Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

L. Boutet de Monvel

Complément sur le noyau de Bergman

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1985-1986), exp. nº 20, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1985-1986____A20_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES 1985 - 1986

COMPLEMENT SUR LE NOYAU DE BERGMAN

par L. BOUTET DE MONVEL.

Exposé n°XX

27 Mai 1986

Dans cet exposé nous donnons des formules explicites qui décrivent de façon complète la singularité du noyau de Bergman d'un domaine complexe strictement pseudo-convexe.

I. NOYAU DE BERGMAN.

Commençons par rappeler de quoi il s'agit. Soit X une variété complexe holomorphe de dimension n ; il y a une variété réelle sous jacente, que nous munissons de son orientation canonique, pour laquelle $\Pi\, dx_j dy_j = (\frac{i}{2})^n \Pi\, dz_j d\bar{z}_j$ est positive, dans tout système de coordonnées locales $z_j = x_j + i\, y_j$. Notons $L^2_{n,o}(x)$, ou simplement $L^2(X)$, l'espace de Hilbert des formes différentielles de type (n,o) sur X , de carré sommable : localement $\omega = f\, dz_1 \ldots dz_n$ où f est une fonction mesurable à valeurs complexes, et $\int |\omega|^2 < \infty$, où on a posé $|\omega|^2 = i^{n^2}\, \omega\wedge\bar{\omega}$, densité positive. On note $H \subset L^2(X)$ le sous espace des formes holomorphes : localement $\omega = f\, dz_1 \ldots dz_n$ avec f holomorphe. C'est un sous-espace fermé car le système des équations de Cauchy-Riemann (ici $d\omega = 0$) est elliptique, donc une limite L^2_{loc} de formes holomorphes est holomorphe.

Le projecteur de Bergman est le projecteur orthogonal $\mathcal{B} : L^2(X) \to H$. Son noyau B est une forme différentielle de type n,n sur $X \times \bar{X}$: localement $B = \beta(x,\bar{y}) dx\, d\bar{y}$, holomorphe (resp. anti-) en la première (resp. deuxième) variable

$$(1) \qquad \mathcal{B}\omega = \int_{y,\bar{y}} B(x,\bar{y})\omega(y)$$

Si $\omega_1, \ldots \omega_k \ldots$ est une base orthonormale de H , on a $B = \Sigma\ \omega_k(x)\ \overline{\omega_k(y)}$ (la série converge, comme toute série L^2-convergente de fonctions holomorphes).

Sans hypothèses supplémentaires sur X , il n'y a rien à dire de plus ; on peut avoir $H = 0$, donc $B = 0$ - par exemple si $X = \mathbb{C}^n$. Le noyau de Bergman est clairement invariant par tous les automorphismes holomorphes de X , donc on s'attend à pouvoir le calculer assez explicitement lorsque ce groupe est gros (par exemple si $X = \mathbb{C}^n$,ce groupe est trop gros pour avoir des invariants non nuls du type B). Notons encore que ce qui précède vaut encore lorsque X est singulier (réduit) ; H ne s'identifie plus alors de façon agréable à un espace de fonctions holomorphes sur X , comme c'est le cas (de façon non canonique) lorsque X est lisse et possède une densité holomorphe $\omega(=f\, dz_1 \ldots dz_n)$ qui ne s'annule en aucun point.

Dans l'exposé présent, et bien qu'il y ait d'autres cas intéressants, nous nous limiterons au cas où X est un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$, de bord ∂X analytique réel strictement pseudo-convexe (ou un peu plus généralement, d'un espace de Stein, admettant éventuellement des singularités isolées en dehors de ∂X). Dans le cas où ∂X est seulement C^∞, on a des formules analogues, mais il s'agit alors de développements asymptotiques et plus de séries convergentes

II. LE NOYAU DE BERGMAN D'UN DOMAINE STRICTEMENT PSEUDO-CONVEX.

Strictement pseudo-convexe signifie que $X \subset \mathbb{C}^n$ peut être défini (localement ou globalement) par une inéquation $u < 0$, où u est analytique réelle (C^2 suffit pour la définition qui suit), $du \neq 0$ sur le bord $u = 0$, et la matrice de Levi $\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}$ est hermitienne $\gg 0$.

