

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

A. BAHRI

J. M. CORON

Vers une théorie des points critiques à l'infini

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1984-1985), exp. n° 8,
p. 1-23

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1984-1985____A8_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1984-1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E B O N Y - S J Ö S T R A N D - M E Y E R 1 9 8 4 - 1 9 8 5

VERS UNE THEORIE DES POINTS CRITIQUES A L'INFINI

par A. BAHRI - J.M. CORON

1 . INTRODUCTION

Les résultats qui suivent sont centrés autour de la question suivante : peut-on dans des problèmes variationnels non compacts se passer de la condition de Palais-Smale pour déduire l'existence de "vrais" points critiques pour la fonctionnelle considérée.

Le problème est donc d'ordre général : on se donne sur un espace de Hilbert E (ou sur une variété hilbertienne) une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, qu'on suppose C^2 (par souci de simplicité).

L'objectif est de trouver des solutions dans E à l'équation :

$$(1) \quad \begin{cases} \partial f(x) = 0 \\ x \in E \end{cases} \quad \text{où } \partial f \text{ est le gradient de } f .$$

La théorie variationnelle classique fournit un principe simple pour déceler et éventuellement compter le nombre de solutions de (1), moyennant une condition de compacité sur le flot du gradient :

Soit pour a et $b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, $f^a = \{x \in E / f(x) \leq a\}$; $f^b = \{x \in E / f(x) \leq b\}$ et $f_a = \{x \in E / f(x) \geq a\}$; $f_b = \{x \in E / f(x) \geq b\}$.

La proposition et les corollaires qui la suivent décrivent le principe variationnel sous sa forme la plus élémentaire (mais la plus cruciale).

Proposition 1 : (voir [1] par exemple) Si f satisfait la condition de Palais-Smale sur $f^{-1}([a,b])$ et si (1) n'a pas de solution dans $f^{-1}([a,b])$, alors f^a est rétract par déformation de f^b (resp. f_b est rétract par déformation de f_a).

Corollaire 1 : Sous les hypothèses de la Proposition 1, l'homotopie et l'homologie de f^a (resp. f_a) et f^b (resp. f_b) sont identiques.

Corollaire 2 : Sous les hypothèses de la Proposition 1, si f^a (resp. f_a) et f^b (resp. f_b) n'ont pas mêmes groupes d'homotopie (ou d'homologie), (1) admet au moins une solution x_0 telle que $f(x_0) \in [a,b]$.

Il existe bien sûr bien des raffinements à ces résultats ; on peut en particulier calculer les changements de topologie induits par les solutions de (1) sous des hypothèses supplémentaires minimales sur f .

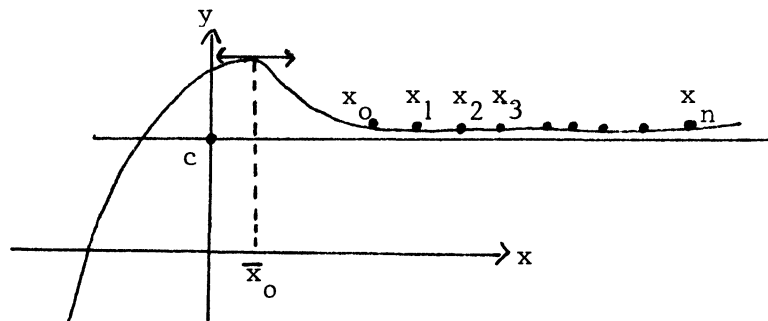
Cependant, il y a une hypothèse clé dans ces énoncés qui consiste en la condition de compacité de Palais-Smale.

Rappelons cette condition :

Défl : Une fonctionnelle $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, C^2 (par exemple), est dite satisfaire la condition de Palais-Smale sur $f^{-1}([a,b])$ si toute suite (x_n) telle que $a \leq f(x_n) \leq b$ et $\partial f(x_n) \rightarrow 0$ est précompacte. On dit en général que (P.S) (ou la condition (P.S)) est satisfaite par f (sur $f^{-1}([a,b])$).

En pratique, les exemples de fonctionnelles violant la condition de Palais-Smale abondent. Les deux exemples qui suivent, sur les fonctions réelles d'une variable réelle, sont déjà intéressants.

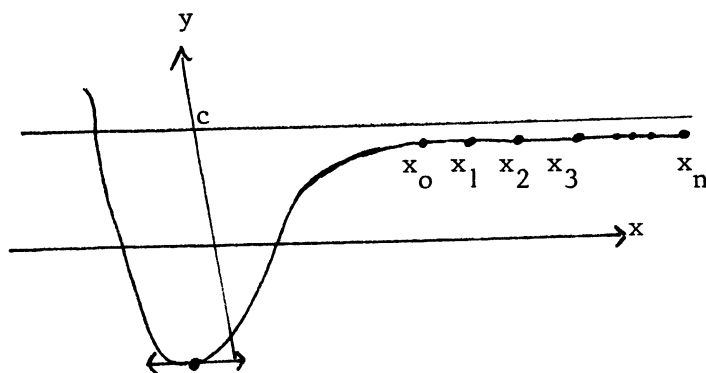
Exemple 1 :



On voit sur le graphe de f qu'il y a une suite (x_n) ("un point critique à l'infini") telle que $\partial f(x_n) \rightarrow 0$ et $f(x_n) \rightarrow c$ et qui n'est pas précompacte puisque x_n tend vers $+\infty$. On peut vérifier ainsi que pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, $f^{c+\varepsilon}$ est non connexe tandis que $f^{c-\varepsilon}$ est connexe ; de sorte que ce point critique à l'infini induit un changement de topologie dans les ensembles de niveau de f . Pour finir, on peut remarquer que si on cherche à trouver par un raisonnement global (i.e. en ne regardant pas la forme particulière qu'a f ici) le vrai point critique $\bar{x}_0$, il faut tenir compte de ce point critique à l'infini qui joue le rôle d'un minimum.

L'exemple suivant consiste tout simplement à considérer la fonction $\tilde{f} = -f + K$ où f est la fonction de l'exemple 1 et K une constante sans importance.

Exemple 2 :



Evidemment, la condition de Palais-Smale est encore violée dans un voisinage de la valeur $\tilde{c}$.

Mais cette fois-ci, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, $\tilde{f}^{\tilde{c}+\varepsilon}$ est contractile ainsi que $\tilde{f}^{\tilde{c}-\varepsilon}$. De sorte que du point de vue des ensembles de niveau "descendants" ($\tilde{f}^{\tilde{c}+\varepsilon}$ et $\tilde{f}^{\tilde{c}-\varepsilon}$), aucun accident ne s'est produit.

Si on considère, par contre, $\tilde{f}_{c+\varepsilon}$ et $\tilde{f}_{c-\varepsilon}$, on retombe sur le changement de topologie de l'exemple 1.

Du point de vue de la théorie variationnelle classique, de dimension finie en tout cas, ce fait est tout à fait surprenant : un point critique non dégénéré (et même dégénéré sous certaines hypothèses) induit, en dimension finie, des changements de topologie pour les ensembles de niveau "ascendants" et "descendants". Or, comme le montrent les exemples 1 et 2, ce n'est pas le cas d'un point critique à l'infini. On découvre ainsi un premier fait intéressant. Ces points critiques à l'infini peuvent n'être que des "demi-points critiques", attirant d'un côté (par "en haut" par exemple) et pas de l'autre.

