L. BOUTET DE MONVEL

Opérateurs à bicaractéristiques périodiques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1984-1985), exp. n° 20, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1984-1985____A20_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E B O N Y - S J Ö S T R A N D - M E Y E R 1 9 8 4 - 1 9 8 5

OPERATEURS A BICARACTERISTIQUES PERIODIQUES

par L. BOUTET DE MONVEL

Exposé n°XX

18 Décembre 1984

I. ENONCE DU PROBLEME

Soit M une variété compacte, A un opérateur pseudo-différentiel hermitien elliptique d'ordre 1, de symbole $\sigma_A = a > 0$. On fait sur A les hypothèses suivantes :

(1.1) Les bicaractéristiques de A sont toutes périodiques, de plus petite période 2π. Autrement dit le champ hamiltonien H_a ($= \Sigma \frac{\partial a}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial a}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ en coordonnées locales) définit une action libre, symplectique, du groupe du cercle $U(1)$ sur $T^*M \setminus \{0\}$ (fibré cotangent privé de la section nulle).

(1.2) L'intégrale du symbole sous principal sub_A de A sur les orbites de H_a est constante (voir plus bas pour la définition de sub_A).

L'hypothèse (1.1) implique que l'opérateur $\exp 2i\pi A$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0, de symbole $\exp 2i\pi(\frac{1}{2\pi} \int sub_A + \frac{\gamma}{4})$, où dans l'exposant, $\frac{1}{2\pi} \int sub_A$ désigne la moyenne de sub_A sur l'orbite passant par le point donné, et γ (indice de Maslov) est un entier dont la définition est rappelée au n°7.

L'hypothèse (1.2) implique que le symbole de $\exp 2i\pi A$ est constant si $T^*M-\{0\}$ est connexe.
Par suite (cf.[4]) si on note c la constante $\frac{1}{2\pi}\int sub_A + \frac{\gamma}{4}$, il existe un opérateur pseudo-différentiel R de degré -1 tel que $\exp 2i\pi(A-c-R) = Id$.

Il en résulte que les valeurs propres de A se concentrent autour des nombres en progression arithmétique

(1.3) $$c + n \ , \ n \text{ entier} \geqslant 0 \ , \ c = \frac{1}{2\pi} \int sub_A - \frac{\gamma}{4}$$

Dans [4] , Y. Colin de Verdière montre en outre que le nombre μ_n de valeurs propres de A voisines de $c + n$ vérifie pour n grand.

(1.4) μ_n = nombre de valeurs propres voisines de $c + n = P(n)$ $(n >> 0)$

où $P(n)$ est un polynôme. Dans [2] (cf. aussi [3]) nous avons montré qu'à un décalage entier près, le polynôme $P(n)$ est donné par une formule analogue à la formule de Riemann-Roch (formule (2.1) ci-dessous), et conjecturé que le décalage était nul. C'est ce dernier point qui fait l'objet de cet exposé. La méthode ne comporte rien d'essentiellement nouveau, sauf peut être, en ce qui me concerne, une meilleure compréhension du fibré de Maslov et du calcul symbolique des distributions Lagrangiennes (n°5-6).

2. FORMULE DE RIEMANN-ROCH

Soit N une variété de contact orientée compacte. N est donc munie d'une classe de 1-formes de contact toutes proportionnelles dans un rapport > 0 ; ou de façon équivalente on s'est donné dans $T^*N \setminus \{0\}$ un sous fibré en demi-droites Σ , symplectique pour la structure induite par celle de T^*N .

On se donne sur N une action libre du groupe $U(1)$. On suppose cette action elliptique positive, i.e. on a $< \frac{\partial}{\partial\theta}, \omega >> 0$ si $\frac{\partial}{\partial\theta}$ est le générateur infinitésimal, et ω une forme de contact de N . Quitte à remplacer ω par $< \omega, \frac{\partial}{\partial\theta} >^{-1} \omega$, on supposera $< \omega , \frac{\partial}{\partial\theta} > = 1$.

Sous ces hypothèses on a démontré dans [2] qu'il existe sur N une structure de Toeplitz invariante par $U(1)$. Autrement dit il existe un sous-espace $\mathcal{O}_\Sigma \subset L^2(M)$ invariant par $U(1)$, et tel que le projecteur orthogonal S sur $\mathcal{O}_\Sigma$ soit un opérateur intégral de Fourier à phase complexe "adapté" à Σ ; en particulier S est de degré $-\infty$ en dehors de Σ (cf.[2]).

