SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES - ÉCOLE POLYTECHNIQUE

P. DEGOND

Régularité de la solution des équations cinétiques en physique des plasmas

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1985-1986), exp. nº 18, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1985-1986____A18_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES 1985 - 1986

REGULARITE DE LA SOLUTION DES EQUATIONS CINETIQUES EN PHYSIQUE DES PLASMAS.

par P. DEGOND

Exposé n° XVIII

29 Avril 1986

I. INTRODUCTION ET PRESENTATION DU SYSTEME DE VLASOV-POISSON.

Dans cet exposé, nous nous intéresserons essentiellement au problème de la perte de régularité du système Vlasov-Poisson. En conclusion, nous présenterons des modèles physiquement plus complets, en indiquant lesquels des précédents résultats peuvent s'étendre à ces modèles.

Dans le modèle de Vlasov-Poisson, l'inconnue est une fonction de distribution $f(x,v,t)$ où $x \in \mathbb{R}^d$ est la position, $v \in \mathbb{R}^d$, la vitesse, et $t > 0$, le temps. d est la dimension de l'espace physique considéré (1,2, ou 3 dans les cas pratiques). f vérifie l'équation de Vlasov :

$$\partial_t f + v.\nabla_x f - \nabla_x \phi.\nabla_v f = 0 \tag{1}$$

$$\left(\text{i.e : } \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{d} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial v_i} = 0\right) .$$

$\phi(x,t)$ est aussi une inconnue du problème. C'est le potentiel, solution de l'équation de Poisson :

$$\Delta\phi = \pm\rho = \pm \int f(x,v,t)dv \quad ; \quad \phi \to 0 \quad \text{pour } |x| \to +\infty \tag{2}$$

Dans (2), le signe + intervient lorsque les forces d'interactions sont attractives (cas de la gravitation) et le signe − , lorsque elles sont répulsives (cas de forces electrostatiques entre particules chargées de même signe)

Le système (1) − (2) est donc non linéaire dans le terme $\nabla_x\phi.\nabla_v f$. Cependant, on est en droit d'attendre du problème elliptique (2), qu'il confère à la solution de l'équation (1) certaines propriétés de régularité. En ce sens, le système (1) − (2) est plus proche des équations d'Euler incompressible (en formulation tourbillon) que d'une équation de conservation hyperbolique non linéaire standard. Néanmoins, la régularisation elliptique de (2) ne suffit pas à assurer la régularité de la solution dans tous les cas, et le but de l'exposé est d'analyser ce phénomène de perte de régularité.

Nous rappelons maintenant quelques notions attachées au système (1)-(2) :

Les caractéristiques $(X(s,t,x,v),\ V(s,t,x,v))$ sont les solutions du système

(3) $$\frac{dX}{ds} = V \ ; \quad \frac{dV}{ds} = -\nabla_x \phi(X(s),s) \ ; \quad X(t) = x \quad ; \quad V(t) = v$$

et f est une intégrale première de (3) :

(4) $$f(x,v,t) = f_o(X(0,t,x,v),\ V(0,t,x,v))$$

où f_o est la donnée initiale.

Dans tout ce qui suit, on supposera que f_o est <u>continuement différentiable</u> à <u>support compact</u> sur $\mathbb{R}^6$, et <u>positive</u> (pour des raisons physiques).