<u>Modèle</u> : la boule $|z| < 1$ de $\mathbb{C}^n$. Dans ce cas une inéquation de définition est $u = z.\bar{z} - 1 < 0$. Le groupe d'automorphisme est $PU(n,1)$ (où $U(n,1)$ est le groupe de transformations linéaires de $\mathbb{C}^{n+1}$ qui préserve la forme hermitienne $Z.\bar{Z} - Z_o\bar{Z}_o$, $PU(n,1)$ le groupe de transformations homographiques qui s'en déduit). Le noyau de Bergman est

$$(2) \quad \text{(pour la boule)}\ B = -\frac{n!}{(2i\pi)^n} \frac{\Pi dz_j . d\bar{z}_j}{u^{n+1}} = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n (\partial\bar{\partial} \operatorname{Log} u)^n$$

où ∂. resp. $\bar{\partial}$ désigne la composante holomorphe, resp. antiholomorphe, de la différentielle extérieure : $d = \partial + \bar{\partial}$.

La stricte pseudo-convexité implique que la restriction aux vecteurs tangents au bord, et holomorphes, de la forme hermitienne de matrice $\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}$ est non dégénérée, ce qui s'écrit encore (quel que soit le choix de u, avec $u = 0$, $du \neq 0$ sur ∂X, $u < 0$ sur X).

$$(3) \qquad J(u) = \det\begin{pmatrix} u & u_{\bar{z}} \\ u_z & u_{z\bar{z}} \end{pmatrix} = \frac{1}{n!}\, u^{n+1} (\partial\bar{\partial} \operatorname{Log} u)^n \neq 0 \ \text{ sur } \partial X$$

(la condition (3) ne contient plus la condition de positivité, qu'il convient donc de rajouter pour la définition de la stricte pseudo-convexité).

Dans ce cas on sait (cf.[1],[4],[9]) que B est une distribution conormale (holonôme), attachée à l'hypersurface $u = 0$ de $X \times \bar{X}$: B est holomorphe dans

$X \times \overline{X}$, se prolonge analytiquement au voisinage du bord, sauf aux points de la diagonale de $\partial X \times \partial \overline{X}$ (points de rencontre de l'adhérence de $X \times \overline{X}$ et de l'hypersurface $u = 0$) où il est de la forme

$$(4) \qquad B(x,\overline{y}) = \frac{a(x,\overline{y})}{U(x,\overline{y})^{n+1}} + b(x,\overline{y}) \operatorname{Log} u(x,\overline{y})$$

où a, b sont holomorphes en x , $\overline{y}$ ($u = u(z,\overline{z})$ est une fonction analytique de z et $\overline{z}$, et dans l'expression ci-dessus on a substitué x à z et $\overline{y}$ à $\overline{z}$).

L'analyse de [1] montre en fait que la singularité de B (i.e. B mod . les fonctions holomorphes de $x,\overline{y}$) est un invariant local ; les coefficients de Taylor de poids $\leqslant k$ de cette singularité (cf. ci-dessous, n°5, pour les poids) ne dépendent que du jet de poids $k+2$ de ∂X . Ce sont des polynômes des dérivées de poids $\leqslant k+2$ de u , et de $J(u)^{-1}$ (seule quantité qu'il faille inverser). Le calcul de [1] ne fournissait pas d'expression très explicite de ces polynômes (l'indétermination dans le choix de coordonnées locales, de phases dans les "intégrales de Fourier" , et un aller et retour entre noyau de Bergman et noyau de Szegö , qui n'est pas un invariant biholomorphe, ne permettaient pas d'aboutir à des formules maniables). Nous donnons une telle formule plus bas. C. Feffermann, dans une analyse difficile [6], a comparé le noyau de Bergman B et la solution asymptotique de l'équation de Monge-Ampère $J(u) = 1$, $u = 0$ sur ∂X . Cette analyse fait apparaître des invariants non triviaux, et devrait permettre optimalement de décrire la partie polaire de la singularité de B en fonction de ces invariants. L'indétermination dans cette solution asymptotique - qui est unique mod. $O(u^{n+2})$ seulement - ne permet pas en principe d'atteindre le terme logarithmique.