Soit B la restriction à $\mathcal{O}_\Sigma$ de l'opérateur différentiel $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}$: c'est un opérateur de Toeplitz ([1],[2]) elliptique d'ordre 1, positif, et on a évidemment $\exp 2i\pi B = \mathrm{Id}$. Comme B est elliptique positif, $E_n = \mathrm{Ker}(B-n)$ est de dimension finie pour tout n , nul pour $n << 0$. Il est bien sûr égal au sous espace de $\mathcal{O}_\Sigma$ formé des fonctions qui se transforment selon le caractère $e^{ni\theta}$ de $U(1)$. Dans [2] la dimension μ_n de E_n est calculée en appliquant la formule de Atiyah et Singer à un système elliptique convenable sur la variété quotient $Y = N/U(1)$. Rappelons brièvement le résultat.

Tout d'abord N est un fibré principal de groupe $U(1)$, de base $Y = N/U(1)$. La forme de Liouville (forme de contact de M telle que $< \omega , \frac{\partial}{\partial\theta} > = 1$) est invariante par $U(1)$, donc c'est une forme de connexion. La courbure de cette connexion est la 2-forme σ sur Y dont l'image réciproque sur N est $d\omega$. C'est une forme symplectique, de sorte que Y est munie d'une structure symplectique, et possède en particulier une classe de Todd τ_y.

Soit L le fibré en droites sur Y associé à N. Les sections de L^n (puissance tensorielle) s'identifient aux fonctions numériques f sur N telles que $f(m.e^{i\theta}) = e^{ni\theta}f(m)$. Comme la courbure $(-n\sigma)$ de L^n est symplectique pour $n \neq 0$, L^n est non trivial pour $n \neq 0$.

On démontre dans [2] qu'on a $\mu_n = \dim E_n = 0$ pour $n << 0$ (n négatif, grand), et pour $n >> 0$

$$(2.1) \qquad \mu_n = \dim E_n = \int_y \exp n\, C(L) \, . \, \tau_y$$

ou $C(L)$ est la classe de Chern de L (c'est à dire la classe de cohomologie de la courbure σ, au facteur $-(2\ )^{-\dim Y}$ près), et l'intégrale signifie : valeur d'une classe de cohomologie (rationnelle) sur la classe d'homologie $[Y]$. Nous renvoyons à [2] pour la démonstration de cette formule. Dans le cas où N est l'intersection de la sphère unité de $\mathbb{C}^N$ et d'un cône Z holomorphe, lisse en dehors de l'origine, et le groupe $U(1)$ opère par homothétie $(e^{i\theta},z) \to e^{i\theta}z$, la variété $Y = N/U(1) = Z/\mathbb{C}^*$ est la variété lisse projective définie par Z, $L = O(1)$ le fibré ample canonique. Les sections de L^n sont les fonctions holomorphes homogènes de degré n sur Z. Pour $n >> 0$ E_n est l'ensemble des restrictions à Z des polynômes homogènes de degré n, et la formule (2.1) redonne comme cas particulier la "formule de Hilbert-Samuel" comptant la dimension de E_n.

3. REDUCTION AU CAS DES OPERATEURS DE TOEPLITZ

Pour le problème décrit au n°1, l'idée est de se ramener au modèle Toeplitz du n°2 pour lequel le calcul est complet. On fait ceci ainsi : avec les notations du n°1, soit N la sphère cotangente de M, identifiée à la surface de niveau $\sigma_A = 1$ de T^*M. C'est une variété de contact orientée dont la forme de contact ω est la restriction de la forme de Liouville de M ($\omega = \Sigma\, \xi_j\, dx_j$ en coordonnées locales). Le cône symplectique $\Sigma \subset T^*N$ correspondant est canoniquement isomorphe à T^*M. Le groupe $U(1)$ opère sur N et respecte la structure de contact (il respecte la forme de Liouville et les surfaces de niveau de σ_A). Il existe donc une structure de Toeplitz $\mathcal{O}_\Sigma$ sur N invariante par U(1). Comme au n°2 nous noterons B l'opérateur de Toeplitz restriction à $\mathcal{O}_\Sigma$ du générateur infinitésimal $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}$.