Maintenant, en définissant la densité locale $\rho(x,t) = \int f(x,v,t)dv$, on obtient aisément de (3), (4) la

<u>Proposition 1</u> : (i) $f \geq 0$

(ii) $\|f(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^6)} = \|f_o\|_{L^p(\mathbb{R}^6)}$; $1 \leq p \leq \infty$

(iii) $\|\rho(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} = \|\rho(0)\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} = \|f_o\|_{L^1(\mathbb{R}^6)}$

Par ailleurs, le système (2) permet d'écrire :

(5) $$-\nabla_x \phi(x,t) = c(d) \int \frac{x-y}{|x-y|^d}\ \rho(y,t)\ dy \quad .$$

où C(d) est une constante ne dépendant que de la dimension. D'une inégalité d'interpolation, et du principe du maximum, on déduit la

<u>Proposition 2</u> : (i) $\|\nabla_x \phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C(d)\ \|\rho\|^{1/d}_{L^1(\mathbb{R}^3)}\ \|\rho\|^{(d-1)/d}_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$

(ii) Pour des forces attractives, ϕ est négatif

Pour des forces répulsives, ϕ est positif.

Enfin, en introduisant l'énergie cinétique T(t), et l'énergie potentielle U(t) par :

(6) $$T(t) = \iint v^2 f\ dx\ dv \quad ; \quad U(t) = \iint \phi f\ dx\ dv$$

on a

Proposition 3 : L'énergie totale $E(t) = T(t) + U(t)$ est conservée :

$$E(t) = E(0)$$

Grâce à cette proposition, et grâce à un argument de compacité découlant de la résolution du problème elliptique (2), on peut montrer l'existence de solutions faibles :

Théorème 1 : ([Ar] , [I-N] , [H-H]) : Il existe une solution faible globale de (1)-(2) vérifiant :

$f(t) \in L^1(\mathbb{R}^{2d})$; faiblement continue par rapport à t .

$E(t)\ f(t) \in L^1(\mathbb{R}^{2d})$.

En revanche, aucun théorème d'unicité n'est connu pour ces solutions faibles. Dans le prochain paragraphe, nous allons mettre en évidence un critère de régularité (et d'unicité) de solutions.

II. UN CRITERE DE REGULARITE DES SOLUTIONS.

Ce critère est explicitement formulé dans [Ho] mais figure en germe dans [Ba.1] et [U.O.].

Théorème 2 : Soit $(f.\phi)$ une solution faible de (1)-(2). Si il existe une constante C telle que

(7) $$\|\rho(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leqslant C \quad , \forall \quad t \in [0,T] .$$

alors (f,ϕ) est l'unique solution régulière (continuement différentiable sur $[0,T] \times \mathbb{R}^{2d}$) du système (1)-(2), sur l'intervalle de temps $[0,T]$.

On voit donc que la perte de régularité éventuelle d'une solution du système (1)-(2) est liée à une perte d'intégrabilité de f par rapport aux vitesses, ρ devenant alors infini (physiquement, des particules de vitesses très grandes sont produites). Dans la forme, ce résultat s'apparente à celui de [B.K.M] pour l'équation d'Euler incompressible.

Idée de la preuve du théorème 2. Elle repose sur la régularisation elliptique de (2). Si de (7) on pouvait déduire que $\phi \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$, alors le champ de vecteur $(v, -\nabla_x\phi)$ serait régulier ce qui permettrait de conclure immédiatement.

Malheureusement on obtient seulement :

$$\|\nabla_x^2\phi\|_{L^\infty} \leqslant C_1(1 + \mathrm{Log}(1 + \|\nabla_x\rho\|_{L^\infty}))\,\|\rho\|_{L^\infty} + C_2(1 + \|\rho\|_{L^1})$$

Il est donc nécessaire d'obtenir une estimation de $\|\nabla_x\rho\|_{L^\infty}$. Pour cela, grâce à (7) et à la proposition 1, on obtient :

$$(8) \qquad \|\nabla_x E\|_\infty \leqslant C(1 + \mathrm{Log}(1 + \|\nabla_x\rho\|_\infty)) .$$

Pour estimer $\nabla_x\rho$ on écrit

$$(9) \qquad |\nabla_x\rho| = |\int\nabla_x f\, dv| \leqslant \|\nabla_x f\|_\infty\, m(x,t)$$

où $m(x,t)$ est la mesure du support de la fonction $v \to f(x,v,t)$, dont on peut montrer grâce à (7) et (3) qu'elle est uniformément bornée sur $[0,T]$.

