Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

J.-M. Trepreau

Prolongement unilatéral des fonctions CR

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1984-1985), exp. n° 22, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1984-1985____A22_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   B O N Y - S J Ö S T R A N D - M E Y E R   1 9 8 4 - 1 9 8 5

PROLONGEMENT UNILATERAL DES FONCTIONS CR

par

J-M. TREPREAU

Exposé n° XXII

21 Mai 1985

Soit S une hypersurface réelle de classe C^2 dans $\mathbb{C}^n$ et z_o un point de S. Près de z_o, S partage l'espace en deux composantes Ω_+ et Ω_-. Nous disons que Ω_+(resp. Ω_-) a la propriété de prolongement en z_o si tout voisinage ouvert U de z_o en contient un autre V tel que toute fonction holomorphe dans $\Omega_+ \cap U$ (resp. $\Omega_- \cap U$) se prolonge holomorphiquement à V. S'il existe un germe d'hypersurface complexe $H : h(z) = 0$, contenu dans S et passant par z_o, ni Ω_+ ni Ω_- n'a la propriété de prolongement en z_o : considérer la fonction $1/h(z)$ ... nous prouvons la réciproque :

Théorème. On suppose :

(*) il n'existe pas de germe d'hypersurface complexe contenu dans S et passant par z_o.

Alors, l'un au moins des ouverts Ω_+ et Ω_- a la propriété de prolongement en z_o.

Remarques :

1) Nous n'avons besoin en fait que de la régularité $C^{1,1}$ pour S. Nous ne savons pas si le résultat demeure sous des hypothèses de régularité plus faibles.

2) Il résulte du théorème que, sous l'hypothèse (*), toute fonction CR (c'est-à-dire annulée par tout champ de vecteurs antiholomorphes tangents à S) définie près de z_o sur S (toute distribution CR, toute hyperfonction CR selon la régularité de S) s'étend près de z_o holomorphiquement dans Ω_+ ou dans Ω_-. Une telle fonction se décompose en effet en la somme des valeurs au bord de deux fonctions holomorphes près de z_o, respectivement dans Ω_+ et dans Ω_- (voir [4] et sa bibliographie).

3) Nous ne disons pas si c'est Ω_+ ou Ω_- (ou les deux) qui a la propriété de prolongement en z_o ; on a toutefois, évidemment, le corollaire suivant :

Corollaire. On suppose que Ω_+ est pseudoconvexe près de z_o. Alors Ω_- a la propriété de prolongement en z_o si et seulement si (*) est vérifiée.

1. COMPARAISON AVEC DES RESULTATS CONNUS

Sans faire l'historique du problème de l'extension des fonctions CR, nous rappellerons les deux résultats qui nous ont le plus inspiré. Pour simplifier, supposons S de classe C^∞ ; soit :

$$S : r(z) = 0$$

où r est une fonction réelle de classe C^∞ vérifiant $r(z_o) = 0$ et $dr(z_o) \neq 0$.

Si H est une hypersurface complexe passant par z_o, on dit que H est tangente à l'ordre k en z_o à S si la fonction $r_{|h}$ s'annule à l'ordre $k+1$ en z_o. On dit que S est de type fini en z_o si la propriété suivante est vérifiée :

(**) il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel qu'il n'existe pas d'hypersurface complexe tangente à l'ordre k à S en z_o.

Il est clair que la propriété (**) est plus forte que la propriété (*). Lorsque S est supposée analytique, les deux propriétés sont équivalentes. Dans [2] (1978) E. Bedford et J.E. Fornaess ont prouvé le résultat de prolongement du corollaire en supposant S analytique, ou plus généralement S de classe C^∞ et de type fini. Dans [1] (1984), M.S. Baouendi et F. Treves ont prouvé le prolongement unilatéral des fonctions CR sur S en supposant aussi S analytique ou de classe C^∞ et de type fini ; ces deux auteurs donnent d'ailleurs un critère simple permettant d'exhiber un ouvert de la famille $\{\Omega_+,\Omega_-\}$ qui possède la propriété de prolongement en z_o.