D'après [2] il existe un opérateur intégral de Fourier à phase complexe H adapté à l'application identique : $T^*M \to \Sigma$, et d'image contenue dans $\mathcal{O}_\Sigma$. Celui-ci se comporte comme un O.I.F. elliptique, i.e. il est d'indice fini : $C^\infty(M) \to \mathcal{O}_\Sigma$ et transporte les opérateurs pseudo-différentiels de M sur les opérateurs de Toeplitz de N . Comme $\mathcal{O}_\Sigma$ est stable par U(1) il existe un opérateur pseudo-différentiel C sur M tel que

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta} H = H\,C \tag{3.1}$$

mod. un opérateur de rang fini, ou de degré $-\infty$.

Bien entendu le nombre de valeurs propres de C proches de n est le même que pour $B = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}$, donc donné par la formule de Riemann-Roch (2.1). Par ailleurs comme H est adapté à l'application identique $T^*M \to \Sigma$, on a $\sigma_C = \sigma_A$ (ces deux symboles ont le même champ hamiltonien). Ainsi C-A est de degré $\leqslant 0$. Tout notre problème revient donc au calcul de sub_C . Plus précisément il s'agit de prouver dans notre situation qu'on a

$$\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{sub}_C = -\frac{1}{4}\gamma \tag{3.2}$$

l'intégrale étant prise sur les orbites de U(1), et γ désignant l'indice de Maslov (n°7).

4. SYMBOLE SOUS-PRINCIPAL

Soit M une variété C^∞ , A un opérateur pseudo-différentiel opérant sur les demi-densités $\Omega_{1/2}(\mu)$. Si A est d'ordre m , le symbole de A est la fonction numérique, C^∞ homogène de degré m sur T^*M-0 , caractérisée par

$$e^{-it\varphi} A(e^{it\varphi}\omega) = t^m \sigma_A(d\varphi)\omega + O(t^{m-1}) \tag{4.1}$$

si ω est de classe C_0^∞ , $d\varphi \neq 0$ sur supp ω .

Rappelons qu'on a

$$\begin{aligned} \sigma(AB) &= \sigma(A)\,\sigma(B) \\ \sigma([AB]) &= \frac{1}{i}\{\sigma(A), \sigma(B)\} \end{aligned} \tag{4.2}$$

où { } est le crochet de Poisson.

Le symbole sous-principal sub_A est la fonction numérique C^∞ , homogène de degré m-1, sur T*M-0 , caractérisée par

$$(4.3)\quad \frac{1}{2}\,[e^{-it\varphi}A\, e^{it\varphi} + e^{it\varphi}\, {}^tA\, e^{-it\varphi}]\omega = (t^m\sigma_A(d\varphi) + t^{m-1}\ sub_A(d\varphi)) + O(t^{m-2})$$

avec les mêmes hypothèses sur φ et ω . Si dans un système de coordonnées locales le symbole total de A admet pour développement asymptotique $\sigma_A^{tot} = a_m + a_{m-1} + \ldots$, on a

$$(4.4)\qquad sub_A(x,\xi) = a_{m-1}(x,\xi) - \frac{1}{2i}\,\Sigma\,\frac{\partial^2 a_m}{\partial X_j \partial \xi_j}\,(x,\xi)$$

Le symbole sous-principal jouit en outre des propriétés suivantes (pour lesquelles nous renvoyons à [6] , ou que nous laissons au lecteur) :

$$(4.5)\qquad sub(AB) = \sigma_A\, sub_B + sub_A\ \sigma_B + \frac{1}{2i}\ \{\sigma_A\ ,\ \sigma_B\}$$

$$(4.6)\qquad sub([A,B]) = \frac{1}{i}\ \{\sigma_A, sub_B\} - \frac{1}{i}\,\{\sigma_B\ ,\ sub_A\}$$

Dans la suite de l'exposé nous supposerons que A opère sur les demi-densités, car c'est dans ce cadre que le symbole sous-principal est défini de façon intrinsèque. Si A opère sur les fonctions, on se ramène à ce cas en choisissant une mesure de densité C^∞ positive.