III. L'ANALYSE DE M. KASHIWARA.

M. Kashiwara a donné dans [9] une analyse limpide du noyau de Bergman, qui explique son caractère holonôme, et permet de donner des formules aussi explicites que possible pour sa singularité. Je résume ici cette analyse. Les formules "explicites" sont à ma connaissance nouvelles, mais en résultent aisément comme on verra.

Tout d'abord réinterprêtons la condition (3) : $J(u) \neq 0$ sur ∂X . Posons $\partial X = \Sigma$, hypersurface réelle de $V = \mathbb{C}^n$, dont le complexifié est l'hypersurface d'équation $u = 0$ de $V \times \overline{V}$. Soit $N \subset T^*(V \times \overline{V})$ le fibré conormal de Σ (ensemble des covecteurs proportionnels à du , au-dessus de Σ). C'est une variété conique Lagrangienne. La condition $J(u) \neq u$ équivaut à la suivante :

(5) La projection $pr_1 : N \to T^*V$ (resp. ou $pr_2 : N \to T^*\overline{V}$) est un isomorphisme local.

On introduit alors les opérateurs micro-différentiels $p(z,\overline{z},\partial_z,\partial_{\overline{z}})$ définis au voisinage de N. Ceux-ci opèrent sur les singularités de distributions micronormales (micro-fonctions) attachées à Σ : classes (mod. les fonctions analytiques) de fonctions de la forme $\frac{f(z,\overline{z})}{u^N} + g(z,\overline{z})$ Log u .

Ces dernières forment un faisceau (porté par Σ) de modules sur l'anneau des opérateurs microdifférentiels, libre de rang 1 sur le sous faisceau des opérateurs holomorphes (resp. ou antiholomorphes) i.e. de la forme $P(z, \frac{\partial}{\partial z})$ (resp. $P(\overline{z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}})$), avec pour générateur, par exemple, la singularité de Log u (notée aussi $Y(u)$, Y fonction de Heaviside), qui est évidemment un invariant biholomorphe. Par suite pour tout opérateur holomorphe $P(z, \frac{\partial}{\partial z})$ il existe un unique opérateur antiholomorphe $Q(\overline{z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}})$ tel que

$$P.\ \mathrm{Log}\ u = Q\ .\ \mathrm{Log}\ u \tag{6}$$

(avec ces notations, l'application $P \mapsto Q$ est un antiisomorphisme d'algèbres). Le noyau de Bergman B est alors caractérisé, à un facteur constant près, par le système d'équations microdifférentielles

$$ {}^tP(z, \frac{\partial}{\partial z})\ B = {}^tQ(\overline{z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}})\ B \qquad \text{si} \quad P(z, \frac{\partial}{\partial z})\ \mathrm{Log}\ u = Q(z, \frac{\partial}{\partial z})\ \mathrm{Log}\ u \tag{7}$$

Le système (7) est toujours holonôme, de multiplicité 1, ce qui explique le caractère holonôme de B .

Par exemple dans le cas de la boule $u = z.\overline{z} - 1 < 0$, les équations (6) sont engendrées par les équations différentielles

$$\text{(8) (sphère)} \quad \begin{cases} z.\ \frac{\partial}{\partial z}\ \mathrm{Log}\ u = \overline{z}.\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\ \mathrm{Log}\ u \\ \frac{\partial}{\partial z}\ \mathrm{Log}\ u = \overline{z}\ \ \overline{z}\ .\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\ \mathrm{Log}\ u \\ z\ \ z.\ \frac{\partial}{\partial z}\ \mathrm{Log}\ u = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\ \mathrm{Log}\ u \end{cases}$$

et il est immédiat que les équations (7) correspondantes caractérisent B à un facteur constant près ($B = \text{cste}\ \frac{\Pi dz_i d\overline{z}_i}{u^{n+1}}$).

