\rho_0\ni T^*\mathbb{R}^n$ privé de la fibre nulle.On envisage les hypothèses suivantes:

$(H_1)_a$ En tout point $\rho\in\Sigma$,$dp(\rho)=p(\rho)=0$,$\nabla^2p(\rho)$ a la signature hyperbolique;si $F_p(\rho)$ est la matrice fondamentale,on a $\mathrm{Ker}F_p(\rho)=T_\rho\Sigma$.

On rappelle que $\nabla^2p(\rho)(t,t')=\sigma(t,F_p(\rho)t')$ définit la matrice fondamentale.

$(H_1)_b$ En tout point $\rho\in\Sigma$,$Sp(F_p(\rho))\subset i\mathbb{R}$;en ρ_0 il n'y a pas de sous espace spectral de dimension quatre relatif à la valeur propre 0.

Voir [5] pour la classification des formes quadratiques hyperboliques dans un espace symplectique.

$(H_1)_c$ La dimension de $T_\rho\Sigma\cap(T_\rho\Sigma)^\perp$ est constante.

Les hypothèses sur les termes d'ordre inférieur sont notées (H_2).

$(H_2)_s$ Si $\rho\in\Sigma$, $\mathrm{Im}\,p_{m-1}{}^s(\rho)=0$, et $p_{m-1}{}^s+1/2\,\mathrm{tr}^+(F_p(\rho))>0$.

Ce qui est la condition d'Ivrïi-Petkov stricte.

$(H_2)_l$ Si $\rho\in\Sigma$, $\mathrm{Im}\,p_{m-1}{}^s(\rho)=0$, et $p_{m-1}{}^s+1/2\,\mathrm{tr}^+(F_p(\rho))\geqslant 0$.

Ce qui est la condition nécessaire d'Ivrïi-Petkov.

On notera $WF^{(s)}(u)$ le front d'onde Gevrey s de u.

On dit que la direction H_ψ est micro-hyperbolique pour p en $\rho\in\Sigma$ si:

$$\nabla^2 p(\rho)(H_\psi,H_\psi)<0 \qquad (0.2).$$

Thèoréme. Soit P un opérateur pseudo-differentiel Gevrey s de degré m admettant un symbole principal p et un symbole sous-principal homogénes. Soit $\psi\in C^2$ $\psi(\rho_0)=0$, une fonction telle que H_ψ est une direction micro-hyperbolique. Sous les hypothèses:

$(H_1)_a$, $(H_1)_b$, $(H_1)_c$ et $(H_2)_s$ si $s>2$;

$(H_1)_a$, $(H_1)_b$, $(H_1)_c$ et $(H_2)_l$ si $s=2$;

$(H_1)_a$ si $s<2$;

si $u\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, ω un voisinage conique de ρ_0

$\rho_0\notin WF^{(s)}(Pu)$ et $WF^{(s)}(u)\cap\{\psi>0\}\cap\omega=\emptyset$ entrainent $\rho_0\notin WF^{(s)}(u)$.

1.Esquisse de la preuve.

La preuve comprend quatre étapes que nous évoquerons briévement.La première consiste à décrire les relations canoniques complexes que nous utilisons.La deuxième consiste en un calcul sur des O.I.F. associés à ces relations;on doit notamment calculer comment un o.p.d. est transformé par conjuguaison.La troisième est de prouver une estimation d'énergie.Enfin on conclut en prouvant le thèoréme.

1.1 Description des relations canoniques.

Soit $\varepsilon>0$ un petit paramétre;$\alpha\in\mathbb{R}^{2n}$ on décrit une transformation canonique réelle et analytique $\alpha\to\mathcal{X}(\alpha)$ à l'aide de la phase:

$$\Phi_\varepsilon(x,y,\alpha)=-\chi(y).\alpha_\xi+x.\xi(\alpha)+g(\alpha)+i\varepsilon/2((\chi(y)-\alpha_x)^2+(x-x(\alpha))^2);$$

si χ désigne un changement de variables quadratique à fixer plus loin pour assurer des conditions de transversalité,$\alpha\to\mathcal{X}_1(\alpha)=(x(\alpha),\xi(\alpha))$ est une transformation canonique réelle et analytique,$g(\alpha)$ est déterminée par:

$$\omega=dg=-{}^t\partial\xi/\partial y(\alpha).x(\alpha)\ d\alpha_x+(\alpha_x-{}^t\partial\xi/\partial\eta(\alpha).x(\alpha))\ d\alpha_\xi.$$