5. CONNEXIONS D'ORDRE SUPERIEUR

Soit M une variété C^∞ , E un fibré vectoriel C^∞ sur M . Une connexion d'ordre k sur E est un relèvement à E des automorphismes infinitésimaux de M , qui est un opérateur différentiel d'ordre k ; autrement dit une application qui à tout champ de vecteurs X sur M associe un opérateur différentiel linéaire d'ordre 1, L_x, sur les sections de E , de sorte que

(5.1) $L_x(\varphi f) = X(\varphi)f + \varphi\ L_x(f)$ pour tous φ , fonction numérique, f section de E , X champ de vecteurs

(5.2) $[L_x\ ,\ L_y] = L_{[xy]}$ pour tous champs X , Y

(5.3) $X \to L_x$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant$ k

Ainsi une connexion d'ordre 0 n'est autre qu'une connexion intégrable au sens usuel. Il est possible de classifier à isomorphisme près les connexions d'ordre $\leqslant k$: notons R_k le fibré des repères d'ordre $\leqslant k$ de M (jets d'ordre de difféomorphismes de $(\mathbb{R}^n, 0)$ dans M - $n = \dim M$) ; c'est un fibré principal de groupe G_k, groupe des jets d'ordre k d'automorphismes de $(\mathbb{R}^n, 0)$. Se donner une connexion d'ordre k sur E équivaut à se donner une action sur E du groupoïde Γ sur M quotient par G_k du groupoïde des classes homotopes de chemins de R_k.

Nous nous intéressons au cas où E est de rang 1. Dans ce cas toute connexion se met, localement et pour un choix convenable de repères, sous la forme

$$L_x(f) = (X + s \operatorname{div} X).f \tag{5.4}$$

où s est un nombre complexe. En particulier une telle connexion est d'ordre $\leqslant 1$. (La raison est que le groupe $GL(1)$ est commutatif, et que tout champ de vecteurs X tel que X et $\operatorname{div} X$ s'annulent en un point x est au voisinage de ce point le commutateur de deux champs nuls en x).

Si M est connexe le nombre s est un invariant de la connexion, que nous appellerons type. Il est caractérisé par l'égalité

$$L_{\varphi X} = \varphi L_X + sX(\varphi) \tag{5.5}$$

pour X champ de vecteurs, φ une fonction numérique.

Les opérations usuelles sur les fibrés vectoriels (dual Hom, $\otimes$, etc...) se prolongent aux connexions d'ordre supérieur. En particulier les connexions d'ordre $\leqslant 1$ sur les fibrés de rang 1 forment un groupe P pour la loi $\otimes$:

$$L_x^{E\otimes F}(e \otimes f) = L_x^E e \otimes f + e \otimes L_x^F f \tag{5.6}$$

L'élément neutre est le fibré trivial muni de la connexion triviale, l'opposé est le dual.

Il est immédiat que le type de $E \otimes F$ est somme de ceux de E et de F. Le type définit donc un homomorphisme du groupe P dans $\mathbb{C}^+$, dont le noyau P_o est le groupe des connexions intégrables (d'ordre 0). Grâce au principe de classification suggéré ci-dessus, on voit que l'image est ou bien $\mathbb{C}$ tout entier, ou bien de la forme $\frac{1}{d}\mathbb{Z}$, d entier.

Si E est un fibré de rang 1 et L^n une connexion d'ordre $\leqslant 1$ sur $E^{\otimes n}$, observons qu'il existe une unique connexion L d'ordre $\leqslant 1$ sur E telle que $(E,L)^{\otimes n} = (E^{\otimes n},L^n)$; elle est caractérisée par l'égalité $L^n_X \varphi = n\varphi^{n-1} L_X \varphi$ pour X champ, φ section de E .

Exemples. Soit M une variété complexe, Ω le fibré de rang 1 des formes de degré maximum. La dérivation de Lie munit Ω d'une connexion d'ordre 1, de type 1 . Toute connexion de type entier m est donc isomorphe à $\Omega^m \otimes (E_o,L_o)$ où (E_o,L_o) est une connexion intégrable (d'ordre 0).

Soit M une variété réelle, $|\Omega|^s$ le fibré des s-densités (formes tordues si s = 1). Ici encore la dérivation de Lie munit $|\Omega|^s$ d'une connexion d'ordre 1, de type s . Ici $s \in \mathbb{C}$ est arbitraire, et tout fibré de rang 1 sur M muni d'une connexion d'ordre $\leqslant 1$ est isomorphe à une connexion de la forme $|\Omega|^s \otimes (E_o,L_o)$, (E_o,L_o) d'ordre 0 .