Exemple. Soit $z_o = 0$ et $S : \operatorname{Re} z_n = f(z_1,\dots,z_{n-1}) + \operatorname{Im} z_n\, g(z_1,\dots,z_{n-1}, \operatorname{Im} z_n)$. Si l'on suppose que la fonction f est plate en 0 mais nulle dans aucun voisinage de 0, l'hypersurface $z_n = 0$ est tangente à l'ordre infini à S en 0 mais n'est pas contenue dans S ; la propriété (*) est vérifiée.

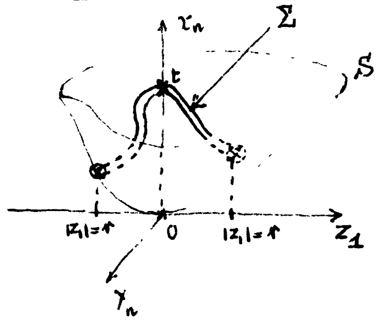
2. METHODE DE LA DEMONSTRATION

La démonstration repose sur le Kontinuitätssatz et la construction de disques complexes bordés par S. Supposons, pour simplifier, que $n = 2$ et que Ω_+ est pseudoconvexe près de $z_o = 0 \in S = \partial\Omega_+$. Soit (z_1, z_n) le point courant de $\mathbb{C}^2$ et

$$\Omega_+ : x_n > f(z_1,\bar{z}_1,y_n)$$

où $f(0) = df(0) = 0$.

1) On construit une courbe complexe Σ bordée par S et coupant l'axe des $x_n = \operatorname{Re} z_n$. Plus précisément, pour $r > 0$ assez petit, Σ est donnée par :



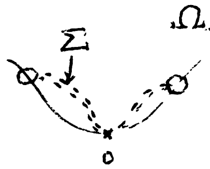
$\Sigma = \{(z_1,h(z_1))\ ;\ |z_1| \leqslant r\}$ où h est une fonction continue de z_1 pour $|z_1| \leqslant r$, holomorphe pour $|z_1| < r$ telle que :

$$\begin{cases} \operatorname{Re} h(z_1) = f(z_1,\bar{z}_1,\operatorname{Im} h(z_1)) \text{ si } |z_1| = r \\ \operatorname{Im} h(0) = 0 . \end{cases}$$

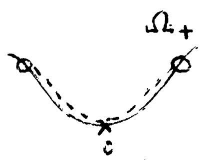
Une telle construction semble remonter à E. Bishop ([3]) .

2) Soit t l'abscisse du point où Σ coupe l'axe des x_n. Le Kontinuitätssatz affirme que Σ est contenue dans $\overline{\Omega}_+$; en particulier, t est positif. Si t est strictement positif, la méthode des disques complexes permet de prolonger au voisinage de 0 les fonctions holomorphes dans Ω_-.

3) Si au contraire $t = 0$, c'est-à-dire si Σ passe par 0, une extension sans doute classique du Kontinuitätssatz permet de conlure que Σ est contenue dans le bord de Ω_+ : la propriété (*) n'est pas vérifiée.



ceci n'arrive jamais



Σ est contenue dans S

Dans le cas général, on introduit les enveloppes d'holomorphie $\Omega_\oplus$ et $\Omega_\ominus$ de Ω_+ et Ω_-. Lorsque z_o n'appartient ni à $\Omega_\oplus$, ni à $\Omega_\ominus$, la méthode ci-dessus permet de construire des courbes complexes passant par z_o et contenues dans les bords de $\Omega_\oplus$ et $\Omega_\ominus$, donc dans S. Il ne reste plus alors qu'à vérifier que ces courbes engendrent une hypersurface complexe.