$g(\alpha)$ est ainsi déterminée à une constante prés.On fixera $\mathcal{X}_1$ par $\mathcal{X}_1=\mathcal{X}\circ\bar{\chi}^{-1}$,

$$\bar{\chi}(\alpha)=(\chi(\alpha),{}^t\chi'^{-1}(\alpha_x)\alpha_\xi).$$

On a trouvé ici une manière de paramétrer une relation canonique réelle à l'aide d'une phase complexe,mais d'une façon plus commode et plus globale que ne le permet,en général la théorie des opérateurs intégraux de Fourier à phase réelle.

On introduit la relation canonique complexe associée à la phase:

$\Phi_{\varepsilon,\mu}(x,y,\alpha)=\Phi_\varepsilon(x,y,\alpha)+i\varepsilon\mu_0\varphi(\alpha);\mu=\varepsilon\mu_0$ où μ_0 est un petit paramétre.

Le résultat du pemier pargraphe est qu'il y a une fonction $\varphi_\mu(\beta)$ telle que la relation canonique associée à:

$\Psi_{\varepsilon,\mu}(x,y,\beta)=\Psi_{\varepsilon}(x,y,\beta)+i\varepsilon\mu_0\varphi_\mu(\beta)$ où $\Psi_\varepsilon(x,y,\beta)=-\varphi(y,x,\beta)+i\varepsilon\psi(y,x,\beta)$;$\varphi$ et ψ étant les parties réelles et imaginaires de Φ_ε;inverse la relation associée à $\Phi_{\varepsilon,\mu}$ au moins pour $\mathcal{K}$=Id.De plus on peut assurer que φ_μ dépend analytiquement de $(\varepsilon,\mu_0,\beta)$ et que $\varphi_\mu(\beta)=-\varphi(\beta)+\mathcal{O}(\varepsilon)$.

1.2.Calcul des opérateurs.

On introduit un grand paramétre λ,on prendra $\varepsilon=\lambda^{-1+1/s}$ $s>1$.De sorte que la partie imaginaire des phases introduites plus haut a été aplatie.

On dit que $a(x,\lambda)$ est un symbole de degré m Gevrey s si:

$|D_x^{\alpha}a(x,\lambda)|\leqslant CA^{|\alpha|}(\alpha!)^s\lambda^m$ pour tout $\lambda>1$.

Soit

$$F=\int a(x,y,\alpha,\lambda)\, e^{i\lambda\Phi_{\varepsilon,\mu}(x,y,\alpha)}\, \lambda^{3n/2}\, d\alpha;$$

un O.I.F. associé à $\Phi_{\varepsilon,\mu}$ et à un symbole a Gevrey s de degré m.

Un opérateur pseudo-différentiel s'écrit:

$$P=\int p(x+y/2,\xi,\lambda)\, e^{i\lambda(x-y)\xi}\, (\lambda/2\pi)^{n/2}\, d\xi.$$

$$G=\int b(x,y,\beta,\lambda)\, e^{i\lambda\Psi_{\varepsilon,\mu}(x,y,\beta)}\, \lambda^{3n/2}\, d\beta.$$

Le résultat de ce paragraphe est que:

$$GPF=\int \sigma(x+y/2,\xi,\lambda)\, e^{i\lambda(x-y)\xi}\, (\lambda/2\pi)^{n/2}\, d\xi.$$

Où σ est la somme d'un symbole Gevrey s de degré m q et d'un reste $r(x,\xi,\lambda)$ satisfaisant à:

$\exists\, C>0$ et $\forall(\alpha,\beta,n)\ \exists\, C_{\alpha,\beta,n}$ telle que:

$$|D_x^{\alpha}D_\xi^{\beta}r(x,\xi,\lambda)|\leqslant C_{\alpha,\beta,n}\langle x,\xi\rangle^{-n}e^{-1/C\lambda^{1/s}}.$$

On dit alors que r est à decroissance exponentielle 1/s dans $\mathcal{S}$.