6. FIBRE DE MASLOV. SYMBOLE DES DISTRIBUTIONS LAGRANGIENNES

Soit E un fibré vectoriel symplectique réel sur un espace topologique paracompact X . Notons $\mathcal{A}_+(E)$ le fibré de base X des Lagrangiennes complexes positives de E : un point de la fibre en x de $\mathcal{A}_+$ est un sous-espace complexe de $E_x \otimes \mathbb{C}$, isotrope de dimension $\frac{1}{2} \dim E_x$, et positif i.e. $i[\bar{z},z] \geqslant 0$ sur ce sous-espace, où $[,]$ désigne la forme symplectique de $E \otimes \mathbb{C}$. La fibre de $\mathcal{A}_+$ est contractile ; par exemple elle s'identifie à la boule unité fermée de l'espace des formes quadratiques sur E_I si I est une structure complexe positive adaptée à E , et E_I l'espace vectoriel complexe hermitien qui en résulte ($I^2 = -\mathrm{Id}_E$, $[Ix,y] = - [x,Iy]$ et $\langle x|x\rangle = [x,Ix] > 0$ pour $x, y \in E$, $x \neq 0$).

Soit V une polarisation de E , i.e. un sous-fibré Lagrangien réel, définissant une section réelle de $\mathcal{A}_+$. Comme la fibre de $\mathcal{A}_+$ est contractile il existe un fibré L^V sur $\mathcal{A}_+$, de rang 1 , muni de deux isomorphismes compatibles

(6.1) $$L^V_{|V} \xrightarrow[\sim]{a} |\Omega_V|^{1/2}$$

(6.2) $$(L^V)^{\otimes 4} \xrightarrow[\sim]{b} \Omega_\Lambda^{\otimes 2}$$

où $|\Omega_V|^{1/2}$ désigne le fibré complexe de rang 1 dont les sections sont les demi-densités de V . et Ω_Λ est le fibré des formes de degré maximum du fibré canonique Λ de $\mathcal{A}_+$ (dont la fibre au point $\lambda \in \mathcal{A}_+$ est le sous-espace

Lagrangien λ de $E \otimes \mathbb{C}$). La condition de compatibilité est $b_{|V} = a^{\otimes 4}$.
Les conditions ci-dessus déterminent L^V , a et b à isomorphisme unique près.

Soit M une variété C^∞ , $\Lambda \subset T^*M-\{0\}$ une variété complexe Lagrangienne positive conique, au sens de [8] : Λ correspond à un idéal de fonctions C^∞ à valeurs complexes sur T^*M , et localement c'est la variété lagrangienne associée à une phase de partie imaginaire positive ; par exemple dans un système de coordonnées locales convenables, Λ est la variété des zéros des fonctions $x_j - \frac{\partial u}{\partial \xi_j}$, où $u = u(\xi)$ est une fonction C^∞ homogène de degré 1 , avec $\operatorname{Im} u \leqslant 0$, correspondant à la phase $x.\xi - u(\xi)$.

Avec les notations ci-dessus, soit E la restriction à Λ du fibré tangent $T(T^*M)$. Il est muni canoniquement d'une polarisation V , dont la fibre est le sous-espace vertical de $T(T^*M)$, i.e. tangent à la fibre de la projection $T^*M \to M$. Le fibré tangent complexe $T\Lambda \subset E \otimes \mathbb{C}$ définit une section de $\mathcal{L}_+(E)$.

Par définition le fibré de Maslov μ_Λ est le fibré de rang 1 sur Λ obtenu en restreignant L^V à la section $T\Lambda$ de $\mathcal{L}_+(E)$. Il est muni d'un isomorphisme

$$(6.3) \qquad \mu_1^{\otimes 4} \xrightarrow{\sim} \Omega_1^{\otimes 2}$$

où Ω_1 est le fibré des formes de degré maximum sur Λ . Comme Ω_1 est muni d'une connexion d'ordre 1 et de type 1 , μ_Λ est muni d'une connexion d'ordre 1 et de type 1/2 . Autrement dit à tout champ de vecteurs X tangent à Λ est associé un opérateur différentiel L_x d'ordre 1 sur les sections de μ_Λ , de sorte qu'on ait sur Λ

$$(6.4) \qquad \begin{aligned} L_x(\varphi f) &= X(\varphi) + \varphi L_x(f) \\ L[X,Y] &= [L_x , L_y] \\ L_{\varphi X} &= \varphi L_x + \frac{1}{2} X(\varphi) \end{aligned}$$

pour X,Y champs de vecteurs tangents à Λ , f section de μ_1 , φ fonction numérique.