Pour la suite il sera commode de remplacer la sphère $z.\overline{z} = 1$ par le paraboloïde qui s'en déduit par transformation homographique :

$u = z_1 + \bar{z}_1 + z' \,.\, \bar{z}' < 0$ $(z' = z_2, \ldots z_n)$. Dans ce cas les équations (6) s'écrivent

(9) (paraboloïde : $u = z_1 + \bar{z}_1 + z'.\bar{z}'$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z_1} \operatorname{Log} u = \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \operatorname{Log} u \quad , \quad (z_1 \dfrac{\partial}{\partial z_1} + z' . \dfrac{\partial}{\partial z'}) \operatorname{Log} u = - \bar{z}_1 \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \operatorname{Log} u \\ \dfrac{\partial}{\partial z'} \operatorname{Log} u = \bar{z}' \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \operatorname{Log} u \quad , \quad z \dfrac{\partial}{\partial z_1} \operatorname{Log} u = \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}'} \operatorname{Log} u \end{cases}$$

Le noyau de Bergman est encore $(\frac{1}{2i\pi})^n \, (\partial\bar{\partial} \operatorname{Log} u)^{n+1}$. Les égalités ci-dessus (6) (7) (8) (9) sont toutes des égalités entre microfonctions, i.e. mod. les fonctions analytiques.

IV. FIN DE L'ANALYSE.

Les formules auxquelles conduisent (6) (7) ont un caractère algébrique, et les conditions de réalité sous-jacentes (i.e. $\bar{z}$ est conjugué complexe de z) n'y entrent pas : z et $\bar{z}$ sont analytiquement indépendants. Voici alors l'analogue réel de notre problème : on se donne deux variétés X et $Y (= \bar{X})$ de même dimension n, et dans le produit $X \times Y$ une hypersurface Σ "en position générale", i.e. la projection du fibré conormal $N = T^*_\Sigma(X \times Y)$ sur T^*X ou T^*Y est un isomorphisme local, ou de façon équivalente, le déterminant de Monge-Ampère $J(u) = \frac{1}{n!} \, u^{n+1} (\partial_x \partial_y \operatorname{Log} u)^n$ ne s'annule pas sur Σ, où $u = 0$ est une équation de Σ.

Soit alors K le micro-opérateur intégral de Fourier de noyau Log u. C'est un opérateur de type Ω_Y (formes de degré n sur Y) $\to \mathcal{O}_X$ (fonctions). Il est elliptique, donc inversible, parce que la relation canonique déduite de N est inversible, ainsi que le symbole principal de Log u :

$$\operatorname{Log} u = \int e^{\lambda u} \frac{d\lambda}{\lambda} \quad \text{(mod. les fonctions analytiques)} \tag{10}$$

L'analyse de Kashiwara se résume alors dans le résultat suivant :

<u>Théorème</u> 1. <u>La singularité de</u> B <u>est le noyau du micro-opérateur de Fourier (de type</u> $\mathcal{O}_X \to \Omega_Y$) <u>inverse de</u> K <u>(de type</u> $\Omega_Y \to \mathcal{O}_X$, <u>de noyau</u> Log u).

Ceci conduit aussitôt à une formule du type "phase stationnaire" pour la singularité de B. Choisissons des coordonnées locales $x_1, x_2 \ldots x_n = x_1, x'$, $y_1 \ldots y_n = y_1, y'$ sur X et Y, et u, de sorte que

$$(11) \qquad \frac{\partial u}{\partial y_1} = 1$$

(C'est évidemment toujours possible, c'est réalisé pour l'équation standard du paraboloïde : $u = x_1 + y_1 + x'.y'$) .

Cherchons alors B sous la forme

$$(12) \qquad B = \int e^{\lambda u}\, b(x,y',\lambda)\, d\lambda \qquad \left(\frac{\partial b}{\partial y_1} = 0\right)$$

i.e. avec une densité $b(x,y',\lambda)dx\, dy$ indépendante de y_1 . Ceci est possible, d'une seule façon (toujours mod. les fonctions régulières) ; b est le développement asymptotique (pour $\lambda \to \infty$) de $e^{\lambda(y_1-u)}\, \hat{B}$, où $\hat{B}$ est la transformée de Laplace de B par rapport à y_1 .

