Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

K. Taira

Le principe du maximum et l'hypoellipticité globale

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1984-1985), exp. nº 1, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1984-1985____A1_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE BONY-SJÖSTRAND-MEYER 1984-1985

LE PRINCIPE DU MAXIMUM ET L'HYPOELLIPTICITE GLOBALE

par K. TAIRA

Exposé n° I

23 Octobre 1984

Nous dédions cet exposé à la mémoire du professeur Charles GOULAOUIC

§ 0. INTRODUCTION.

Le but de cet exposé est d'éclaircir le mécanisme de la propagation du maximum pour des opérateurs différentiels elliptiques dégénérés du second ordre, et de donner un pont entre l'approche analytique et l'approche probabiliste au principe du maximum. Il y a une relation étroite entre le mécanisme de la propagation du maximum et le phénomène de diffusion de la chaleur à partir d'une source ponctuelle. De plus, il y a une relation étroite entre le principe du maximum et la propagation des singularités, car on peut considérer la masse de Dirac comme une source ponctuelle. C'est pourquoi le titre de cet exposé est "le principe du maximum et l'hypoelliptіcité globale".

§ 1. PRINCIPE DU MAXIMUM PRECISE

Soit D un ouvert connexe d'un espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Le résultat suivant est bien connu sous le nom de principe du maximum fort pour le laplacien $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial^2/\partial x_i^2$:

(1.1) Si $u \in C^2(D)$, $\Delta u \geqslant 0$ dans D et u atteint son maximum en un point de D , alors u est une constante.

Le but de ce paragraphe est de découvrir le mécanisme analytique de la propagation du maximum (le principe du maximum précisé) pour des opérateurs différentiels elliptiques dégénérés du second ordre, en expliquant le résultat (1.1).

Soit A un opérateur différentiel du second ordre à coefficients réels tel que

$$(1.2) \qquad A = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

où les coefficients a^{ij} , b^i satisfont aux conditions suivantes :

1°) Les a^{ij} sont des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$ dont toutes les dérivées d'ordre $\leqslant 2$ sont bornées dans $\mathbb{R}^n$, et la matrice (a^{ij}) est symétrique et définie non-négative sur $\mathbb{R}^n$.

2°) Les b^i sont des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ dont toutes les dérivées sont bornées dans $\mathbb{R}^n$.

Nous nous intéressons alors au :

<u>Problème</u> : Soient D un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ et x un point de D . Alors déterminer le plus grand sous-ensemble $D(x)$ de D connexe et relativement fermé, contenant x , tel que

(1.3) Si $u \in C^2(D)$, $Au \geqslant 0$ dans D , $\sup_D u = M < \infty$

et $u(x) = M$, alors $u \equiv M$ partout dans $D(x)$.

L'ensemble $D(x)$ est dit l'<u>ensemble de propagation</u> de x dans D .

On va donner une description intrinsèque de l'ensemble $D(x)$ en termes de vecteurs sous-unitaires (subunit) introduits par Fefferman-Phong [4] .

Suivant Fefferman-Phong [4] , on dit qu'un vecteur tangent $X = \sum_{j=1}^{n} \gamma^j \frac{\partial}{\partial x_j}$ en $x \in D$ est <u>sous-unitaire</u> (pour A) si on a

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \gamma^j \eta_j\right)^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\, \eta_i \eta_j \quad , \quad \eta = \sum_{j=1}^{n} \eta_j\, dx_j \in T_x^* D$$

où $T_x^* D$ est l'espace cotangent à D en x . Notons que cette notion ne dépend pas du choix de la carte locale.
On fait un changement de variables de sorte que la matrice (a^{ij}) soit diagonalisée en x :

$$(a^{ij}(x)) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix} , \quad \lambda_1 > 0 , \ldots , \lambda_r > 0$$

où r est le rang de $(a^{ij}(x))$. Alors il est facile de voir qu'un vecteur tangent $X = \sum_{j=1}^{n} \gamma^j \frac{\partial}{\partial x_j}$ est sous-unitaire si et seulement si X est dans l'ellipsoïde de dimension r :

$$(1.4) \qquad \frac{(\gamma^1)^2}{\lambda_1} + \dots + \frac{(\gamma^r)^2}{\lambda_r} \leqslant 1 \;, \quad \gamma^{r+1} = \dots = \gamma^n = 0 \;.$$