Tout ceci sera rendu plus précis par la suite.

On peut, en restant en dimension 1, fabriquer des exemples encore plus élaborés en faisant osciller la fonction f (avec des oscillations plus ou moins grandes) autour d'une valeur c donnée ; et les situations obtenues sont déjà non triviales. De cette manière, on entrevoit qu'avec l'abandon de la condition (P.S), la théorie variationnelle classique "tombe". Il faut revenir aux éléments de base de cette théorie, à la déformation le long des flots et l'analyse des changements de topologie qu'ils induisent même quand ils conduisent à l'infini, si l'on veut quand même prouver des résultats d'existence.

Par souci de clarté, nous précisons que nous appelons ici "infini" tout ce qui n'est pas précompact, même s'il est borné.

2 . EXEMPLES DE PROBLEMES VARIATIONNELS NON COMPACTS ISSUS DE LA GEOMETRIE ET DE LA PHYSIQUE :

La classe des problèmes variationnels non compacts est très large. On peut y retrouver des problèmes géométriques, comme le problème de Yamabe ou celui de Kazdan-Warner, la recherche d'applications harmoniques d'un degré donné, les équations de Yang-Mills, l'équation des ondes non linéaire sous des conditions aux limites non rationnellement dépendantes ou encore des problèmes liés à la recherche d'orbites périodiques pour des champs de contact sur une variété de contact.

La non-compacité est d'ailleurs différente dans chacun des cas considérés. La méthode que nous présentons ici a toutes les chances de s'appliquer aux cas cités ci-dessus, si l'on excepte l'équation des ondes non linéaires sans dépendance rationnelle sur le domaine, cas où la non-compacité est liée au problème des petits diviseurs. Dans le même ordre de difficulté, il y a les équations elliptiques non linéaires avec le comportement sur-critique (comme, par exemple, l'équation $\Delta u + u^7 = 0$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$). Nous développons ici, par souci de précision, la non-compacité dans les seuls cas de l'équation de Yamabe et du problème de Kazdan-Warner ; et nous présentons aussi, les problèmes de non-compacité dans la recherche d'orbites périodiques pour des champs de contact. Les autres cas relevant de la même méthode seront présentés ailleurs.

a - La non-compacité dans l'équation de Yamabe et le problème de Kazdan-Warner :

On se limite à présenter la non-compacité de ces équations par des ouverts Ω de S^3 , le cas $\Omega = S^3$ étant inclus (pour les généralisations, se reporter à [2]).

Soient $S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 / |x| = 1\}$, c la métrique canonique sur S^3 et Ω un ouvert régulier de S^3 (éventuellement $\Omega = S^3$). Soit K une fonction positive, de classe C^2 sur $\overline{\Omega}$.

On cherche u de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$(2) \quad \begin{cases} -8\Delta u + 6u = K(x)u^5 \\ u > 0 \text{ dans } \Omega \\ \text{avec (si } \Omega \neq S^3) \text{ } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Quand Ω est différent de S^3 , on supposera (parce que c'est le cas le plus difficile !) que K est une constante. Si $\Omega = S^3$, le problème (2) a l'inter-

prétation géométrique suivante : existe-t-il une métrique g sur S^3 , conforme à c , telle que la courbure scalaire de (S^3, g) soit K (on cherche g sous la forme $g = u^{\frac{4}{n-2}}c$) ? La même équation existe pour une variété riemannienne compacte (M, g_0) quelconque ; si K est une constante, il s'agit de l'équation de Yamabe ; sinon, il s'agit du problème de Kazdan-Warner.

Signalons tout de suite que l'équation de Yamabe a été résolue par T. Aubin ([3]) pour les variétés non localement euclidiennes de dimension $n \geq 6$, les cas restants ayant été prouvés récemment par R. Schoen ([4]). Dans les deux cas, la technique consiste à prouver que la solution est un minimum et qu'au voisinage de ce minimum, la condition de Palais-Smale est satisfaite par la fonctionnelle considérée.

La démonstration de R. Schoen nécessite une analyse fine que nous retrouverons au long de notre analyse de la non-compacité. Remarquons, cependant, que la méthode que nous présentons ici couvre aussi les cas de non-compacité réelle (i.e. la condition de Palais-Smale est violée même au voisinage du minimum) comme dans le problème de Kazdan-Warner.

En ce qui concerne l'équation plus générale de Kazdan-Warner, des obstructions sont connues, dues à Kazdan-Warner ([5]) et à Bourguignon-Ezin ([6]). Ces obstructions ont permis d'établir des contre-exemples (voir [6]) qui violent précisément la condition suffisante que nous donnons pour l'existence d'une solution à (2). On suppose ici que la fonction K est strictement positive. Revenons à la formulation variationnelle du problème (2) :

Soit $I(u) = \frac{1}{(\int_{\Omega} K(x) u^6 dv)^{1/2}}$, où $u \in H^1_0(\Omega)$, si $\Omega \neq S^3$, $u \in H^1(\Omega)$ sinon

$$(\|u\|_{\Omega}^2 = \int_{\Omega} (8|\nabla u|^2 + 6u^2) dv) .$$

On va considérer la fonctionnelle $I(u)$ sur l'ensemble $\Sigma = \{u \in H^1_0(\Omega) \mid \|u\|_{\Omega} = 1\}$. Il est facile de voir que $\inf_{\Sigma} I$ n'est pas atteint si $\Omega = S^3$ et K n'est pas constante ou si $\Omega \neq S^3$. De plus, un point critique de I sur Σ , qui est de plus une fonction positive sur Ω , donne une solution de (2).

Soit d la distance géodésique sur (S^3, c) et soit pour $a \in S^3$ et $\lambda > 0$, $\delta(a, \lambda)$ la fonction sur S^3 :

$$\delta(a, \lambda)(x) = C \left\{ \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1 - (\lambda^2 - 1) \cos d(a, x)} \right\}^{1/2} \quad (3)$$

C étant choisie pour que $\|\delta(a, \lambda)\|_{\Omega} = 1$ (C est indépendante de λ et a).

Soit $\Sigma^+ = \{u \in \Sigma \mid u \geq 0 \text{ sur } \Omega\}$ (4)

Pour $\varepsilon > 0$ et $p \in \mathbb{N}$, on introduit :

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} V(p, \varepsilon) = \{u \in \Sigma^+ \mid \exists a_1, \dots, a_i, \dots, a_p \in \Omega, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_p \in]0, +\infty[\\ \text{tels que } \|u - \frac{1}{\sqrt{S}} \sum_{i=1}^p \frac{1}{K(a_i)^{1/4}} \delta(a_i, \lambda_i)\|_{\Omega} \leq \varepsilon \text{ avec } S = \sum_{i=1}^p \frac{1}{\sqrt{K(a_i)}} \text{ et} \\ \lambda_i \geq \frac{1}{\varepsilon} ; \frac{\lambda_i}{\lambda_j} + \frac{\lambda_j}{\lambda_i} + d(a_i, a_j)^2 \lambda_i \lambda_j \geq \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall i \neq j ; \text{ si } \partial\Omega \neq \emptyset, d(a_i, \partial\Omega) \lambda_i \geq \frac{1}{\varepsilon} \} \end{array} \right.$$

L'ensemble $V(p, \varepsilon)$ décrit par (5) a une interprétation simple :

c'est un voisinage des points critiques à l'infini de la fonctionnelle

I sur Σ^+ ; c'est à dire que toute suite $u_n \in \Sigma^+$, telle que $I(u_n)$ reste borné et $\partial I(u_n) \rightarrow 0$, doit rester dans un $V(p, \varepsilon)$ (avec ε aussi petit que l'on veut et p borné supérieurement) pour n assez grand. Les conditions sur

les λ_i ($\lambda_i \geq \frac{1}{\varepsilon}$), nous disent que la fonction u , quand ε tend vers zéro, se rapproche de plus en plus (en norme H^1) de fonctions $\frac{1}{\sqrt{S}} \sum_{i=1}^p \frac{1}{K(a_i)^{1/4}} \delta(a_i, \lambda_i) =$

qui justement ont "tendance à quitter l'espace H^1 ".