La condition sur B s'écrit donc

$$(13) \qquad \int e^{\lambda u(x,y)-\mu u(z,y)}\, b(x,y',\lambda)\, d\lambda\, dy\, \frac{d\mu}{\mu} = \text{cste} \quad \delta(x-z)$$

Comme b est indépendant de y_1 , et $\frac{\partial u}{\partial y_1} = 1$, on a (toujours mod. les fonctions régulières) on a :

$$(14) \qquad \int e^{(\lambda-\mu)u(z,y)}\, \frac{d\mu}{\mu}\, dy_1 = \text{cste}.\ \frac{1}{\lambda}$$

L'équation (13) se réduit donc à

$$(15) \qquad \int e^{\lambda u(x,y)-\lambda u(z,y)}\, b(x,y',\lambda)\, \frac{d\lambda}{\lambda}\, dy' = \text{cste} \quad \delta(x-z)$$

Posons $\zeta = \lambda \frac{\partial u}{\partial x}$ $(\zeta_j = \lambda \frac{\partial u}{\partial x_j}$, $j = 1,\dots n)$. On a

$$(16) \qquad \frac{D\zeta}{D(\lambda,y')} = \det\begin{pmatrix} u_x \\ \lambda u_{xy'} \end{pmatrix} = \lambda^{n-1} J(u)$$

(puisque $\frac{\partial u}{\partial y_1} = 1$). Posons encore

$$(17) \qquad \begin{cases} \phi = \lambda u(x,y) - \lambda u(z,y) \\ \chi = \phi - \zeta.(x-z) = O(x-z)^2 \end{cases}$$

Après changement de variables $(\lambda,y') \leftrightarrow \zeta$, l'équation (15) s'écrit donc

$$(18) \qquad \int e^{\zeta.(x-z)+\chi}\, \frac{b(x,y',\lambda)}{\lambda^n\, J}\, d\zeta = \text{cste} \quad \delta(x-z)$$

où on a posé $J = J(u)\ (x,y')$.

Du théorème de la phase stationnaire, appliqué à (18) on déduit alors

Théorème 2 : Avec les hypothèses et les notations ci-dessus, le symbole analytique b est, à un facteur constant près, la solution (développement asymptotique en puissance de λ) de

$$\exp\left(\frac{\partial}{\partial\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(e^{\chi} \frac{b}{\lambda^n J}\right)\Big|_{z=x} = 1 \tag{19}$$

On peut réexprimer $\frac{\partial}{\partial\zeta}$ dans les coordonnées initiales λ, y'

$$\frac{\partial}{\partial\zeta} = \begin{pmatrix} u_x \\ U_{xy'} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\lambda} \\ \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial y'} \end{pmatrix} \tag{20}$$

L'opérateur différentiel asymptotique

$$P : \beta(x,y',\lambda) \mapsto \exp\left(\frac{\partial}{\partial\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\right) (e^{\chi}\beta)\Big|_{z=x} \tag{21}$$

est du type qui intervient habituellement dans la méthode de la phase stationnaire :

$$P = 1 + \sum_1^{\infty} \lambda^{-k} P_k \tag{22}$$

où P_k est un opérateur différentiel d'ordre k, dont les coefficients sont des polynômes universels en les dérivées d'ordre $\leqslant 2k$ de χ, i.e. en les dérivées d'ordre $\leqslant 2k+2$ (et $\geqslant 2$) de u.

P est inversible puisque son terme dominant est 1. L'inverse est de la même forme : $Q = P^{-1} = 1 + \sum_1^{\infty} \lambda^{-k} Q_k$.

On a pour b et B les formules

$$b = \text{cste } \lambda^n J(u) P^{-1}(1) \tag{23}$$

$$B = \text{cste } J(u) \left[\frac{(-1)^n n!}{u^{n+1}} + \sum_1^n \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{u^{n-k+1}} Q_k(1) + \sum_{n+1}^{\infty} \frac{u^{k-n}}{(k-n)!} \operatorname{Log} u . Q_k(1)\right] \tag{24}$$

où $Q = P^{-1} = 1 + \sum_1^{\infty} \lambda^{-k} Q_k$ I. $Q_k(1)$ est une fonction de x, y'.

Comme toujours, dans la méthode de la phase stationnaire, cette série converge si les données sont analytiques. Si les données sont seulement C^{∞}, les formules fournissant les coefficients $Q_k(1)$ sont évidemment les mêmes, mais on obtient seulement un développement asymptotique (en général non convergent) décrivant la singularité de B.