3. DEMONSTRATION DU THEOREME

Nous noterons $z = (z_1,\dots,z_n)$, $z_* = (z_1,\dots,z_{n-1})$, $z = x+iy$ ...
Fixons $r > 0$ et introduisons les pavés :

$$p = \{(z_*, y_n) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R} \;,\; |z_*| < r \;,\; |y_n| < r\}$$

$$P = \{ z \in \mathbb{C}^n \;,\; |z_*| < r \;,\; |x_n| < r, \; |y_n| < r \}$$

Soit f une fonction réelle de classe C^2 sur p, telle que $\max_p |f| < \frac{r}{3}$. Soit

$$S \;:\; z \in P \;,\; x_n = f(z_*, y_n)$$

$$\Omega_+ : \; z \in P \;,\; x_n > f(z_*, y_n)$$

$$\Omega_- : \; z \in P \;,\; x_n < f(z_*, y_n) \;.$$

Rappelons qu'un ouvert $\widetilde{\Omega}$ de $\mathbb{C}^n$ est l'enveloppe d'holomorphie d'un ouvert $\Omega \subset \widetilde{\Omega}$ si $\widetilde{\Omega}$ est un ouvert d'holomorphie et si toute fonction holomorphe dans Ω est la restriction à Ω d'une fonction holomorphe dans $\widetilde{\Omega}$. Rappelons encore que tout ouvert d'holomorphie $\widetilde{\Omega}$ de $\mathbb{C}^n$ est pseudoconvexe, c'est-à-dire que, si $\delta_{\widetilde{\Omega}}(z)$ désigne la distance euclidienne d'un point z au complémentaire de $\widetilde{\Omega}$, la fonction $z \mapsto \delta_{\widetilde{\Omega}}(z)$ est plurisouharmonique sur $\widetilde{\Omega}$.

Lemme 1 : Il existe deux fonctions f_+, s.c.s sur p, et f_-, s.c.i sur p, telles que $\Omega_\oplus = \{z \in P,\ x_n > f_+(z\ , y_n)\}$ et $\Omega_\ominus = \{z \in P\ , x_n < f_-(z_*, y_n)\}$ soient respectivement les enveloppes d'holomorphie de Ω_+ et Ω_-.

Si l'on revient maintenant au théorème du début, si ni Ω_+, ni Ω_- n'a la propriété de prolongement en z_o, c'est que, après réduction à la situation considérée ici, z_o n'appartient ni à $\Omega_\oplus$, ni à $\Omega_\ominus$. Le théorème résulte donc du résultat un peu plus précis suivant :

Théorème : L'ensemble $E = S \cap \partial\Omega_\oplus \cap \partial\Omega_\ominus$ est une réunion d'hypersurfaces complexes.

Dans la suite, nous allons esquisser la preuve de ce théorème, en reprenant le plan du § 2.

1) Courbes complexes bordées par S

Soit $D = \{\tau \in \mathbb{C}\ , |\tau| \leq 1\}$, $\overset{o}{D}$ l'intérieur de D et ∂D le bord de D. Si $\varphi : D \to \mathbb{C}^n$ est une fonction continue, holomorphe sur $\overset{o}{D}$, on note :

$$\Sigma_\varphi = \varphi(D) \quad \overset{o}{\Sigma}_\varphi = \varphi(\overset{o}{D}) \quad \partial\Sigma_\varphi = \varphi(\partial D) \ .$$

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des courbes complexes $\Sigma = \Sigma_\varphi$ vérifiant :

$$\Sigma \subset \{z \in P\ , |x_n| < \frac{r}{3}\} \quad \partial\Sigma \subset S \ .$$

Le lemme suivant montre que $\mathcal{E}$ possède beaucoup d'éléments. Plus précisément, étant donné $z^o \in S$, $z^o = (z_*^o, x_n^o + i y_n^o)$, il existe $\Sigma \in \mathcal{E}$, coupant l'axe $z_* = z_*^o$, $y_n = y_n^o$ et se projetant sur $\mathbb{C}^{n-1}$ sur une droite complexe donnée passant par z_*^o (on pourrait exiger qu'elle se projette sur une courbe complexe donnée). La construction est classique (cf.[3]).

Lemme 2 : Soit $z = (z_*, z_n) \in S$ et $w_* = (w_1, \dots, w_{n-1})$ un vecteur unitaire. Si $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ sont assez petits, il existe une fonction continue $\varphi_n : D \to \mathbb{C}$, holomorphe sur $\overset{o}{D}$, telle que $\operatorname{Im} \varphi_n(0) = y_n$, $\|\varphi_n - z_n\|_{L^\infty(D)} < \varepsilon$ et $\operatorname{Re} \varphi_n(\tau) = f(z_* + \delta w_* \tau, \operatorname{Im} \varphi_n(\tau))$ quand $\tau \in \partial D$.