Cette tendance se manifeste par le fait que $|\nabla w|^2$ et w^6 tendent vers des sommes de masses de Dirac concentrées au voisinage des points a_i (qui peuvent éventuellement bouger aussi) quand les concentrations λ_i tendent vers $+\infty$ (ou quand ε tend vers zéro).

Les autres conditions sur les λ_i nous disent que deux points de concentration a_i et a_j distincts ne peuvent être très près sans que les concentrations soient très différentes (de manière à éviter des phénomènes d'interaction exclus par le fait que $\partial I(u_n) \rightarrow 0$) ; la condition $d(a_i, \partial\Omega) \lambda_i \geq \frac{1}{\varepsilon}$ nous dit qu'un point de concentration doit se situer dans Ω (relativement à λ_i) de sorte que l'énergie portée par $\delta(a_i, \lambda_i)$ ne parte pas hors de l'ouvert.

Ainsi, l'introduction de $V(p, \varepsilon)$ est (d'une certaine manière) naturelle et on a la

Proposition 1 : Soit (u_n) une suite de Σ^+ telle que $\partial I(u_n) \rightarrow 0$, $(I(u_n))_n$ étant bornée et $u_n \rightarrow 0$ dans $H^1_0(\Omega)$ (faiblement).

Alors, quitte à extraire une sous-suite, il existe un entier p et une suite $(\varepsilon_n)_n$ avec $\varepsilon_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ tels que $u_n \in V(p, \varepsilon_n) \quad \forall n$.

Remarque 1 : Si $\partial I(u_n) \rightarrow 0$ et $(I(u_n))$ est borné, alors (u_n) est une suite bornée H_0^1 . De sorte qu'elle a une limite faible $\bar{u}$ qui satisfait (2). On suppose ici que $\bar{u} = 0$ puisque justement on cherche des solutions non nulles de (2). Sinon, la proposition 1 reste valable avec $u_n - \bar{u} \in V(p, \varepsilon_n) \forall n$.

La proposition 1 appelle quelques commentaires : d'une certaine manière, elle est cruciale, mais tout à fait insuffisante.

Elle a ceci de crucial qu'elle fournit un renseignement précis sur le défaut de compacité. La tendance à quitter l'espace H^1 manifestée par la suite (u_n) est précise ; ce qui est heureux, puisqu'on peut imaginer des cas où ces "tendances" seraient bien plus anarchiques.

De ce point de vue, il faut souligner l'importance du travail effectué par Sacks et Uhlenbeck ([7]) puis par P.L. Lions ([8]), M. Struwe ([9]), C.H. Taubes ([10]), H. Brézis et J.M. Coron ([11]), qui a permis de bien dégager cette tendance.

Mais, par ailleurs, cette proposition est tout à fait insuffisante du point de vue variationnel. Elle laisse complètement ouvertes les questions suivantes : est-ce que ces suites (u_n) changent la topologie des ensembles de niveau de I ? est-ce qu'il n'y aurait pas de suites (u_n) "plus critiques que d'autres" (i.e. changeant la topologie alors que d'autres ne le feraient pas) ? Quels sont les changements de topologie induits s'il y en a ? Peut-on calculer le défaut de compacité et l'utiliser comme élément positif pour prouver l'existence de vraies solutions ?

C'est à cet ensemble de questions que nous tenterons de répondre.

b - La non-compacité en géométrie de contact :

Le cadre géométrique du problème est le suivant : on se donne une variété compacte orientable M de dimension impaire $2n+1$ et on considère une 1-forme α sur M qui est une forme de contact (i.e. $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ est une forme volume sur M). A la forme α est naturellement associé un champ de vecteurs ξ sur M appelé champ de Reeb de α et défini par les équations :

$$(6) \quad \alpha(\xi) = 1 ; d\alpha(\xi, \cdot) = 0$$

Les exemples les plus simples de tels champs sont fournis par les champs de vecteurs Hamiltoniens induits par la forme $\sum_{i=1}^n (p_i dq_i - q_i dp_i)$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ sur une hypersurface convexe ou étoilée Σ de $\mathbb{R}^{2n}$ (i.e. une hypersurface bordant un ouvert convexe ou étoilé). Comme le montre A. Weinstein ([12]),

l'hypothèse "étoilée" sur l'hypersurface Σ équivaut au fait que la 1-forme induite sur l'espace tangent à Σ par $\sum_{i=1}^n (p_i dq_i - q_i dp_i)$ est une forme de contact. Son champ de Reeb n'est autre qu'une normalisation du champ Hamiltonien classique.

Paul Rabinowitz ([13]) a prouvé que le champ Hamiltonien d'une hypersurface compacte étoilée admet une orbite périodique. Sa méthode de démonstration est entièrement nouvelle par rapport aux travaux précédents. Travaillant directement sur l'intégrale d'action du système définie sur l'espace des courbes $H^{1/2}(S^1, \mathbb{R}^{2n})$, il relaxe la condition sur les courbes d'être tracées sur Σ en leur imposant seulement d'être "en moyenne" sur Σ . Pour gagner de la compacité, il effectue une réduction en dimension finie en utilisant la décomposition spectrale de l'opérateur $\int \dot{z}$ et exploite pour finir l'invariance de l'intégrale d'action par les translations en temps. Il trouve ainsi (via l'espace des courbes) que si Σ est étoilée, le champ Hamiltonien admet une orbite périodique.

Le travail de Paul Rabinowitz a ceci de remarquable qu'au lieu d'essayer de gagner de la compacité, il va en sens inverse, relaxant le maximum de conditions, travaillant sur des espaces de courbes très peu régulières, mais exploitant au maximum par contre la représentation spectrale du linéarisé du flot dérivant de l'intégrale d'action.