N.B. Dans les formules ci-dessus, les intégrales sont symboliques : par exemple $\int e^{\lambda u}\, b\, d\lambda$ représente la classe du développement asymptotique $e^{\lambda u}\, b\, d\lambda$ mod. les formes exactes $d(e^{\lambda u}\beta) = e^{\lambda u}(u\beta + \frac{\partial\beta}{\partial\lambda})d\lambda$, sur laquelle opèrent les opérateurs microdifférentiels. On peut en faire de vraies séries d'intégrales (convergentes dans le cas analytique, asymptotiques dans le cas C^∞) en choisissant un chemin d'intégration complexe, sur lequel Re $\lambda u < 0$. L'indétermination de l'origine d'un tel chemin se reflète par le fait qu'on n'atteint, par de tels calculs, que la singularité des distributions considérées.

V. VARIANTE.

Les formules (19) (23) (24) ci-dessus aboutissent à une expression de la singularité de B qui est clairement polynomiale en les dérivées de u, et en $J(U)^{-1}$. L'opérateur asymptotique P est décrit explicitement par les formules (20) (21). Le calcul de l'inverse $Q = P^{-1} = \sum_0^\infty (1-P)^k$ relève du calcul des opérateurs différentiels, qui est bien répertorié sinon court. Voici une variante de la formule du n°4, qui peut dans certains cas aboutir à des expressions plus maniables. Pour la décrire il sera commode de pondérer les développements de Taylor de fonctions, singularités, etc... comme suit : on choisit des coordonnées $x_1,\ldots x_n = (x_1,x')$ sur X, $y_1\ldots y_n = (y_1\ y')$ sur Y ($y = \bar{x}$ dans le cas complexe), et on attribue à x',y' le poids 1, à x_1, y_1 le poids 2 :

$$w(x_1) = w(y_1) = 2\ ,\quad w(x_j) = w(y_j) = 1 \quad \text{pour } j \geq 2\ . \tag{25}$$

Il en découle une pondération pour les fonctions, singularités, formes différentielles, opérateurs différentiels ou microdifférentiels. Ainsi $\frac{\partial}{\partial x_1}$ est de poids -2, dx_1 et $(\frac{\partial}{\partial x_1})^{-1}$ de poids 2, Log u et les $(\partial_x\partial_y \text{ Log } u)^k$ de poids 0 si u désigne la fonction de référence :

$$u = x_1 + y_1 + x'.y' \tag{26}$$

(correspondant au paraboloïde (9)).

Il est toujours possible de choisir les coordonnées (x_1,x') (y_1,y') et l'équation $U = 0$ de Σ de sorte que (*)

$$U = u + \rho(x,y')\ ,\ \text{avec } \rho = O(x,y)^3 \ \text{ indépendant de } y_1\ . \tag{27}$$

(*) Dans la suite U (majuscule) désignera l'équation de Σ, u (minuscule) $= x_1 + y_1 + x'.y'$ celle du paraboloïde.

En fait Chern et Moser ont montré dans [2] qu'on peut choisir les coordonnées et U de sorte que Σ soit mise "sous forme normale" i.e.

(28) $$\begin{cases} U = u + \rho(x,y') \\ \text{où } \rho \text{ est indépendant de } y_1 \text{ , } \rho = 0\,(x')^2(y')^2 \end{cases}$$

(i.e. ρ s'annule à l'ordre 2 pour $x' = 0$ ou $y' = 0$), et

(29) $$\begin{cases} \Delta\rho = 0(x',y')^3 \\ \Delta^2\rho = 0(x',y')^2 \\ \Delta^3\rho = 0(x',y') \end{cases} \qquad \text{avec } \Delta = \sum_2^n \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial y_j}$$

(i.e. ces quantités sont nulles d'ordre 3 , resp.2, resp.1 pour $x' = y' = 0$)
[Dans [2] une forme normale est une équation de la forme $u + \rho(\frac{x_1 - y_1}{2i}, x', y') = 0$; la forme ci-dessus est équivalente et sera plus commode pour la suite] .