On trouve qu'au voisinage de ρ_0 :

$$q(x,\xi,\lambda,\varepsilon,\mu)=\lambda^m[p(x,\xi)-i\mu dp(x,\xi).H_\psi(x,\xi)-\mu^2/2\nabla^2p(x,\xi)(H_\psi(x,\xi),\, H_\psi(x,\xi))\, +$$

$\mathcal{O}(\mu^2\varepsilon)+\mathcal{O}(\mu^3)]+$

$\sum_{|\alpha|+|\beta|=1}\partial_x^{\alpha}\partial_\xi^{\beta}p(x,\xi)\mathcal{O}(\lambda^{m-1}+\lambda^{m}\varepsilon\mu)+\lambda^{m-1}p_{m-1}(x,\xi)+\mathcal{O}(\lambda^{m-1}\varepsilon).$

Avec la relation $\psi=\varphi\circ\bar{\chi}$.

On voit apparaitre ici la condition de micro-hyperbolicité dans le troisième terme,on voit en comparant μ^2 et λ^{-1} intervenir l'indice critique s=2.

La méthode consiste à réduire par une méthode de phase stationnaire l'intégrale donnant σ à partir du noyau de GPF.On a fait ce qu'il fallait pour que le point critique complexe ne soit pas trop loin du réel,en outre il faudra par des changements de contours se ramener à une phase rélle non dégénérée (et pas à ix^2 comme dans la méthode utilisée en C^{∞} où en analytique),enfin utiliser les extensions presqu'analytiques que l'on peut construire à l'aide du résultat de Carleson [3],pour obtenir des restes à décroissance exponentielle 1/s.

1.3.Estimation d'énergie.

On obtient une estimation d'énergie pour l'opérateur Q de symbole q,en calculant Im(Qu,Mu),pour un multiplicateur M convenablement choisi.Pour le choix de M,on fait intervenir la discussion géométrique que permettent les hypothèses $(H_1)_a$...$(H_1)_c$ dans le cas $s\geqslant 2$,si $s<2$ on choisira directement M.Il faut analyser les termes que l'on obtient,utiliser selon les cas les inégalités de Melin ou de Gärding pour discuter du role des termes d'ordre inférieur.Nous n'avons pas la place ici de détailler ces arguments.

1.4.Fin de la preuve.

On modifie par un argument de "convexification" la fonction ψ de l'énoncé du théorème.On introduit dans l'estimation d'énergie obtenue plus haut G_1u où G_1 est de la même forme que G mais est une paramétrixe à droite de F.Il y a ensuite des arguments assez classiques pour contrôler des commutateurs et obtenir la propagation de la régularité Gevrey.

Bibliographie.

[1] L.Boutet de Monvel-P.Krée.Pseudo-differential operators and Gevrey classes.Ann. Institut Fourier.17.1.(1967).295-323.

[2] M.D.Bronstein.The Cauchy problem for hyperbolic operators with variable multiple characteristics.Math. Obsc.41.(1980).83-99.

[3] L.Carleson.On universal moment problems.Math. Scand.9.(1961).197-206.

[4] V.Ja.Ivrïi.Wave fronts of solutions of certain hyperbolic pseudo-differential operators.(1) et (2).Trudi Mosk Obs.39.(1979).49-82 et 83-112.

[5] L.Hörmander.On the Cauchy problem for differential oprators with double charateristics.Journal d'Analyse Mathematique.(1977).

[6] L.Hörmander.Weyl calculus of pseudo-differential operators.Cours d'été à Stanford en 1977.

[7] B.Lascar-R.Lascar.Propagation des singularités pour des opérateurs pseudo-differentiels à symboles réels.C. R. Acad. Sc. Paris. t 300.1.n°12.(1985).389-391.

[8] R.Lascar.Distributions de Denjoy Carleman. C. R.Acad.Sc.Paris.A.283.(1976).

[9] A.Melin.Lower bounds for pseudo-differential operators.Arkiv for Matematik.9.1.(1971).117-140.

[10] A.Melin-J.Sjöstrand.Fourier integral operators with complex phase function.Springer Lecture Notes in Maths.459.121-223.

[11] Y.Morimoto-K.Taniguchi.Propagation of wave front sets fo solutions of the Cauchy problem for hyperbolic systems in Gevrey classes.Preprint 1984.

[12] J.Sjöstrand.Propagation of analytic singularities for second order Dirichlet problems.Comm. in P.D.E.5.1.(1980).41-94.

[13] J.Sjöstrand.Analytic singularities and micro-hyperbolic boundary value problems.Mat.Ann.254.(1981).499-567.

[14] S.Wakabayashi.Singularities of solutions of hyperbolic Cauchy problem in Gevrey classes.Proc.Japan.Acad.59 Ser. A.(1983).182-185.