Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

M. S. Baouendi

Prolongement holomorphe d'applications CR

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1984-1985), exp. nº 21, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1984-1985____A21_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E B O N Y - S J Ö S T R A N D - M E Y E R 1 9 8 4 - 1 9 8 5

PROLONGEMENT HOLOMORPHE D'APPLICATIONS CR.

par M.S. BAOUENDI

Exposé n°XXI

21 Mai 1985

Nous présentons dans cet exposé des résultats récents sur le prolongement holomorphe de difféomorphismes CR obtenus en collaboration avec H. Jacobowitz et F. Treves. Nous renvoyons à [3] pour les détails des démonstrations.

Soient M et M' deux sous-variétés analytiques réelles génériques de $\mathbb{C}^N$, et J un difféomorphisme CR de M sur M'. Nous nous intéressons à l'analyticité locale de J, à savoir quand J admet un prolongement holomorphe au voisinage de M. Rappelons qu'un tel prolongement a été démontré, dans le cas où M et M' sont des bords d'ouverts fortement pseudo-convexes, par Lewy [15] et Pincuk [17]. D'autres résultats ont été obtenus par Derridj [9], [10], Diederich-Webster [12], Han [13], Nirenberg - Webster - Yang [16], (voir [3] pour une bibliographie plus complète).

Le problème traité étant local, nous considérons des germes de fonctions CR, de variétés, de difféomorphismes etc..., définis (souvent) à l'origine.

Nous allons maintenant définir une propriété qui sera essentielle dans la suite. Rappelons qu'une sous-variété M analytique réelle de $\mathbb{C}^N$, de codimension d, est dite <u>générique</u> si elle est définie par

$$\rho_j(Z,\overline{Z}) = 0 \quad , \quad 1 \leqslant j \leqslant d \ ,$$

où les ρ_j sont des (germes de) fonctions analytiques,réelles telles que

$$\partial\rho_1,\dots,\partial\rho_d$$

sont linéairement indépendants.

A M on associe sa variété polaire M° définie par

$$\rho_j(Z,\zeta) = 0 \quad , \ 1 \leqslant j \leqslant d \ ,$$

c'est une sous-variété holomorphe de $\mathbb{C}^{2N}$ de codimension d. On considère aussi la sous-variété holomorphe de $\mathbb{C}^N$ définie par

$$M_h = \{Z \in \mathbb{C}^N \ ; \ \rho_j(Z,0) = 0 \ , \ 1 \leqslant j \leqslant d\} \ ,$$

ainsi que son complexe conjuguée $\overline{M}_h$.

Il est facile de voir que le germe d'ensemble

$$V = \{Z \in \mathbb{C}^N \ ; \forall \zeta \in \overline{M}_h \ , \ (Z,\zeta) \in \ M^\circ\} \ .$$

est un sous-ensemble analytique de $M_h \cap M$. Nous dirons que M a la propriété $(\mathcal{F})$ ("essentially finite" dans [3]) si et seulement si

$$(\mathcal{F}) \qquad V = \{0\} \ .$$

Si M est une variété générique de codimension d dans $\mathbb{C}^N$, on peut toujours trouver des coordonnées holomorphes (z,w) telles que M soit définie par

$$(1) \qquad \operatorname{Im} w = \varphi(z,\bar{z},s),$$

avec $z = x + iy \in \mathbb{C}^n$, $w \in \mathbb{C}^d$, $N = n + d$, $s = \operatorname{Re} w$, et φ étant une fonction analytique réelle à valeur dans $\mathbb{R}^d$ satisfaisant

$$\varphi(0) = 0 \quad , \quad d\varphi(0) = 0 \ .$$

Si on suppose de plus que

$$(2) \qquad \varphi(z,\ 0,\ 0) \equiv 0 \ ,$$

(ce qui est toujours possible à réaliser après un changement de variables) alors la condition $(\mathcal{F})$ est équivalente à :

$$(3) \qquad \{z \in \mathbb{C}^n \ ; \ \varphi(z,\zeta,\ 0) = 0 \ , \ \forall \ \zeta \in \mathbb{C}^n\} = \{0\} \ .$$

On suppose que M soit définie par l'équation (1). Soient Γ un cône ouvert convexe de $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{O}$ un voisinage ouvert de l'origine dans $\mathbb{C}^{n+d}$. L'ensemble ouvert défini par

$$\mathcal{W}_\Gamma = \{(z,w) \in \mathcal{O} \ ; \ \operatorname{Im} w - \varphi(z,\bar{z},s) \in \Gamma\}$$

est appelé un coin ("wedge") d'arrête ("edge") M .

Nous énonçons maintenant notre résultat principal.

Théorème 1. Soit J un difféomorphisme (de classe C^∞) entre deux sous-variétés M et M' analytiques (réelle) génériques de $\mathbb{C}^N$. On suppose que

(i) l'une au moins des deux variétés M et M' satisfait la propriété $(\mathcal{F})$,

(ii) l'application J admet un prolongement holomorphe à un coin d'arrête M .