On peut donc en particulier choisir les coordonnées, et U , de sorte que

(30) $$\begin{cases} U = u + \rho(x,y') & \text{avec } \rho \text{ indépendant de } y_1 \\ w(\rho) \geqslant 4 & \text{resp. } w(\rho) \geqslant 6 \text{ si } n = 2 \text{ .} \end{cases}$$

De l'égalité $\operatorname{Log} U = \exp(\rho \frac{\partial}{\partial y_1}) \operatorname{Log} u$, on déduit

(31) $$\operatorname{Log} U = A \operatorname{Log} u$$

où $A = A(x, \frac{\partial}{\partial x})$ est l'opérateur microdifférentiel infini de symbole total

(32) $$A(x,\xi) = \exp \rho(x, \xi_1^{-1}\xi')\xi_1$$

A est d'ordre infini, mais somme de termes dont le poids tend vers $+\infty$:
$w(\frac{1}{k!}\rho^k(x,\xi_1^{-1}\xi^o)\xi_1^k \geqslant 2k$ si $w(\rho) \geqslant 4$.

Par suite, avec les notations ci-dessus, si B désigne la singularité du noyau de Bergman de Σ $(B = K^{-1})$,

<u>Théorème 3</u>. <u>On a</u> $B = c^{ste}\ {}^tA^{-1}(\frac{1}{u^{n+1}})$.

(Le noyau de Bergman du modèle $u = 0$ est $\frac{c^{ste}}{u^{n+1}}$).

Ici le symbole A est explicite ; reste à calculer, dans l'un ou l'autre ordre, l'inverse et le transposé. Ces deux opérations relèvent du calcul pseudo-differentiel:

$$(33)\qquad {}^tA(x,\xi) = \exp(\partial_x\cdot\partial_\xi)\, A(x,-\xi)$$

$$A^{-1} = \sum_0^\infty (1-A)^k \quad \text{où} \quad w(1-A)^k \geqslant 2k$$, et $(1-A)^k$ est donné par la formule de Leibnitz.

Le théorème 3 donne directement une expression polynomiale de la singularité de B en fonction des invariants de Chern-Moser : il suffit de prendre U sous forme normale. L'inconvénient de cette nouvelle formule est que les singularités sont repérées à partir du paraboloïde $u = 0$ et non plus de Σ .

VI. COMPARAISON AVEC LA SOLUTION ASYMPTOTIQUE DE L'EQUATION DE MONGE-AMPERE.

Dans sa belle et difficile analyse [6] , C. Fefferman a décrit les termes de bas degré de la singularité de B (la description s'arrête un peu avant le terme logarithmique)en fonction de la solution asymptotique de l'équation de Monge-Ampère $J(U) = 1$, $U = 0$ sur Σ , et d'invariants kählériens de la courbure d'une métrique construite à partir de U . Nous ne redécrirons pas ici cette analyse, mais y apporterons des compléments.

L'équation de Monge-Ampère peut se réécrire, pour une (n,n) forme ω ($\omega = \mathrm{cste}(\partial_x\partial_y \operatorname{Log} U)^n$)

$$(34)\qquad (\partial_x\partial_y \operatorname{Log}\omega)^n = C^{ste}\,\omega$$

(la densité de ω est bien déterminée mod. un facteur produit (déterminant jacobien) $a(x)\, b(y)$, de sorte que $\partial_x\partial_y \operatorname{Log}\omega$ est bien déterminé, et l'équation (36) a un sens).On voit facilement, en utilisant par exemple la relation

$$(35)\qquad J(U + c\psi) = J(U)\,(1 + (n+1)\, c\psi' - cU\psi'' + O(\psi))$$

où c est une fonction sur $X\times Y$, et $\psi = \psi(U)$ est de la forme $U^kP(\operatorname{Log} U)$, P = polynôme, $k \geqslant 1$, ou l'analogue de (35) pour (34), que (34) admet une solution asymptotique (en fait convergente si les données sont analytiques), à pôle d'ordre $n+1$ sur l'hypersurface $\Sigma(U=0)$, de la forme

$$(36)\qquad \omega = \omega_o\,(1 + F(x,y, U^{n+1} \operatorname{Log} U))$$

avec par exemple $\omega_o = c^{ste}(\partial_x \partial_y \text{ Log } U)^n$, où F est une fonction de $2n+1$ variables. Deux telles solutions diffèrent par une expression de la forme $\omega_o . U^{n+1} G(x,y,U^{n+1} \text{ Log } U)$. En particulier il existe une forme méromorphe Ω dont la partie polaire (singularité) est bien déterminée, donc biholomorphiquement invariante, telle que

(37) $\quad (\partial_x \partial_y \text{ Log}\, \Omega)^n - c\, \Omega$ soit holomorphe (sans pôle)

Pour cette forme la différence

$$\mu = (\partial_x \partial_y \text{ Log}\, \Omega)^n - c\Omega_{|U = 0} \tag{38}$$

est aussi biholomorphiquement invariante et détermine le premier terme de la singularité logarithmique de la solution ω de (34).