Démonstration : Il s'agit, étant donné une fonction $F(\tau, \bar\tau, y_n)$ de construire une fonction continue $: D \to \mathbb{C}$, holomorphe sur $\overset{o}{D}$ et vérifiant :

$$\operatorname{Im} \varphi(0) = 0,\ \operatorname{Re} \varphi(\tau) = c \operatorname{Im} \varphi(\tau) + F(\tau, \bar\tau\ , \operatorname{Im} \varphi(\tau)) \text{ quand } |\tau| = 1 \ .$$

La transformation de Hilbert $\mathbb{H}$ ramène ce problème à la recherche d'une solution $u \in C^o(\partial D)$, petite, de l'équation :

$$(1-cH)\,u(e^{it}) = F(e^{it},e^{-it},(Hu)(e^{it})) \quad .$$

Lorsque F est assez petite dans C^2 le second membre définit une application contractante de $u \in H^1(\partial D)$ petite, et le théorème du point fixe s'applique #

2) Application du Kontinuitätssatz

Disons que $\Sigma \in \mathcal{E}$ passe au-dessus d'un point $z \in P$ si Σ passe par un point z' ayant les mêmes coordonnées $z'_* = z_*$ et $y'_n = y_n$ que z . Notons $e = (0,\dots,0,1) \in \mathbb{C}^n$, et pour $\Sigma = \Sigma_\varphi \in \mathcal{E}$, notons :

$$\Sigma_t = \Sigma + te \qquad \mathring{\Sigma}_t = \mathring{\Sigma} + te \qquad \partial\Sigma_t = \partial\Sigma + te \ .$$

Le Kontinuitätssatz affirme que si $t > 0$ (resp. si $t < 0$), Σ_t est relativement compacte dans $\Omega_\oplus$ (resp. dans $\Omega_\ominus$), et que Σ est contenue dans $\overline{\Omega}_\oplus \cap \overline{\Omega}_\ominus$

3) Courbes complexes contenues dans E

Lemme 3 : Soit $\Sigma \in \mathcal{E}$. Si $\mathring{\Sigma}$ passe au-dessus d'un point $z_o \in E$, Σ est contenue dans E.

Démonstration : Il est d'abord clair d'après le 2) que $\mathring{\Sigma}$ passe par z_o ; sinon on aurait $z_o \in \mathring{\Sigma}_t$ avec par exemple $t > 0$, donc $\Sigma_t \subset \Omega_\oplus$ et $z_o \in \Omega_\oplus$, ce qui contredit la définition de E . Il suffit, d'autre part de montrer que Σ est contenue dans $\partial\Omega_\oplus$, ou dans $\partial\Omega_\ominus$, en vertu de l'inclusion :

$$\partial\Omega_\oplus \cap \partial\Omega_\ominus \cap P \subset \overline{\Omega}_- \cap \overline{\Omega}_+ \cap P = S \ .$$

Soit donc $\Sigma = \Sigma_\varphi \in \mathcal{E}$ telle que $\mathring{\Sigma}$ coupe $S \cap \partial\Omega_\oplus$ en $z_o = \varphi(\tau_o)$, $\tau_o \in \mathring{D}$. On peut, quitte à composer φ à droite avec un biholomorphisme convenable de D , supposer que $\tau_o = 0$. D'après le 2), pour $t > 0$ assez petit, la fonction

$$\psi_t(\tau) = -\operatorname{Log} \delta_{\Omega_\oplus}(\varphi(\tau) + te)$$

est bien définie sur D , continue sur D et sousharmonique sur $\mathring{D}$. Soit

$$k \in \mathbb{R} \ , \ \mu_k(t) = \operatorname{mes}\{\tau \in D,\ \psi_t(\tau) < k\} \ .$$

Il suffit, pour prouver le lemme, de montrer :

$$(1) \quad \forall\, k \in \mathbb{R} \ , \ \mu_k(t) \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0$$

La propriété de la valeur moyenne donne l'inégalité :

$$\psi_t(0) \leqslant \frac{1}{\pi} \iint_{\overline{D}} \psi_t(\tau) \frac{d\tau \wedge d\overline{\tau}}{2i}$$

donc : (2) $\pi\psi_t(0) \leqslant \mu_k(t) \times k + (\pi - \mu_k(t)) \times \max\limits_{\tau \in D} \psi_t(\tau)$

Le point $\varphi(0)$ appartenant à $\partial\Omega_\oplus$ par hypothèse, le premier membre est $\geqslant \pi \operatorname{Log} \frac{1}{t}$.