Enfin l'estimation de $\nabla_x f$ s'obtient en dérivant l'équation (1). Le seul terme non linéaire par rapport aux dérivées étant $\nabla^2\phi.\nabla_v f$, on obtient par un principe du maximum, puis à l'aide de (8) et (9) :

$$(10) \qquad \begin{aligned} \frac{d}{dt}\|\nabla f\|_\infty &\leqslant C(1 + \|\nabla_x^2\phi\|_\infty)\,\|\nabla f\|_\infty \\ &\leqslant C(1 + \mathrm{Log}(1 + \|\nabla f\|_\infty))\|\nabla f\|_\infty \end{aligned}$$

Bien que non linéaire, l'inégalité de Gronwall (10) permet d'obtenir une estimation de $\|\nabla f\|_\infty$, quel que soit la taille de l'intervalle $[0,T]$. Les inégalités sur $\nabla_x^2\phi$ et $\nabla_x\rho$ en découlent. ∎

Dans le prochain paragraphe, on examine dans quels cas le critère énoncé au théorème 2 est vérifié (ou infirmé).

III. CAS DE REGULARITE DES SOLUTIONS DE L'EQUATION DE VLASOV - POISSON.

Compte tenu du théorème 2, pour montrer la régularité globale (pour tout temps) de la solution considérée, il faut trouver une fonction $\varphi(t)$ dans $L^\infty_{loc}([0,\infty[)$ telle que

$$(11) \qquad \|\rho(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varphi(t) \quad \forall\, t \in [0,\infty[$$

Le critère (11) est vérifié pour des dimensions petites ($d \leqslant 2$; $d = 3$ avec des conditions de symétrie,...) (voir [Ba.1],[U.O.] , [Ho] , [Wo-1] [De 1]). La technique utilisée repose sur l'interpolation.

Le prototype de tels théorèmes est le suivant :

<u>Théorème 3</u> : Si $d = 2$, le critère (11) est vérifié ; Il existe une solution continuement différentiable, unique, globale.

<u>Preuve</u> : On estime la croissance de $m(x,t)$, mesure du support de la fonction $v \to f(x,v,t)$. D'après (3) cette croissance est gouvernée par le champ $\nabla_x \phi$, lequel, grâce à la proposition 2, peut être estimé par la charge ρ . On a donc, si d_o est le diamètre du support de f_o :

$$m(x,t) \leqslant (d_o + \int_o^t \|\nabla_x \phi(s)\|_{L^\infty} ds)^d \quad .$$

$$\leqslant \; C(d_o + \int_o^t \|\rho(s)\|_{L^\infty}^{(d-1)/d} ds)^d \quad .$$

On en déduit une estimation de ρ , selon :

$$|\rho(x,t)|^{1/d} = |\int f(x\ ,v,t)\ dv|^{1/d} \leqslant \|f_o\|_{L^\infty}^{1/d}\ m(x,t)^{1/d} \tag{12}$$

$$\leqslant C(d_o^{1/d} + \int_o^t \|\rho(s)\|_\infty^{(d-1)/d} ds)$$

(12) est une inégalité de Gronwall pour $\rho^{1/d}$, qui est linéaire en dimension $d \leqslant 2$, et non linéaire en dimension $d > 2$. Le critère (11) est donc vérifié si $d = 2$. ■

Le critère (11) peut s'avérer infirmé lorsque la dimension d est grande. On a notamment le résultat suivant dû à Horst [Ho] .

<u>Théorème 4</u> : Si $d \geqslant 4$, dans le cas de forces attractives et pour des données initiales suffisamment grandes, alors le critère (11) n'est pas vérifié, et il y a perte de régularité de la solution au bout d'un temps fini.