Alors J est analytique réelle ; elle est donc la restriction à M d'un holomorphisme de $\mathbb{C}^N$.

Remarque 1. La condition (ii) est équivalente au fait que J^{-1} , l'inverse de J , s'étend holomorphiquement à un coin d'arrête M' .

Remarque 2. La propriété $(\mathcal{F})$ est invariante par holomorphisme. Sous les hypothèses du théorème 1, elle est donc invariante par difféomorphisme CR.

Remarque 3. Il suffit dans le théorème 1 de supposer que J est de classe C^ν avec ν suffisamment grand.

Cas des hypersurfaces.

Soit M une hypersurface analytique de $\mathbb{C}^{n+1}$. Si M est définie par une équation de la forme (1) avec φ scalaire (i.e. d = 1) et satisfaisant (2), alors M est de type fini (voir Kohn [14] , Bloom - Graham [8]) si $\varphi(z,\bar{z},0)$ 0 . On voit alors que si M a la propriété $(\mathcal{F})$ (i.e. (3) est satisfaite), elle est de type fini. Comme on sait ([6]) que si M est de type fini il existe au moins un côté de M tel que toute fonction CR sur M s'étend holomorphiquement à ce côté, on déduit du théorème 1 :

Théorème 2. Soit J un difféomorphisme CR entre deux hypersurfaces analytiques de $\mathbb{C}^{n+1}$. Si l'une des hypersurfaces a la propriété $(\mathcal{F})$ alors J s'étend holomorphiquement à $\mathbb{C}^{n+1}$.

Une hypersurface de $\mathbb{C}^2$ a la propriété $(\mathcal{F})$ si et seulement si elle est de type fini. Nous avons le résultat suivant.

Théorème 3. Tout difféomorphisme CR entre deux hypersurfaces analytiques de $\mathbb{C}^2$ de type fini s'étend holomorphiquement à $\mathbb{C}^2$.

Il est démontré dans [11] qu'une variété analytique réelle compacte ne contient aucun ensemble analytique de dimension complexe strictement positive. Il en résulte en particulier que toute hypersurface analytique réelle compacte de $\mathbb{C}^{n+1}$ a la propriété $(\mathcal{F})$ en chacun de ses points. Le résultat suivant est alors un corollaire immédiat du théorème 2.

Théorème 4. Tout difféomorphisme CR entre deux hypersurfaces analytiques compactes de $\mathbb{C}^{n+1}$ est analytique.

En utilisant le résultat de Bell-Ligocka [7] nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 5. Soient Ω et Ω' deux ouverts de $\mathbb{C}^{n+1}$ bornés, (faiblement) pseudoconvexes, et à frontière analytique réelle. Toute application biholomorphe de Ω sur Ω' se prolonge en un holomorphisme défini dans un voisinage de $\overline{\Omega}$.

En effet nous savons d'après [7] qu'une telle application est C^∞ dans $\overline{\Omega}$. Il suffit alors d'utiliser le théorème 4 .

Cas des variétés de plus grande codimension.

Si M est une sous-variété générique de $\mathbb{C}^{n+d}$ de codimension $d > 1$, alors M peut avoir la propriété $(\mathcal{F})$ sans être de type fini (voir définition dans [8]).

D'autre part, la condition (ii) du théorème 1 est automatiquement satisfaite si le front d'onde analytique de toute fonction CR sur M est contenu dans un cône fermé strictement convexe (voir [2]). C'est le cas quand M est de type fini et φ indépendante de s (structure CR rigide [5]). C'est aussi le cas quand la forme de Levi en tout point caractéristique est non nulle [2]. Plus généralement, c'est le cas quand M est de type fini et est semi-rigide [4]. Ceci veut dire qu'il existe des entiers $m_j \geqslant 2$, $1 \leqslant j \leqslant d$, et des polynômes réels homogènes, $p_{m_j}(z,\overline{z})$, linéairement indépendants modulo les polynômes pluriharmoniques, et tels que, pour $j = 1,\ldots,d$, la fonction

$$\varphi_j(z,\overline{z},s^m) - p_{m_j}(z,\overline{z})$$

s'annule au moins à l'ordre $m_j + 1$, (avec $s^m = (s_1^{m_1},\ldots,s_d^{m_d})$).

En résumé, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème 6. Soit J un difféomorphisme CR entre deux sous-variétés génériques et analytiques de $\mathbb{C}^{n+d}$. Si l'une au moins des deux variétés est de type fini, semi-rigide, et a la propriété $(\mathcal{F})$, alors J se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{C}^{n+d}$.

Idée de la démonstration du théorème 1.