A la suite des résultats de Paul Rabinowitz, A. Weinstein ([12]) mettait en valeur le caractère géométrique (induction d'une forme de contact sur Σ) de l'hypothèse "étoilée" sur Σ et conjecturait l'existence d'une orbite périodique pour tout champ de Reeb sur une variété de contact compacte (M, α) . Le saut entre la conjecture et le résultat de Paul Rabinowitz est considérable, puisque dans le cas de $\mathbb{R}^{2n}$ on connaît bien la représentation spectrale du linéarisé du flot, qui est transportée sur elle-même le long des lignes de flot. Pour une variété de contact générale (M, α) on ne dispose pas d'un tel outil, en l'état actuel des connaissances, qui, de toute manière, ne serait disponible d'une manière naturelle que sur une symplectisée de M . Il est d'ailleurs clair que l'équation de transport de la représentation spectrale du linéarisé du flot associé au problème variationnel sur l'espace des chemins d'une variété symplectique est bien plus compliquée (et non linéaire) que le cas de $\mathbb{R}^{2n}$. Une situation "moyenne" est celle des hypersurfaces dans le cotangent d'une variété N (avec la structure standard du cotangent), l'hypothèse naturelle sur ces hypersurfaces étant qu'elles soient étoilées dans la direction des fibres. Mais on ne connaît pas encore de résultat de ce

genre, les seuls résultats disponibles étant obtenus sous une hypothèse de convexité et de symétrie dans la direction des fibres par des méthodes qui s'apparentent à la recherche des géodésiques ("brake orbits" en l'occurrence, Gluck et Ziller ([14])).

En l'absence d'outils permettant de reconduire la méthode de Paul Rabinowitz, le point de vue présenté ici consiste à analyser le défaut de compacité d'un certain problème variationnel sur une sous-variété des courbes fermées H^1 traçées sur M (l'espace $H^{1/2}$ n'est pas, a priori, bien défini, sur une variété M). Ce défaut de compacité révèle des structures géométriques intéressantes et, sans prétendre obtenir la conjecture, on dégage des outils qui peuvent contribuer à sa résolution. (*)

On suppose M de dimension 3, compacte orientable et on se donne une forme de contact α sur M . On suppose par exemple que $\alpha \wedge d\alpha > 0$.

La fonctionnelle naturelle à considérer est l'intégrale d'action :

$$(7) \quad \int_0^1 \alpha_x(\dot{x}) dt = I(x)$$

sur un espace de courbes fermées sur M suffisamment régulières.

On ne dispose pas, a priori, de l'espace $H^{1/2}(S^1, M)$. On va donc considérer I sur l'espace $H^1(S^1, M)$. I est une fonctionnelle indéfinie sur cet espace. Mais ses points critiques sont bien des orbites de ξ (à un reparamétrage près) non orientées (i.e. $\alpha(\dot{x})$ peut changer de signe), de sorte que l'on se trouve confronté à un premier problème, sans importance réelle : distinguer les orbites périodiques des "aller et retour" selon ξ .

Si z est une variation de x dans $H^1(S^1, M)$, le gradient ∂I appliqué à z est :

$$(8) \quad \partial I(x).z = \int_0^1 d\alpha_x(\dot{x}, z) dt$$

On peut se rendre compte en écrivant cette expression en coordonnées locales par exemple que ∂I n'a pas une structure Fredholm ; ce qui constitue un très sérieux problème puisque, sans structure Fredholm, il n'y a pas, a priori, de théorie variationnelle possible. On peut quand même calculer le Hessien de I en un de ses points critiques. On s'aperçoit alors que l'indice

(*) le cadre variationnel d'étude de ce problème a été mis au point par A. Bahri et D. Bennequin ; l'analyse du défaut de compacité a fait l'objet d'une note aux Comptes Rendus de A. Bahri ([15]).

de Morse (qui ici n'a déjà plus de sens topologique puisque le gradient n'est pas Fredholm) est infini. On ne peut donc pas voir de différence de topologie induite par le point critique sur les ensembles de niveau de I , une fois de plus a priori (en effet, ayant perdu le caractère Fredholm, on perd du même coup toute la théorie variationnelle. En particulier, on ne sait plus qu'un point critique d'indice infini n'induit pas de changement de topologie.) Cette situation rend une réduction en dimension finie sans intérêt. Dans les bons cas, cette réduction est intéressante parce que, le gradient étant Fredholm, les phénomènes critiques se voient bien en dimension finie. Au demeurant, on ne voit pas non plus, comment réaliser une telle réduction d'une manière compatible avec l'invariance de I sous l'action de S^1 (ce que P. Rabinowitz réalisait avec la représentation spectrale de l'opérateur $\mathcal{J}$).

Ayant fait ces remarques, on entrevoit deux possibilités : la première, comme nous l'avons déjà signalé, consiste à comprendre le linéarisé (on fixe une métrique sur M) du flot dans l'espace des chemins et le transport de sa représentation spectrale le long des lignes de ce flot ; les équations deviennent rapidement compliquées... la deuxième consiste à abandonner la méthode de Paul Rabinowitz et, au contraire, à essayer d'imposer des contraintes sur le système, en travaillant sur une sous-variété de l'espace $H^1(S^1, M)$ pour tenter de compactifier le problème variationnel ou tout au moins de déceler des changements de topologie dans les ensembles de niveau de I . Pour celà, on fait une hypothèse supplémentaire sur (M, α) : on suppose qu'il existe un champ de vecteurs v sur M , dans le noyau de α , partout non singulier ; ce qui veut dire que le fibré en α au dessus de M est trivialisable.

On peut alors introduire la forme différentielle sur M :

$$(9) \quad \beta = d\alpha(v, \cdot)$$

On suppose, par souci de simplicité (les résultats s'étendent aux autres cas) que :

$$(10) \quad \beta \wedge d\beta > 0$$

i.e. β induit aussi une forme de contact sur M , transverse à α .

On peut, toujours, par homogénéité, normaliser alors v pour avoir :

$$(11) \quad \beta \wedge d\beta = \alpha \wedge d\alpha.$$

L'hypothèse (10) a une signification intéressante dans la formation Hamiltonienne de $\mathbb{R}^4$:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } \alpha_o = \sum_{i=1}^2 (x_i dy_i - y_i dx_i) \text{ la structure standard de } S^3 \subset \mathbb{R}^4. \text{ Soit} \\ v \text{ un champ dans le noyau de } \alpha_o \text{ définissant une des fibrations de} \\ \text{Hopf de } S^3. \text{ Soit } \alpha = \lambda \alpha_o ; \lambda \in C^2(S^3, \mathbb{R}_*^+) \text{ et } \beta = d\alpha(v, \cdot) \end{array} \right.$$

Proposition 2 : Si l'hypersurface $\Sigma = \{\lambda(x)x ; x \in S^3\}$ borde un ouvert convexe, $\beta \wedge d\beta$ est positif.

Dans le cadre général d'une forme β de T^*M , on peut introduire l'espace des courbes de M suivant :

$$(13) \quad L_\beta = \{x \in H^1(S^1, M) ; \beta(\dot{x}) \equiv 0\}$$

et aussi, si β est défini par (9) :

$$(14) \quad C_\beta = \{x \in H^1(S^1, M) ; \beta(\dot{x}) \equiv 0 \text{ et } \alpha_x(\dot{x}) = C^{\text{ste}} > 0\}$$

Si β satisfait (10), L_β et C_β sont des sous-variétés de $H^1(S^1, M)$. Si $\beta = d\alpha(v, \cdot)$, ces sous-variétés contiennent les orbites périodiques de ξ puisque $d\alpha(v, \xi) = 0$ et $\alpha(\xi) = 1 > 0$.

On peut considérer la fonctionnelle I sur L_β ou sur C_β . Ses points critiques sont bien les orbites de ξ . Mais son gradient n'a toujours pas de structure Fredholm. Pourtant, en examinant les ensembles de niveau de I sur C_β , dans le cadre donné par (12), on a :

Proposition 3 : C_β est connexe (en fait C_β a la topologie de $H^1(S^1, S^3)$) tandis que $I^\varepsilon = \{x \in C_\beta \mid I(x) < \varepsilon\}$ a une infinité de composantes connexes pour $\varepsilon > 0$ assez petit.