<u>Preuve</u> : On introduit le moment d'inertie

$$I(t) = \iint x^2 f\ dx\ dv$$

qui vérifie, <u>si la solution est régulière</u> (voir (6))

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = 2T(t) + (d-2)\ U(t).$$

Si $d \geqslant 4$, on peut écrire, puisque T(t) est positive : et grâce à la proposition 3

$$\frac{d^2 I}{dt^2} \leqslant (d-2)\ T(t) + (d-2)\ U(t) = (d-2)\ E(t) = (d-2)\ E(0)$$

Maintenant, dans le cas de forces attractives, ϕ (et donc U(t)) est négatif (proposition 2). On voit alors sur (6) que **E(0)** devient négatif dès que la donnée initiale f_o est assez grande. Dans ce cas, on a :

$$\frac{d^2 I}{dt^2} \leqslant (d-2)\ E(0) < 0$$

impliquant que I s'annule au bout d'un temps fini, ce qui contredit (4). ■

Le théorème 4 montre que la question de la régularité n'est pas aussi simple que l'on pouvait l'envisager. En particulier, dans le cas de la dimension d = 3 , qui est le cas physiquement intéressant, aucune réponse complète n'est connue. De plus, il devient nécessaire de faire appel à des techniques autres que l'interpolation. Une tentative a été faite en utilisant des techniques de dispersion, qui a mené au résultat suivant :

Théorème 5 : [B.D] . Si d = 3, et f_o assez petite (en norme C^1), alors le critère (11) est vérifié.

Idée de la preuve : La notion de dispersion peut être illustrée sur le problème linéarisé :

$$\partial_t + v\ \nabla_x f = 0 \Rightarrow f(x,v,t) = f_o(x - vt, v)\ .$$

Mais, par hypothèse, il existe une fonction $\chi(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$f_o(x,v) \leqslant \chi(x)\ ,$$

de sorte que la densité locale $\rho(x,t)$ est estimée par :

$$\begin{aligned} (13) \qquad \rho(x,t) \leqslant \int f_o(x-vt,v)\,dv &\leqslant \int \chi(x-vt)\,dv \\ &\leqslant \int \chi(\xi)\ \det\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)\ d\xi \\ &\leqslant C/t^d\ . \end{aligned}$$

Physiquement, la conservation du nombre de particules, et leur dispersion vers l'infini, entraîne la décroissance de leur densité locale. C'est un phénomène typique de domaines non bornés.

Maintenant, cette décroissance peut être mise à profit pour compenser l'effet déstabilisant de la non linéarité. Une telle démarche s'inspire des travaux de Klainerman et al (voir [Kℓ],[K.P.] , [Sh] ...) pour l'équation des ondes non linéaire.

L'extension au cas non linéaire utilise un argument de point fixe. Soit $\rho(x,t)$ une densité locale satisfaisant (en dimension 3)

$$f(x,t) \leqslant A/(1+t)^3 \quad ; A > 0 . \tag{14}$$

On calcule un champ $\nabla_x \phi$ d'après (5) vérifiant selon la proposition 2

$$\| \nabla_x \phi(t) \|_{L^\infty} \leqslant A/(1+t)^2$$

La formule (4) permet d'obtenir une nouvelle densité $\tilde{\rho}(x,t)$ grâce à

$$\tilde{\rho}(x,t) = \int f_o(X(o,t,x,v), V(o,t,x,v))dv \tag{15}$$

Pour f_o assez petite, on montre que $\tilde{f}$ satisfait encore (14), <u>avec la même constante A</u> . On conclut alors par un argument de point fixe que la solution de (1)-(2) satisfait (14), ce qui montre en particulier que le critère (11) est vérifié.