Une <u>trajectoire sous-unitaire</u> est un chemin lipschitzien $\gamma : [t_1, t_2] \to D$ tel que sa dérivée $\dot{\gamma}(t)$ soit sous-unitaire en $\gamma(t)$ pour presque tout t . Si $\dot{\gamma}(t)$ est sous-unitaire, alors il en est de même de $-\dot{\gamma}(t)$; par conséquent les trajectoires sous-unitaires ne sont pas orientées.

On pose :

$$X_0(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(b^i(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a^{ij}}{\partial x_j}(x)\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \;.$$

Notons que le champ de vecteurs X_0 est la partie dite sous-principale de A en termes de la théorie des équations aux dérivées partielles, et qu'il est défini de la manière invariante aux points où la matrice (a^{ij}) est dégénérée.

Une <u>trajectoire de "drift"</u> est une courbe intégrable de X_0 , et elle est orientée dans le sens d'accroissement de t .

On peut maintenant énoncer le

<u>Théorème 1</u> : L'ensemble de propagation $D(x)$ de x est la fermeture dans D de l'ensemble de tous les points qui peuvent être joint à x par une chaîne finie de trajectoires soit sous-unitaires soit de "drift" .

Le théorème 1 dit que si la matrice (a^{ij}) est non-dégénérée en x , alors le maximum se propage en un voisinage de x ; mais si la matrice (a^{ij}) est dégénérée en x , alors le maximum se propage par les trajectoires sous-unitaires seulement en l'ellipsoïde mince de dimension $\mathrm{rank}(a^{ij}(x))$ (cf.(1.4)). On voit ainsi pourquoi le principe du maximum fort est vrai pour le laplacien Δ .

Dans [13], Stroock et Varadhan ont caractérisé le <u>support</u> du processus de diffusion correspondant à l'opérateur A (ce qui est la fermeture de l'ensemble de toutes les trajectoires d'une particule markovienne avec générateur A) et, comme application, ils ont donné une description de l'ensemble de propagation.

Notre ensemble de propagation D(x) coïncide avec l'ensemble de propagation de Stroock-Varadhan [13] . Plus précisément on a le

Théorème 2 : L'ensemble de propagation D(x) du théorème 1 coïncide avec la fermeture dans D de l'ensemble de tous les points $\Phi(t)$, $t \geq 0$ où Φ : $[0,t] \to D$ est un chemin pour lequel il existe une fonction ψ : $[0,t] \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 par morceaux telle que

$$\dot{\Phi}^i(s) = x_i + \int_0^s \sum_{j=1}^n a^{ij}(\Phi(\tau))\, \dot{\psi}^j(\tau)\, d\tau$$

$$+ \int_0^s [\dot{b}^i(\Phi(\tau)) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial a^{ij}}{\partial x_j}(\Phi(\tau))]\, d\tau \quad , \; 0 \leq s \leq t \; .$$

Remarque 1 : D'après le théorème 4.1 de [13] , on voit que notre ensemble de propagation D(x) est le plus grand sous-ensemble de D ayant la propriété (1.3) dans un sens plus faible (cf. aussi [9] , chap.VI , théorème 8.3).

Le théorème 2 dit que l'ensemble de propagation D(x) coïncide avec la fermeture dans D de l'ensemble de tous les points où une particule markovienne avec générateur A partant de x peut se diffuser.

Maintenant on considère le cas où l'opérateur A donné par (1.2) peut être écrit de la forme

$$A = \sum_{k=1}^d Y_k^2 + Y_0 \tag{1.5}$$

où Y_k , $1 \leq k \leq d$, sont des champs de vecteurs réels de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$ et Y_0 est un champ de vecteurs réels de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.