<u>Remarque</u> : le fibré de Maslov μ_Λ d'une variété lagrangienne positive est toujours trivialisable en tant que fibré vectoriel ; mais sa connexion ne

l'est en général pas.

D'après [8] ([6] dans le cas réel), on associe à Λ une classe de distributions lagrangiennes : pour $s \in \mathbb{C}$ notons $\mathcal{D}^s_\Lambda$ l'espace des demi-densités distributions qui sont localement de la forme

$$f = \sqrt{|dx|} \int e^{i\varphi(x,\theta)} a(x,\theta)\, d\theta \tag{6.5}$$

où φ est une phase définissant Λ ($\mathrm{Im}\varphi \geqslant 0$) et $a d\theta$ est une amplitude somme asymptotique d'amplitudes homogènes

$$a d\theta \sim \sum_{j=o}^{\infty} a_{s+k/2-j}\, d\theta \tag{6.6}$$

où $(a_\sigma d\theta)$ est homogène de degré σ pour les homothéties $\theta \to \lambda\theta$, et k est le nombre de variables θ .

D'après [6] , [8] le symbole $\sigma(f)$ est défini de façon naturelle comme section homogène de degré s de μ_Λ . Si P est un opérateur pseudodifférentiel, on a

$$\sigma(Pf) = \sigma(P)_{|\Lambda} \,.\, \sigma(f) \tag{6.7}$$

Si de plus $\sigma(P)$ est nul sur Λ , le champ hamiltonien H_p est tangent à Λ ; Pf est de degré $\deg P + \deg f - 1$ et on a alors

$$\sigma(Pf) = \left(\frac{1}{i} L_{Hp} + \mathrm{sub}_P\right) \sigma(f) \tag{6.8}$$

Cf. aussi [7] pour une démonstration de ces formules.

7. INDICE DE MASLOV. FIN DE LA DEMONSTRATION

Soit Ω un fibré complexe de rang 1 sur un espace connexe paracompact X , muni d'une action du groupe $U(1)$. Si σ est une section sans zéro, l'indice $\gamma(\sigma)$ est le nombre d'enroulements de $(e^{i\theta})^* \sigma . \sigma^{-1}$, i.e. l'accroissement, entier et indépendant de x , de $\frac{1}{2\pi} \arg(\sigma(e^{i\theta}x).\sigma^{-1}(x))$ ou encore (si σ est différentiable)

$$\gamma(\sigma) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\text{orbite}} \sigma^{-1} \frac{\partial\sigma}{\partial\theta} \tag{7.1}$$

Ce nombre est nul si Ω est le complexifié d'un fibré réel invariant par $U(1)$, et σ est réelle.

Explicitons la condition rencontrée au n°2 .

(7.2) Pour tout entier $j \neq 0$, le fibré $L^{\otimes j}$ est non trivial, L désignant le fibré de rang 1 sur $Y = X/U(1)$ associé au fibré principal, de groupe $U(1)$, $X \to Y$.

Si cette condition est satisfaite, le nombre d'enroulements d'une fonction numérique non nulle est toujours zéro, de sorte que les sections sans zéro de Ω ont toutes même indice.

Soit maintenant E un fibré symplectique réel sur X . Choisissons une structure complexe positive I comme au n°6 (il en existe, et deux telles structures sont homotopes). Notons E_I le fibré complexe hermitien qui en résulte. L'application $x + iy \to x + Iy$ de $E \otimes \mathbb{C}$ dans E_I induit une bijection $\Lambda \to E_I$ pour tout sous-fibré lagrangien complexe positif Λ , d'où aussi une bijection entre fibrés de rang 1 : $\Omega^2_\Lambda \to \Omega^2_{E_I}$.