Donc la fonctionnelle I induit des changements de topologie sur C_β . On peut entrevoir que ces changements de topologie ne sont pas uniquement dûs aux orbites de ξ , qui sont pourtant les seules points critiques de I sur C_β : en effet, dans certains cas, ceux-ci sont en nombre fini à itération près (on parcourt 2 fois, 3 fois etc la même orbite). L'indice de Morse des itérés tend vers $+\infty$. Donc un nombre fini d'entre eux sont d'indice 1. Ils ne peuvent donc pas induire une infinité de composantes connexes dans I^ε . (précisons qu'on peut adapter la théorie variationnelle classique au voisinage

de ces points critiques sur C_β même si le gradient n'est pas Fredholm). Il y a donc un défaut de compacité qu'il faut analyser.

Mais un premier calcul montre qu'on ne peut pas tirer grand chose de l'analyse des suites (x_n) , $x_n \in C_\beta$, telles que :

$$(15) \quad \partial I(x_n) \rightarrow 0 \quad (I(x_n))_n \text{ borné}$$

On n'arrive donc pas, contrairement à la situation pour l'équation de Yamabe et le problème de Kazdan-Warner, à analyser les "tendances à quitter l'espace" ou encore comment la condition de Palais-Smale est violée.

Il nous faut construire un lemme de déformation "compactifiant" qui nous permette d'analyser le défaut de compacité (i.e. obtenir un analogue, dans ce cas, de la Proposition 1) puis de calculer les changements de topologie induits par l'infini.

3. LES RESULTATS :

3.1 L'équation de Yamabe :

La proposition suivante donne un paramétrage utile de l'ensemble $V(p, \varepsilon)$ défini en (5), qui est un voisinage des points critiques à l'infini de I d'ordre p .

Proposition 4 : Soit p un entier ; pour ε assez petit et u dans $V(p, \varepsilon)$, le problème :

$$\text{Minimiser} \quad \|u - \sum_{i=1}^p \alpha_i \delta(a_i, \lambda_i)\|_{S^3} \quad \text{avec } \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}^p$$

$$a_1, \dots, a_p \in \Omega^p, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_p \in]0, +\infty[^p \quad \text{a une solution unique} \quad \blacksquare$$

On note $a_i(u)$, $\lambda_i(u)$ et $\alpha_i(u)$ la solution du problème de minimisation.

Considérons d'abord le cas $\Omega \neq S^3$. Quitte à remplacer Ω par sa projection stéréographique sur $\mathbb{R}^3$, le problème (2) (avec $K(x) = C^{\text{ste}}$) est équivalent à la recherche de u tel que :

$$(16) \quad \begin{cases} -\Delta u = u^5 & \text{dans } \Omega \\ u > 0 & \text{dans } \Omega \text{ et } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où Ω est maintenant un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^3$.

On note maintenant :

$$(17) \quad \begin{cases} \|u\| = (\int |\nabla u|^2 dx)^{1/2} & \Sigma = \{u \in H_0^1 \mid \|u\| = 1\} \quad \Sigma^+ = \{u \in \Sigma \mid u \geq 0\} \\ I(u) = \frac{1}{(\int u^6 dx)^{1/2}} \text{ et } \delta(a, \lambda)(x) = C \left\{ \frac{1}{1+\lambda^2 |x-a|^2} \right\}^{1/2} \text{ avec } C \text{ tel que} \\ \|\delta(a, \lambda)\| = 1 \end{cases}$$

Pour $x \in \Omega$, on définit la fonction $y \rightarrow H(x, y)$ sur Ω par :

$$(18) \quad \begin{cases} \Delta_y H(x, y) = 0 \text{ dans } \Omega \\ H(x, y) = \frac{1}{|x-y|} \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Pour $a = (a_1, \dots, a_p) \in \Omega^p$, on définit la matrice $M(a) \in \bar{\mathbb{R}}^{p^2}$ par :

$$(19) \quad \begin{cases} M_{ij}(a) = H(a_i, a_j) - \frac{1}{|a_i - a_j|} ; M_{ij}(a) = -\infty \text{ si } i \neq j \text{ et } a_i = a_j \\ M_{ii}(a) = H(a_i, a_i) . \end{cases}$$

On note

$$(20) \quad \rho(a) : \text{la plus petite valeur propre de la matrice symétrique } M(a) \\ \rho(a) = -\infty \text{ si } a_i = a_j \text{ avec } i \neq j .$$

La matrice $M(a)$ est clairement liée à la fonction de Green du laplacien sur Ω ; elle a un équivalent sur une variété riemannienne quelconque avec ou sans bord.

Pour estimer les défauts de compacité induits par $V(p, \varepsilon)$ ($\varepsilon \rightarrow 0$), on suit une ligne de gradient dans Σ^+ :

$$(21) \quad \frac{du}{ds} = -I'(u) ; u(0) \in \Sigma^+$$

Soit
$$\omega(u) = \frac{1}{(\int u^6 dx)^{1/4}}$$

On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon(s) \rightarrow 0$ quand $s \rightarrow +\infty$ tels que $u(s) \in V(p, \varepsilon(s))$ pour s assez grand.

On note (voir Proposition 4) $\lambda_i(s) = \lambda_i(u(s))$; $a_i(s) = a_i(u(s))$; $\rho(s) = \rho(a(s))$

Définition 1 : On appelle points critiques à l'infini ces orbites du flot

qui restent dans un des $V(p, \epsilon(s))$ pour une certaine fonction ϵ ($\epsilon(s) \rightarrow 0$ quand $s \rightarrow +\infty$)

On a alors le :

Théorème 1 : On suppose que $\forall i \in [1, p]$, $\overline{\lim} d(a_i(s), \partial\Omega) > 0$.

On a alors $\overline{\lim}_{s \rightarrow +\infty} \rho(s) \geq 0$. Si $\overline{\lim}_{s \rightarrow +\infty} \rho(s) > 0$, alors, $\rho(s)$ et $a(s)$ convergent quand $s \rightarrow +\infty$ et $\lambda_i(s) \sim C_i s$; $C_i > 0$.