Pour majorer le second membre, on applique le principe du maximum :

$$\max_{\tau \in D} \psi_t(\tau) = \max_{\tau \in \partial D} \psi_t(\tau) = -\operatorname{Log} \min_{z \in \partial\Sigma_t} \delta_{\Omega_\oplus}(z) \leqslant -\operatorname{Log} \min_{z \in \partial\Sigma_t} \delta_{\Omega_+}(z) \leqslant \operatorname{Log} \frac{C}{t}$$

où C ne dépend que de S. La dernière inégalité résulte du fait que $\partial\Sigma$ est contenue dans S et que S est lipschitzienne. Si l'on reporte ces inégalités dans (2), on obtient :

$$\pi \operatorname{Log} \frac{1}{t} \leqslant \mu_k(t) \times k + (\pi - \mu_k(t)) \times \operatorname{Log} \frac{C}{t}$$

donc : $\mu_k(t) \left(\operatorname{Log} \frac{C}{t} - k\right) \leqslant \pi \operatorname{Log} C$

et le résultat.

4) Hypersurfaces complexes dans E

Considérons maintenant le fibré HS sur S des vecteurs holomorphes tangents à S. Si l'on note $g(z) = x_n - f(z_*, y_n)$, HS est engendré par les champs :

$$z \in S\ ,\quad Z_j = \frac{\partial}{\partial z_j} - \left(\frac{\partial g}{\partial z_j}(z)\right)\left(\frac{\partial g}{\partial z_n}(z)\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial z_n} \qquad j = 1, \ldots, n-1\ .$$

Notons $Z_j = X_j + i\,Y_j$, $\overline{Z}_j = X_j - i\,Y_j$ où X_j , Y_k sont des champs de vecteurs réels indépendants sur S. Rappelons qu'une variété intégrale du système de champs de vecteurs $X_1, \ldots, Y_{n-1}$, quand elle existe, est une hypersurface complexe

Compte-tenu des lemmes 1 et 3, il est clair que E possède les propriétés suivantes :

(i) E est stable (dans S) sous l'action du flot des champs $X_1,\dots,Y_{n-1}$.

(ii) si $z \in E$, les commutateurs au point z des champs $X_1,\dots,Y_{n-1}$ appartiennent à l'espace engendré par ces champs en z .

Le théorème résulte alors de la propriété suivante :

Lemme 4 : Soit $X_1,\dots X_n$ n champs de vecteurs réels indépendants et de classe C^1 sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ et F un fermé de Ω. On suppose :

(i) F est stable sous l'action du flot des champs $X_1,\dots X_n$.

(ii) Les commutateurs des champs $X_1,\dots,X_n$ au-dessus de F appartiennent à l'espace engendré par $X_1,\dots,X_n$.

Alors F est réusion de n-feuilles intégrales des champs $X_1,\dots,X_n$.

REFERENCES

[1] M.S. Baouendi et F. Treves : About the Holomorphic Extension of CR Functions on Real Hypersurfaces in Complex Space. Duke Math. Journal 51 - 1 (1984).

[2] E. Bedford et J.E. Fornaess : Local Extension of CR Functions from Weakly Pseudoconvex Boundaries. Michigan Math. J. 25 (1978) p. 259-262.

[3] E. Bishop : Differentiable Manifolds in Euclidean Space. Duke Math. J. (1965), p. 1-22.

[4] J.C. Polking et R.O. Wells Jr : Hyperfunction Boundary Values and a Generalized Bochner-Hartogs Theorem. Proc. Symp. in Pure Math. 30 (1977), p. 187-193.

* * *