Pour montrer que $\tilde{\rho}$ satisfait encore (14), il faut montrer que le changement de variable utilisé dans (13) peut également l'être dans (15) en remplaçant les "caractéristiques libres"

$$v \to \xi = x - vt$$

par les "caractéristiques réelles"

$$v \to \xi = X(0,t,x,v) \tag{16}$$

(x, et t sont ici des paramètres fixés). Plus précisément, on doit prouver que (16) est un difféomorphisme global , dont le Jacobien vérifie :

$$J(x,v,t) = \frac{\partial \xi}{\partial v}(x,v,t) \geqslant \frac{t^3}{2} \quad . \tag{17}$$

En effet, grâce à (17), on peut mener le calcul (13) de manière identique pour $\tilde{\rho}$.

La preuve de (17) est extrêmement technique et est omise ; La preuve que (16) est un difféomorphisme global s'effectue grâce à un argument de type "degré topologique" .

IV. EXTENSION A DES MODELES PHYSIQUES PLUS COMPLETS.

1. Vlasov-Maxwell. Ce modèle décrit un plasma dont les particules interagissent par l'intermédiaire de la force de Lorentz $(E + v \times B)$. Le système s'écrit [K.T.] :

$$\begin{cases} \partial_t f + v.\nabla_x f + (E + v \times B).\nabla_v f = 0 \\ \partial_t E - \nabla\times B = - J \ ; \ \partial_t B + \nabla\times E = 0 \ ; \quad \nabla.B = 0 \ ; \ \nabla.E = \rho \\ \rho = \int f \, dv \ ; \ J = \int v \, f \, dv \end{cases}$$

Cette équation existe également dans une version relativiste, où v désigne alors l'impulsion relativiste, liée à la vitesse $\hat{v}$ par :

$$v = \hat{v}/\sqrt{1-\hat{v}^2} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{v} = v/\sqrt{1+v^2}$$

et s'écrit [VK.F.]

$$\partial_t f + \hat{v}(v) \ \nabla_x f + (E + \hat{v}(v) \ \times B)\nabla_v f = 0$$

(couplée bien entendu, aux équations de Maxwell).

Aucun théorème d'existence faible n'est disponible pour ces équations (en raison du caractère hyperbolique du système de Maxwell). Divers théorèmes d'existence locale ont été prouvés [Wo-2] , [De-2][As]. Un critère d'existence globale analogue au théorème 2 est néanmoins disponible [G.S], prouvant que le contrôle du nombre de particules atteignant des vitesses élevées est, là encore, nécessaire.

2. Vlasov-Fokker-Planck. Pour prendre en compte le phénomène de collisions entre particules, on introduit un opérateur de collision, qui, dans le cas de plasmas fortement ionisés, prend la forme d'un opérateur de diffusion

(opérateur de Fokker-Planck). On considère donc l'équation

(18) $$\partial_t f + v.\nabla_x f - \nabla_x \phi \, \nabla_v f = \Delta_v f + \nabla_v (vf) \ .$$

couplée à l'équation de Poisson (2).

On peut montrer que, pour ce modèle, les théorèmes 2 et 3 restent vrais (voir [N.P.T] pour une démonstration utilisant la généralisation "probabiliste" de la notion de caractéristique, associé à (18) ou [De-1], pour une démonstration purement analytique).

3. Vlasov-Nucléaire. Cette équation est utilisée pour modéliser la matière nucléaire (voir [Be] ou [Ne]). Elle s'écrit

(19) $$\partial_t f + v\nabla_x f + P_{\phi,\hbar}(f) = 0$$

où $P_{\phi,\hbar}$ est un opérateur, dépendant du potentiel ϕ , et de la constante de Planck $\hbar$, donné par :

$$P_{\phi,\hbar}(f) = \frac{i}{2\pi\hbar^2} \iint e^{i(v-v')y/\hbar} \, (\phi(x-y/2)-\phi(x+y/2)f(x,v',t)dv'dy$$

De plus, ϕ n'est plus nécessairement solution de l'équation de Poisson, mais d'équations plus complexes, faisant intervenir des modèles (empiriques) d'interaction nucléon-nucléon. [Ne].