La partie uniforme de B n'est en général pas égale à celle de la solution de l'équation de Monge-Ampère (34). Il est alors curieux d'observer que les deux ont la même variation première à partir du cas du modèle paraboloïde : posons comme ci-dessus $u = x_1 + y_1 + x'.y'$ et

$$U = u + \varepsilon\, \rho(x,y') \qquad \text{avec} \quad \varepsilon^2 = 0 \tag{39}$$

On a alors, comme au n°5 .

$$\text{Log } U = (1+\varepsilon a(x, \tfrac{\partial}{\partial x})) \text{ Log } u \tag{40}$$

$$\text{avec} \quad a(x,\xi) = \rho(x, \xi_1^{-1} \xi')\xi_1$$

$$B = (1 + \varepsilon\, \alpha)\, B_o \tag{41}$$

$$\text{avec } B_o = \frac{c^{ste}}{u^{n+1}} \quad , \quad \alpha = -\, {}^t a$$

Posons $B = (1 + \varepsilon \varphi) B_o$ avec $\varphi = \text{fonction} = \dfrac{\alpha B_o}{B_o}$.

Un calcul idiot montre alors qu'on a

$$(\partial_x \partial_y \text{ Log } B)^n - c\, B = \tag{42}$$

$$= c^{ste}\, U[(n+1)(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial y_1}) + (x_1+y_1)\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} y' . \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial y_1} x' . \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\partial}{\partial x'} . \frac{\partial}{\partial y'}]\varphi =$$

$$= c^{ste}\, u\, (\alpha + \frac{\partial}{\partial x_1}[x_1, \alpha] + \frac{\partial}{\partial x'} . [x', \alpha]) \frac{\partial}{\partial x_1}\; B_o$$

Or $a(x,\xi) = \rho(x,\xi_1^{-1}\xi^1)\xi_1$ est homogène de degré 1 en ξ , donc

(43) $$a = [a,x_1]\frac{\partial}{\partial x_1} + [a,x'] \cdot \frac{\partial}{\partial x'}$$

ce qui implique, par transposition.

(44) $$\alpha + \frac{\partial}{\partial x_1}[x_1,\alpha] + \frac{\partial}{\partial x'} \cdot [x',\alpha] = 0$$

Ceci implique que $(\partial_x\partial_y \text{ Log } B)^n - c\,B$ est le produit par u d'une forme holomorphe (sans singularité), donc B diffère de la solution asymptotique de l'équation (34) par une forme holomorphe dans ce cas ; en particulier les deux ont le même terme logarithmique. La coïncidence s'arrête là : il n'y a plus égalité si on pousse le calcul mod. ε^3 au lieu de ε^2 - cf. [6] .

VII. CAS DE LA DIMENSION 2.

Dans ce cas, en coordonnées normales, U s'écrit

(45) $$U = u + \rho(x,y') \qquad \text{avec} \quad u = x_1 + y_1 + x'.y'$$
$$w(\rho) \geqslant 6 .$$

Posons comme ci-dessus

(46) $$a(x,\xi) = \rho(x,\xi_1^{-1}\xi')\xi_1$$

Comme a est de poids $\geqslant 4$, on a

(47) $$B = (1 - {}^t a(x, \frac{\partial}{\partial x}))\, B_o + (\text{poids} \geqslant 8) .$$

Comme le premier terme de la singularité logarithmique de B est de poids 6 , ceci en donne une expression tout à fait explicite. En outre, d'après le calcul du n° 6 on a

<u>Théorème 4</u> . <u>En dimension</u> 2 , <u>le noyau de Bergman et la solution de l'équation de Monge-Ampère diffèrent par une expression de la forme</u> (holomorphe + O(U Log U)). <u>En particulier la partie dominante de la singularité logarithmique est la même</u>.