Si Λ est réel (polarisation de E), Ω^2_Λ est réel orienté et a une section canonique (positive de longueur 1), dont on notera δ l'image dans $\Omega^2_{E_I}$.

Si (E,X) est muni d'une action de $U(1)$ on peut choisir I invariant (c'est encore unique à homotopie près). Alors $U(1)$ opère sur E_I , et si Λ comme ci-dessus est invariante, la bijection $\Lambda \to E_I$ est équivariante.

Si V est une polarisation de E , l'indice de Maslov de l'action de $U(1)$ sur E , par rapport à V , est l'indice $\gamma(\delta_V)$. Si la condition (7.2) est remplie, c'est aussi l'indice de n'importe quelle section de $\Omega^2_{E_I}$. Il est nul si la polarisation V est invariante.

Revenons aux notations des n°1, 3 . Par définition l'indice de Maslov γ introduit au n°1 est l'indice de l'action de $U(1)$ sur $T(T^*M-\{0\})$, par rapport à la polarisation verticale. Observons qu'ici la condition (7.2) est satisfaite.

L'action de $U(1)$ a pour générateur infinitésimal le champ hamiltonien H_A . Observons que le transposé ${}^tA$ donne naissance à une autre action du groupe $U(1)$ (symétrique), pour laquelle on vérifie que l'indice de Maslov est le même.

Nous démontrons maintenant (3.2). Soit K le noyau de l'opérateur H du n°3 : c'est une distribution lagrangienne sur $N \times M$, de symbole k . L'équation (3.1) se traduit par

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta} - {}^tC\right) K = 0 \tag{7.3}$$

La lagrangienne (complexe,positive) de K est donc contenue dans $\mathrm{Car}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta} - {}^tC\right)$.

Notons X le champ hamiltonien de $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta} - {}^tC$: X engendre une action de $U(1)$ sur $T^*(N\times M)$, produit de l'action de générateur $\frac{\partial}{\partial\theta}$ sur T^*N , et de l'opposée de l'action de générateur H_{t_C} sur T^*M . Comme sub $\frac{\partial}{\partial\theta} = 0$, on a

$$(7.4)\qquad (\frac{1}{i} L_X - \mathrm{sub}_{t_C})\, k = 0$$

d'où

$$(7.5)\qquad \mathrm{sub}_{t_A} = \frac{1}{i} k^{-1} L_X k$$

$$(7.6)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{\text{orbite}} \mathrm{sub}_{t_A} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\text{orbite}} k^{-1} L_x k$$

Comme H est elliptique, k est une section non nulle de μ_Λ et k^4 est une section non nulle de Ω^2_Λ . Comme Λ est invariante par $U(1)$, le deuxième membre de (7.6) est égal à $\frac{1}{4}\gamma'$, où γ' est l'indice de Maslov de l'action de $U(1)$ sur $T(T^*(N\times M))$ de générateur X . Comme on a vu, celle-ci est décomposée. L'action sur $T(T^*N)$ est d'indice nul car la fibration verticale de T^*N est invariante. L'action sur $T(T^*M)$ est l'opposée de l'action de générateur H_{t_C} , d'où $\gamma' = -\gamma$. Ceci achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE :

[1] L. Boutet de Monvel : On the index of Toeplitz operators...Inventiones Math. 50 (1979) 249-272.

[2] L. Boutet de Monvel, V. Guillemin : The spectral theory of Toeplitz operators. Ann. Math. Studies 99 (1981).

[3] L. Boutet de Monvel : Nombre de valeurs propres d'un opérateur elliptique. Sém. Bourbaki n°532, nov. 1978.

[4] Y. Colin de Verdière : Sur le spectre des opérateurs à bicaractéristiques périodiques. Comm. Math. Helv. 54 (1979) 508-522.

[5] J.J. Duistermaat, L. Hörmander : Fourier Integral operators II.Acta Math. 128 (1972) 183-269.

[6] L. Hörmander : Fourier Integral Operators. Acta Math 127 (1971) 79-183.

[7] L. Hörmander : The analysis of linear partial differential Operators , vol. IV . Springer Verlag.

[8] A. Melin, J. Sjöstrand : Fourier Integral operators with complex phase, dans Lect. Notes n°459 (F.I.O. & P.D.E.) 120-223.

*
* *
*