Le théorème suivant affine le théorème 1 en donnant au voisinage des points critiques à l'infini la dynamique du flot :

Théorème 2 : Pour tout $\delta > 0$, il existe $\epsilon_0 > 0$ et $s_0 > 0$ tels que, si $u(s) \in V(p, \epsilon_0)$ pour $0 \leq s \leq s_0$ et $\lambda(a_i(s), \partial\Omega) \geq \delta$ pour $0 \leq s \leq s_0$, alors pour tout $\bar{s} \geq s_0$ tel que $u(s)$ reste dans $V(p, \epsilon_0)$ pour $s \in [0, \bar{s}]$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i \sqrt{\lambda_i}}(s) = \frac{\bar{\omega}(u)}{2\lambda_i \alpha_i} \{ \omega(u)^4 \alpha_i^5 \frac{H(a_i, a_i)}{\sqrt{\lambda_i}} - \omega(u)^4 \left(\sum_{j \neq i} \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \left\{ \frac{\alpha_i^4 \alpha_j + \alpha_j^5}{|a_i - a_j|} - \alpha_j^5 H(a_i, a_j) \right\} \right) \right. \\ \quad \left. + \sum_{j=1} \frac{\alpha_j}{\sqrt{\lambda_j} |a_i - a_j|} \right\} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} o \left(\sum \frac{1}{\lambda_k} \right) \\ |\dot{a}_i(\bar{s})| \leq \frac{C}{\lambda_i} \left(\sum \frac{1}{\lambda_k} \right); \quad \bar{\alpha}, C \text{ et } \bar{C} \text{ sont des constantes} \\ \bar{\alpha}_i(\bar{s}) = -\bar{C} \omega(u) \alpha_i (1 - \alpha_i^4) \omega(u)^4 \int_{\mathbb{R}^3} \delta^6 + o \left(\sum \frac{1}{\lambda_k} \right) \\ \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v|^2 dx(\bar{s}) \leq K \sum \frac{1}{\lambda_i} \text{ où } v = u - \sum_{i=1}^p \alpha_i \delta(a_i, \lambda_i) \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

Des formules précédentes, on déduit la variété instable des points critiques à l'infini donnés par le théorème 1 en faisant varier les coefficients α_i autour de $\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{p}}$ sous la contrainte $\sum_{i=1}^p \alpha_i^2 = 1$. On obtient ainsi l'ensemble invariant du flot à l'infini.

Pour finir, le théorème 3 donne les changements de topologie induits par les points critiques à l'infini :

Soit

$$(22) \quad C_p = \{a_1, \dots, a_p\} \in \Omega \times \dots \times \Omega \mid M(a) \text{ soit } \geq 0 \}$$

$$(23) \quad \partial C_p = \{(a_1, \dots, a_p) \in \Omega \times \dots \times \Omega \mid M(a) \text{ soit } \geq 0 \text{ et } \rho(a) = 0\}$$

Le groupe symétrique σ_p opère librement sur C_p .

Soient ε_1 et $\varepsilon_2 > 0$, assez petits ; soit $I^{b_p + \varepsilon_1} = \{u \in \Sigma^+ \mid I(u) \leq b_p + \varepsilon_1\}$;
 $I^{b_p - \varepsilon_1} = \{u \in \Sigma^+ \mid I(u) \leq b_p - \varepsilon_1\}$ avec $b_p = \frac{p}{(\int_{\mathbb{R}^3} \delta^6 dx)^{1/2}}$.

Théorème 3 :

La paire $(V(p, \varepsilon_2) \cap I^{b_p + \varepsilon_1}, V(p, \varepsilon_2) \cap I^{b_p - \varepsilon_1})$ est homotopiquement équivalente à la paire $(C_p / \sigma_p, \partial C_p / \sigma_p)$.

Les théorèmes qui précèdent appellent quelques commentaires.

En ce qui concerne le théorème 1, le cas $\lim_{s \rightarrow +\infty} \rho(s) = 0$ nécessite une analyse

plus fine qu'on pourra trouver dans [2]. L'hypothèse $u \in \Sigma^+$ n'est pas nécessaire. Des théorèmes similaires aux théorèmes 1 et 2 existent même si u n'est plus une fonction positive. Les contenus de ces théorèmes sont essentiellement modifiés par le fait qu'il faut tenir compte d'autres solutions que les $\delta(a, \lambda)$, sur $\mathbb{R}^3$, de l'équation de Yamabe. Par ailleurs si $\Omega = S^3$ ou une variété riemannienne compacte plus général, on peut prouver des formules similaires à celles données par le théorème 2. En combinant ces résultats et ceux de Schoen et Yau ([16]), on voit que la condition de Palais-Smale est satisfaite le long des lignes de flot dans ce cas (alors qu'elle est violée pour les suites diagonales ; i.e. celles qui ne restent pas sur une même ligne de flot). Pour finir, la topologie de la paire $(C_p / \sigma_p, \partial C_p / \sigma_p)$ est étudiée plus complètement dans [2].

3.2 Le problème de Kazdan-Warner :

On rappelle que l'on cherche des conditions suffisantes sur K pour que l'équation :

$$(24) \quad \begin{cases} -8\Delta u + Ru = K(x)u^5 \\ u > 0 \end{cases}$$

admette une solution.

On fait les hypothèses suivantes :

K est une fonction positive, C^2 , ayant des points critiques $y_1, \dots, y_m$ sont dégénérés et tels que $\Delta K(y_i) \neq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$.

On a alors le :

Théorème 4. Soit k_i l'indice de Morse de K en y_i .

Si $\sum_{i/\Delta K(y_i) < 0} (-1)^{k_i} \neq -1$, (24) admet une solution.

Pour des variétés différentes de (S^3, c) , on pourra se reporter à ([14]).

Idée de la démonstration :

- Par rapport au théorème 2, on a maintenant $\dot{a}_i(s) = C_i \text{grad } K(a_i) + O(\frac{1}{\lambda_i})$ de sorte que les fonctions $\delta(a_i, \lambda_i)$ se concentrent aux points critiques de K .
- On montre que sur $V(p, \varepsilon_0)$, $p \geq 2$, $\varepsilon_0 > 0$, I satisfait (P.S) le long des lignes de flot. Il ne reste donc plus qu'à analyser la situation pour $p = 1$ et $a_i(s) \rightarrow y_i$, y_i étant un point critique de K .
- On montre que si $\Delta K(y_i) > 0$, alors (P.S) est satisfait le long des lignes de flot sur $V(1, \varepsilon_0) \cap \{u \mid |a_1(u) - y_i| < \varepsilon_1\}$, ε_1 assez petit.
- On est donc ramené à étudier la situation en y_i tel que $\Delta K(y_i) < 0$.

On ne peut plus se contenter alors de suivre les lignes de flot de $\text{grad } I$. Il faut construire un pseudo-gradient au voisinage de l'infini qui permet de voir qu'il y a un point critique à l'infini pour I d'indice de Morse égal au coindice de K en y_i .

- On conclut par un argument de caractéristique d'Euler-Poincaré.

3.3 La non-compacité en géométrie de contact :

On rappelle qu'on considère une variété de contact (M, α) , compacte, de dimension 3, orientée par $\alpha \wedge d\alpha$. On note ξ le champ de Reeb de α ; on se donne v non singulier dans le noyau de α ; on considère $\beta = d\alpha(v, \cdot)$ qu'on suppose de contact; on normalise v pour que $\beta \wedge d\beta = \alpha \wedge d\alpha$.

Soit θ_s le groupe à un paramètre engendré par v , $D\theta_s$ sa différentielle et soit θ_s^* la transformation associée sur les formes différentielles de M . Soit x_0 un point de M et $x_s = \theta_s(x_0)$ le point générique de l'orbite de v issue de x_0 .

Soient $e_1(0)$ et $e_2(0)$ deux vecteurs tangents à M en x_0 tels que :

$$(25) \quad \alpha \wedge d\alpha(v_{x_0}, e_1(0), e_2(0)) < 0.$$

Soit :

$$(26) \quad e_1(s) = D\theta_s(e_1(0)) ; e_2(s) = D\theta_s(e_2(0)) ; w(s) = \alpha(e_1(s))e_2(s) - \alpha(e_2(s))e_1(s).$$

La proposition suivante caractérise le long des orbites de v le fait que α est une forme de contact.