Dans [7] , Hill a donné une description de l'ensemble de propagation, mais sa démonstration n'était pas correcte. Le résultat de Hill a été complété et étendu au cas non-linéaire par Redheffer [11] (cf. aussi Bony [2]).

Notre ensemble de propagation D(x) coïncide avec l'ensemble de propagation de Hill [7] . Plus précisément on a le

Théorème 3 : Supposons que l'opérateur A est de la forme (1.5). Alors l'ensemble de propagation D(x) du théorème 1 coïncide avec la fermeture dans D de l'ensemble de tous les points qui peuvent être joint à x par une chaîne finie de courbes intégrales de $\{\pm Y_k\}_{k=1}^d$ ou de Y_0 .

Remarque 2 : Le théorème 3 est démontré implicitement par Stroock et Varadhan (cf. [12] , théorème 5.2 et [13] , théorème 3.2), car le support du processus de diffusion correspondant à l'opérateur A ne dépend pas de l'expression de A .

Les détails de ce paragraphe seront publiés dans [14] .

§ 2. HYPOELLIPTICITE GLOBALE

Le but de ce paragraphe est, en considérant quelques exemples, d'expliquer une relation cachée entre la propagation des singularités et le phénomène de diffusion, et de proposer une conjecture concernant une caractérisation de l'hypoellipticité globale pour des opérateurs différentiels elliptiques dégénérés du second ordre.

Soit D une variété différentiable de dimension n . On dira qu'un opérateur A à coefficients dans $C^\infty(D)$ est globalement hypoelliptique dans D si on a

$$u \in \mathcal{D}'(D)\ ,\ Au \in C^\infty(D) \ \Rightarrow\ u \in C^\infty(D)\ .$$

Maintenant soit A un opérateur différentiel du second ordre à coefficents réels tel que

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2.1}$$

où les coefficients a^{ij} , b^i satisfont aux conditions suivantes :

1°) Les a^{ij} sont les composantes d'un tenseur contravariant symétrique de classe C^∞ et de type (2,0) sur D et

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant 0\ ,\ x \in D\ ,\ \xi = \sum_{j=1}^{n} \xi_j\, dx_j \in T_x^* D\ .$$

2°) Les b^i sont des fonctions de classe C^∞ sur D .

Il semble qu'une condition suffisante pour l'hypoellipticité de A soit la suivante :
Une particule markovienne avec générateur A dans le sous-ensemble de D, où A est dégénéré, peut <u>sortir</u> de cet ensemble.
Plus précisément on propose la

<u>Conjecture</u> : L'opérateur différentiel A donné par (2.1) est globalement hypoelliptique dans D si

(2.2) $\widetilde{D}(x)$ est égal à D pour tout $x \in D$

où $\widetilde{D}(x)$ est défini un peu différemment de $D(x)$:

$\widetilde{D}(x)$ = l'ensemble de tous les points de D qui peuvent être joint à x par une chaîne finie de trajectoires soit sous-unitaires soit de "drift" <u>non-orientées</u>.

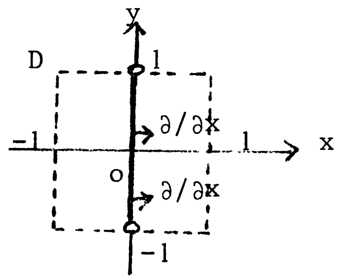
On va expliquer cette conjecture dans la suite, en considérant quelques exemples.
Notons que la condition (2.2) n'est pas nécessaire (cf. exemple 6).

Pour simplifier, on considère seulement le cas $n = 2$.
(Cas I) $D = (-1,1) \times (-1,1)$ (carré)

<u>Exemple 1</u> : $A_1 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + e^{-1/x^2} \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

En vertu de (1.4), les champs de vecteurs sous-unitaires pour A_1 sont engendrés par

$\{ \dfrac{\partial}{\partial x} , e^{-1/2x^2} \dfrac{\partial}{\partial y} \}$.