Dans la limite quasi classique $\hbar \to 0$, on obtient $P_{\phi,\hbar}(f) \to -\nabla_x \phi \nabla_v f$. montrant que (19) est une perturbation de l'équation de Vlasov.

Enfin il est possible de relier (19) à l'équation de Schrödinger pour une fonction (matrice densité) $\psi(x,t)$ solution de :

$$\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} - i(\frac{\hbar^2}{2} \Delta\psi - \phi\psi) = 0$$

grâce à la transformation de Wigner :

$$f(x,v,t) = \int \psi(x+y/2)\psi^*(x-y/2)e^{-ivy/\hbar} \, dy/2\pi\hbar$$

Aucun résultat mathématiquement rigoureux n'est à notre connaissance, disponible, concernant l'équation (19).

V. CONCLUSION.

L'investigation mathématique du modèle de Vlasov-Poisson (et bien plus encore celle des modèles plus complexes) est loin d'être complète. La question de la régularité des solutions n'est d'ailleurs pas le seul problème susceptible d'intéresser le mathématicien. L'existence de solutions stationnaires, leur stabilité, le comportement asymptotique, ou encore la dérivation de solutions explicites offrent d'intéressants problèmes ouverts. (voir en particulier [Ba-2] pour une revue complète et récente sur toutes ces questions).

BIBLIOGRAPHIE :

[Ar] A.A. Arsenev : USSR comp. math and math phys. 15, (75), 131-143.

[As] K. Asano : Preprint, Yosida college, Kyoto university (Japan).

[Ba.1] J. Batt: J. Diff. equ. 25, 3, (77), 342-364.

[Ba.2] J. Batt: Comptes rendus des "Journées d'analyse non linéaire, applications à la mécanique",(Lille 83).

[B.D] C. Bardos - P. Degond : Ann. Inst. H. Poincaré, (Anal. non linéaire) 2,2, (85), 101-118.

[B.K.M.] R. Beale - T. Kato - A. Majda : Preprint, university of Berkeley (USA).

[Be] G.F. Bertsch : Les Houches Lectures 77, North-Holland (78).

[De.1] P. Degond : Preprint 126. (CMAP, Ecole Polytechnique) à paraître dans les annales de l'E.N.S.

[De.2] P. Degond : Preprint 117 (CMAP. Ecole Polytechnique) à paraître dans math. meth. in the appl. sci.

[G.S.] R. Glassey - Strauss : Preprint.

[Ho] E. Horst : Math. meth. in the appl. sci. 3 (81), 229-248 et 4, (82), 19-32.

[H.H] E. Horst, R. Hunze : Math. meth. in the appl. sci. 6 (84), 262-279.

[I.N] R. Illner - H. Neunzert : Math. meth. in the appl. sci. 1,(79), 530-554.

[Kl] S. Klainerman : Arch. Rat. Mech. Anal. 78, (82) 73-98.

[K.P.] S. Klainerman - G. Ponce : Comm. pure. Appl. Math., 36, 1, (83), 133-141

[K.T.] N.A. Krall - A.W. Trievelpiece : "Principles of plasma physics" . Mc. Graw-Hill. New-York 73 .

[VK.F.] N.G. Van Kampen - B.V. Felderhof : "Theoretical methods in plasma physics" - North-Holland, Amsterdam (67).

[Ne] H. Neunzert : Preprint 83 ; Kaiserslantern (Germany) ; à paraître dans Il nuovo cimento A .

[N.P.T] H. Neunzert - M. Pulvirenti - L. Triolo : Math. meth in the appl. Sci., 6 , (84), 527-538.

[Sh] J. Shatah : preprint

[U.O.] S. Ukai - T. Okabe : Osaka J. of Math. 15 (78) 245-261.

[Wo.1] S. Wollman : Comm. pure Appl. Math. 33, (80), 173-197.

[Wo.2] S. Wollman : Comm. pure Appl. Math. 37, (84), 457-462.

* * *