Proposition 5 : $w(s)$ tourne dans le sens direct du repère $(e_1(s), e_2(s))$ quand s augmente.

Soit $\psi(s, x_0)$ l'angle, dans le repère mobile $(e_1(s), e_2(s))$ dont a tourné $w(s)$ de 0 à s .

On introduit les :

Définition 2 : On appelle points de coïncidence de x_0 (relativement à α et v) le long de l'orbite de v issue de x_0 les points x_s tels que

$$\psi(s, x_0) = 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}. \text{ En ces points } x_s, \text{ on a :}$$

$$(27) \quad (\theta_s^* \alpha)_{x_0} = \lambda(s, x_0) \alpha_{x_0} ; \lambda(s, x_0) > 0.$$

Définition 3 : On appelle point conjugué de x_0 (relativement à α et v) le long de l'orbite de v issue de x_0 un point x_s de coïncidence de x_0 tel que :

$$(28) \quad \lambda(s, x_0) = 1$$

Définition 4 : On dit que α tourne bien le long de v si tout point x_0 de M admet un point de coïncidence autre que lui-même. Soit alors $\gamma^i : M \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction qui associe à un point x_0 de M le i -ème temps $s = \gamma^i(x_0)$ tel que x_s soit un point de coïncidence de x_0 ($i \in \mathbb{Z}$). Soit $f^i : M \rightarrow M$ le difféomorphisme de M qui envoie x_0 sur $x_{\gamma^i(x_0)}$. On note $\mu_i(x_0)$ le coefficient de colinearité de $(\theta_{\gamma^i(x_0)}^* \alpha)_{x_0}$ et de α_{x_0} :

$$(29) \quad (\theta_{\gamma^i(x_0)}^* \alpha)_{x_0} = \mu_i(x_0) \alpha_{x_0}.$$

On introduit :

$$(29) \quad \Gamma = \{x_0 \in M \mid \lambda(s, x_0) \geq 1 \text{ pour tout } s \text{ tel que } x_s \text{ soit un point de coïncidence de } x_0\}$$

Soit d une distance sur M et soit $\|\cdot\|$ une norme pour les différentielles des applications C^1 de M dans M .

On suppose que :

(H1) α tourne bien le long de v .

(H2) v admet une orbite périodique

(H3) Pour un champ v_1 , non singulier et colinéaire à v , on a :

$\exists k_1 > 0$ tel que $\|D\theta_s^1\| \leq k_1 \forall s \in \mathbb{R}$; où θ_s^1 est le groupe à un paramètre de v_1

(H4) $\exists k_2$ et $k_3 > 0$ tels que $\forall i \in \mathbb{Z}$, on a :

$$k_2 d(x, y) \leq d(f^i(x), f^i(y)) \leq k_3 d(x, y) \quad \forall x, y \in M$$

(H5) $\exists k_4 > 0$ tel que $|\mu_i(x) - \mu_i(y)| \leq k_4 d(x, y) \quad \forall x, y \in M$

(H6) $\exists \rho > 0$ tel que $\forall x \in M$, l'ensemble $C_\rho(x) = \{f^i(x) / |\mu_i(x) - 1| < \rho ; i \in \mathbb{Z}\}$ est fini.

Sous ces hypothèses, on a le théorème 5, qui rend compte du défaut de compacité de I sur C_β .

Théorème 5 : Les points critiques à l'infini de I sur C_β sont des courbes tracées sur M , continues et fermées, constituées de morceaux (x_{2i}, x_{2i+1}) tangents à ξ et de morceaux (x_{2i+1}, x_{2i+2}) tangents à v . x_{2i+2} est conjugué de x_{2i+1} . Les morceaux tangents à ξ sont dans Γ . Si la topologie de l'espace des chemins sur M est assez riche (i.e. les nombres de Betti de cet espace sont non bornés), il y a une infinité de telles courbes. De plus, si n désigne le nombre de morceaux d'une telle courbe et a sa longueur selon ξ , on a :

$$(30) \quad n \leq Ca ; \quad C \text{ constante fixée.}$$

Les hypothèses (H1-H6) peuvent être considérablement affaiblies, tout particulièrement (H3), (H4) et (H5) (voir [17]).

Du point de vue technique, la démonstration du théorème 5 comporte deux aspects : d'une part, elle exige la construction d'un lemme de déformation compactifiant que nous allons présenter et qui a un caractère tout à fait général ; d'autre part, elle induit une étude détaillée de la dynamique de α le long de v .

En effet, ces courbes trouvées sont des extrémales de α relativement à v puisque le long de ces courbes, α reste parallèle à lui-même le long des

brins tangent à ξ (ξ est caractéristique pour $d\alpha$) et α tourne et revient sur elle-même en tant que forme le long des brins tangents à v . On retrouve ainsi l'équation du pendule alternativement freiné ou accéléré dans la dynamique de α (les solutions périodiques étant ces courbes), l'équation du pendule non perturbé étant exactement réalisé pour (S^3, α_0) avec v définissant une des fibrations de Hopf de S^3 .

Une fois de plus, via la non-compacité du problème variationnel, des structures géométriques émergent, mettant essentiellement en jeu les opérateurs $[\xi, \cdot]$, $[v, \cdot]$, α et β sur la variété M . ($[\cdot, \cdot]$ est le crochet de Lie de deux champs de vecteurs). Une direction intéressante de travail semble donnée par l'existence de feuilletages de codimension un transverses à la forme α . En effet, si γ est un tel feuilletage, $\gamma \cap \alpha$ est un champ de vecteurs v tel que α ne peut admettre de points de coïncidence le long d'une v -orbite, et, a fortiori, ne peut admettre de points conjugués. Dans ce cas, le problème variationnel a toutes les chances de devenir compact et le théorème 5 de nous fournir alors des orbites périodiques...

Revenons au problème variationnel considéré :

On considère $C_\beta = \{x \in L_\beta / \alpha(\dot{x}) = \text{constante positive}\}$

Les courbes de C_β ont un vecteur directeur $\dot{x}$ qui se décompose comme suit :

$$(31) \quad \dot{x} = a \zeta + bv \quad a = \text{constante positive} ; b \in L^2(S^1, \mathbb{R})$$

On considère la fonctionnelle $I(x) = a$ sur C_β . Soit $J(x) = \int_0^1 b^2 dt$.

Comme nous l'avons déjà expliqué, I ne satisfait pas (P.S.).

On commence donc par construire un pseudo-gradient, dépendant d'un paramètre $\varepsilon > 0$. L'idée est la suivante :

Soit ∂I et ∂J les gradients de I et J , $|\partial I|$ et $|\partial J|$ leurs normes.

Soient :

$$(32) \quad \begin{cases} \varphi : C_\beta - \{\text{points critiques de } I\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ définie par :} \\ \varphi(x) = \frac{|\partial I|}{|\partial J|}(x) J(x) \text{ si } |\partial J(x)| \neq 0 ; \quad \varphi(x) = +\infty \text{ si } \partial J(x) = 0 \end{cases}$$

$$(32) \quad Z = |\partial J| \partial I + |\partial I| \partial J$$

On construit un pseudo-gradient Z_ε , dépendant d'un paramètre $\varepsilon > 0$, qui est colinéaire à $-Z(x)$ si $\varphi(x) \leq \varepsilon$ et colinéaire à $-\partial I(x)$ si $\varphi(x) \geq 2\varepsilon$.