Nous supposons que M soit définie par (1) et que M' possède la propriété $(\mathcal{F})$. Soient $f = (f_1,\dots,f_n)$ et $g = (g_1,\dots,g_d)$ les composantes du difféomorphismes J. Si M' est définie par une équation similaire à (1), avec φ remplacée par ψ, nous avons

$$(4) \qquad \frac{g-\overline{g}}{2i} = \psi(f,\overline{f},\frac{g+\overline{g}}{2}) .$$

(On peut renforcer la condition (2) sur ψ et supposer que $\psi(z,0,s) \equiv 0$).

De l'équation (4) nous obtenons

$$(5) \qquad g = Q(f,\overline{f},g) \quad \text{ou} \quad \overline{g} = \overline{Q}(\overline{f},f,g),$$

où $Q(z,\zeta,w)$ est une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}^{2n+d}$. La propriété $(\mathcal{F})$ est alors équivalente à (voir (3)) :

$$(6) \qquad \{z \in \mathbb{C}^n \ ; \ Q(z,\zeta,0) = 0 \ ,\forall \zeta \in \mathbb{C}^n \} = \{0\} .$$

En choisissant une base $D_1,\dots,D_n$ des champs de vecteurs CR sur M, nous établissons l'identité suivante :

$$(7) \qquad \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n} (\zeta-\overline{f})^\alpha \ \frac{D^\alpha \overline{g}}{\alpha!} = \overline{Q}(\zeta,f,g) \ ,\forall \ \zeta \in \mathbb{C}^n .$$

La condition (ii) du théorème 1 implique que, pour tout ζ (petit), le deuxième membre de (7) s'étend à un certain coin de $\mathbb{C}^{n+d}$ d'arrête M. Chaque terme dans la série (7) s'étend au coin opposé. Pour démontrer la convergence de la série (7) dans ce dernier coin nous utilisons (6) d'une manière cruciale, ainsi que la théorie de l'élimination appliquée à (5) et à leurs dérivées. L'analyticité des deux membres de (7) résulte du théorème du "edge of the wedge" utilisé par rapport à la variable $s = \text{Re } w$.

Comme $\overline{Q}(0,f,g) = g$, l'analyticité de g résulte de ce qui précède en prenant $\zeta = 0$ dans (7). Pour obtenir l'analyticité de f, nous utilisons de nouveau la propriété $(\mathcal{F})$ sous la forme (6), et des arguments de géométrie analytique : théorème de préparation ainsi qu'un résultat dû à Abhyankar et Moh [1].

BIBLIOGRAPHIE :

[1] S.S. Abhyankar & T.T. Moh : A reduction theorem for divergent power series, Crelle J. Reine & Angew. Mat. 241 (1970), 27-33.

[2] M.S. Baouendi, C.H. Chang & F. Treves : Microlocal hypo-analycity and extension of CR functions. J. Diff. Geom. 18 (1983), 331-391.

[3] M.S. Baouendi, H. Jacobowitz & F. Treves : On the analyticity of CR mappings. (A paraître).

[4] M.S. Baouendi & L.P. Rothschild : CR Semirigid structures, (A paraître).

[5] M.S. Baouendi, L.P. Rothschild & F. Treves : CR structures with transversal group action and extendability of CR functions,(A paraître).

[6] M.S. Baouendi & F. Treves : About the holomorphic extension of CR functions on real hypersurfaces in complex space, Duke Math. J. 51 (1984), 77-107.

[7] S. Bell & E. Ligocka : A simplification and extension of Fefferman's theorem on biholomorphic mappings, Inventiones Math. 57 (1980), 283-289.

[8] T. Bloom & I. Graham : On "type" conditions for generic submanifolds of C^n , Inventiones Math. 40 (1977), 217-243.

[9] M. Derridj : Le principe de réflexion en des points de faible pseudoconvexité pour des applications holomorphes propres, Inventiones Math. 79 (1985).

[10] M. Derridj : Prolongement local d'applications holomorphes propres en des points faiblement convexes, to appear.

[11] K. Diederich & J.E. Fornaess : Pseudoconvex domains with real analytic boundary, Annals Math. 107 (1978), 371-384.

[12] K. Diederich & S.M. Webster : A reflection principle for degenerate real hypersurfaces. Duke Math. J. 47 (1980), 835-843.

[13] C.K. Han : Analyticity of CR equivalence between some real hypersurfaces in C^n , with degenerate Levi form, Inv. Math. 23 (1983), 51-69.

[14] J.J. Kohn : Boundary behavious of $\bar{\partial}$ on weakly pseudoconvex manifolds of dimension two. J. Diff. Geom. 6 (1972), 523-542.

[15] H. Lewy : On the boundary behaviour of holomorphic mappings, Acad. Naz. Lincei 35 (1977).

[16] L. Nirenberg, S.M. Webster & P. Yang : Local boundary regularity of holomorphic mappings, Comm. Pure Applied Math. 33 (1980), 305-338.

[17] S.I. Pincuk : On the analytic continuation of holomorphic mappings, Mat. Sbornik 98 (140) (1975), 416-435 ; Math. USSR Sbornik 27 (1975), 375-392.

***