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 6 : Soit $0 < a_0 < a_1$; $I^{a_0} = \{x \in C_\beta / J(x) \leq a_0\}$;
 $I^{a_1} = \{u \in C_\beta / I(x) \leq a_1\}$ si I^{a_0} n'est pas rétract par déformation de I^{a_1} ,
il existe un point x_ε tel que :

$$(33) \quad a_0 \leq I(x_\varepsilon) \leq a_1 \quad \text{et} \quad \partial J(x_\varepsilon) = 0$$

ou

$$(34) \quad a_0 \in I(x_\varepsilon) \leq a_1 ; Z(x_\varepsilon) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x_\varepsilon) \leq \varepsilon .$$

La proposition 6 a un caractère tout à général (voir [17]).

On explore l'alternative donnée par (33)-(34).

(33) nous fournit des orbites périodiques. On étudie donc (34).

On pose :

$$(35) \quad \begin{cases} \omega = \left| \frac{\partial J}{\partial I} \right| (x_\varepsilon) ; \quad \omega \rightarrow +\infty \quad \text{si} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \\ \dot{x}_\varepsilon = a\xi + bv \quad 0 < a_0 \leq a \leq a_1 \quad b \in L^2(S^1, \mathbb{R}) \\ \bar{\mu} = d\alpha(v, [v, [\xi, v]]), \quad \bar{\mu}_\xi = d\bar{\mu}(\xi) = d\alpha([\xi, v], [v, [\xi, v]]) ; \\ \quad \quad \quad -\tau = d\alpha([\xi, v], [\xi, [\xi, v]]) \end{cases}$$

(34) s'écrit alors :

$$(36) \quad \begin{cases} b'' + b(-\omega a + b^2/2 - \int_0^1 b^2/2) + a^2 b\tau - ab^2 \bar{\mu}_\xi + \bar{\mu} b \frac{db}{dt} = 0 \\ b(0) = b(1) ; b'(0) = b'(1) ; 0 \leq a_0 \leq a \leq a_1 ; \int_0^1 b^2 dt / \omega \leq \varepsilon \end{cases}$$

L'analyse de (35) est délicate parce que $\bar{\mu}$ change de signe sur M .

Il faut distinguer deux types d'intervalles de temps :

① ceux où $b^2/\omega(t)$ est "petit". On prouve que sur un tel intervalle $[t, t + \Delta t]$, la courbe est proche d'une orbite de ξ à l'ordre $o(\Delta t)$

② ceux où $b^2/\omega(t)$ est "grand". Sur ces morceaux, la courbe est proche d'une orbite de v et la dynamique de α le long de v rentre en jeu. On écrit alors l'équation fonction de s que vérifie la forme α_{x_0} dans le repère transporté par v , $((\theta_s^* \alpha)_{x_0}, (\theta_s^* \beta)_{x_0})$, le long d'une orbite x_s de v . Cette équation nous permet d'interpréter (36) comme équation de transport de α le long de v . La condition $\int_0^1 b^2/\omega \leq \varepsilon$ nous dit alors que, pour $\varepsilon \rightarrow 0$, les morceaux considérés doivent aller d'un point à un de ses conjugués. L'erreur est ici encore de l'orbite de $o(\Delta t)$.

On remplace donc, en suivant le découpage fourni par (1) et (2) la courbe considérée par une orbite $\tilde{x}_\varepsilon$ constituée d'orbites de ξ et d'orbites de v , respectivement. (Les orbites de v allant d'un point à un de ses conjugués) $\tilde{x}_\varepsilon(0)$ et $\tilde{x}_\varepsilon(1)$ sont proches à $o(1)$. On contrôle, par des estimations délicates, le nombre de brins de cette courbe. On conclut en faisant tendre ε vers zéro. La preuve du fait que les morceaux tangents à ξ sont dans Γ représente une démonstration à part qui nécessite la construction d'un pseudo-gradient local. On conclut en attribuant un indice de Morse (lié à une notion de rotation de α le long de ξ et à une forme quadratique le long des sauts tangents à v) et des variétés stables et instables à ces points critiques à l'infini, ce qui permet, par un raisonnement analogue en cas des géodésiques d'établir que si la topologie est assez riche, il y a une infinité de telles courbes.

4. LA CONCLUSION

Il semble bien, après avoir examiné une telle variété de situations, que l'on puisse faire une théorie des points critiques à l'infini dans plusieurs cas où le problème variationnel rend compte d'une situation géométrique (ou physique) précise. Les techniques variationnelles, assouplies par les constructions de pseudo-gradient, et ramenés au calcul des changements de topologie induits par les accidents, se produisant même à l'infini, sont tout à fait à même de tenir compte de la non-compactité si celle-ci a trait à une structure rigide. D'une certaine manière, les points critiques à l'infini sont alors plus simples que les "vrais" points critiques parce qu'ils obéissent à des règles précises, sont plus "contraints" que les vraies solutions.

Inversement, il semble bien que l'analyse de la non-compactité variationnelle révèle, comme on l'a vu, des structures géométriques insoupçonnées et intéressantes.

Du point de vue de l'analyse, cependant, il y a une non-compactité plus difficile encore, où des phénomènes bien plus compliqués doivent se produire : ce serait par exemple le cas de l'équation $\Delta u + u^7 = 0$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$

BIBLIOGRAPHIE :

- [1] J. Milnor, Morse Theory. Princeton University Press.
- [2] A. Bahri - J.M. Coron, à paraître.
- [3] T. Aubin, Métrique riemannienne et courbure. J. Diff. Geo.11 (1976) p.573-598.
- [4] R. Schoen, Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature ; à paraître .
- [5] J. Kazdan - F. Warner, J. Diff. Geom. 10 (1975) p.113-134.
- [6] J.P. Bourguignon - J.P. Ezin, Scalar curvature functions in a conformal class of metrics and conformal transformations, à paraître.
- [7] J. Sacks - K. Uhlenbeck, Annals of Maths.113 (1981) p.1-24.
- [8] P.L. Lions, The concentration compactness principle in the calculus of variations, the limit case. Riv. Ibero americana, à paraître.
- [9] M. Struwe, A global existence result for elliptic boundary value problems involving limiting non linearities, à paraître.
- [10] C.H. Taubes, Path connected Yang-Mills modulo-spaces J. Diff. Geom. à paraître.
- [11] H. Brezis - J.M. Coron, Convergence of solutions of H. systems or how to blow bubbles. Archive Rat. Mech. Anal. à paraître.
- [12] A. Weinstein, On the Hypotheses of Rabinowitz periodic orbit theorems. J. Diff. Equ.33 1979 p.353-358.
- [13] P.H. Rabinowitz, Periodic solutions of Hamiltonian systems Comm. Pure Math.31 1978 p.157-184.
- [14] H. Gluck - F. Ziller, Preprint

- [15] A. Bahri, un problème variationnel non compact en géométrie de contact.
Note aux C.R.A.S. t.299 Série I. n°15 1984.
- [16] R. Schoen - S.T. Yau, Positivity of the total mass of a general
space-time. Phys. Rev. Lett. 43 1979 n°20 p.1457-1459.
- [17] A. Bahri, Pseudo-orbites des formes de contact à paraître.

*
* *
*