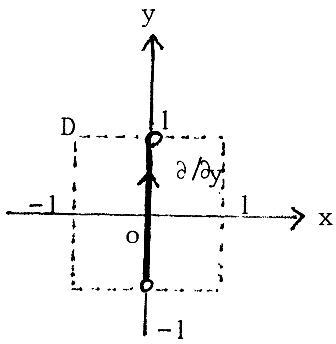
On a alors :
(2.2)' L'ensemble $\widetilde{D}((x,y))$ est égal à D pour tout $(x,y) \in D$.

On sait d'après Fediĭ [3] que l'opérateur A_1 est globalement hypoelliptique dans D .

<u>Exemple 2</u> : $A_2 = e^{-1/x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Les champs de vecteurs sous-unitaires pour A_2 sont engendrés par

$$\{ e^{-1/2x^2} \frac{\partial}{\partial x} , \frac{\partial}{\partial y} \} . \tag{2.3}$$



On a alors :

$$\widetilde{D}((x,y)) = \begin{cases} (0,1) \times (-1,1) & \text{si } x > 0 , \\ \{0\} \times (-1,1) & \text{si } x = 0 , \\ (-1,0) \times (-1,1) & \text{si } x < 0 . \end{cases}$$

C'est-à-dire, une particule dans l'ensemble $\{x = 0\}$, où A_2 est dégénéré, ne peut pas sortir de cet ensemble.

L'opérateur A_2 n'est pas globalement hypoelliptique dans D . En effet, on a

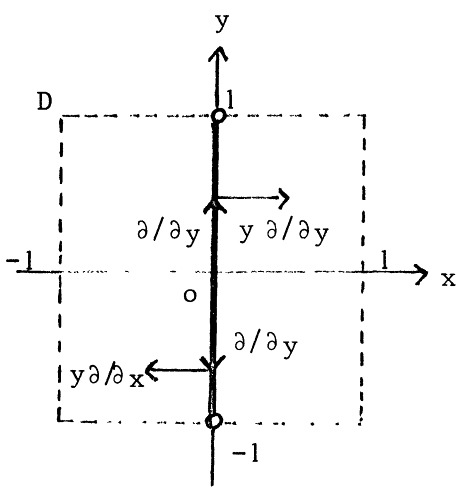
$$A_2(Y(x) \otimes 1) = 0$$

où Y(x) est la fonction de Heaviside.

<u>Exemple 3</u> : $A_3 = e^{-1/x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + y \frac{\partial}{\partial x}$.

Les champs de vecteurs sous-unitaires pour A_3 sont engendrés par (2.3), et le champ de vecteurs de "drift" est

$$(y - \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}) \frac{\partial}{\partial x} .$$



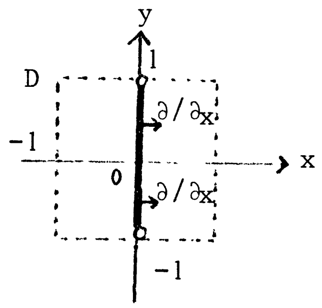
On a alors l'assertion (2.2)', en vertu du champ de vecteurs de "drift".

On sait d'après Hörmander [8] que l'opérateur A_3 est (localement) hypoelliptique dans D .

<u>Exemple 4</u> : $A_4 = e^{-1/x^2} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial}{\partial x}$.

Les champs de vecteurs sous-unitaires pour A_4 sont engendrés par (2.3), et le champ de vecteurs de "drift" est

$$(1 - \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}) \frac{\partial}{\partial x} .$$



On a alors l'assertion (2.2)' , en vertu du champ de vecteurs de "drift".

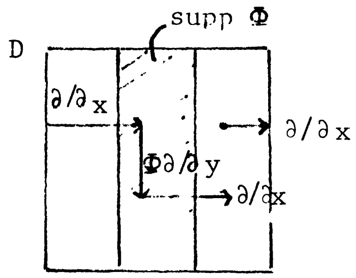
On sait d'après Hörmander [8] que l'opérateur A_4 est (localement) hypoelliptique dans D (cf. aussi [10]).

(Cas II) $D = \mathbb{R}^2 / 2\pi\mathbb{Z}^2$ (tore à deux dimensions)

<u>Exemple 5</u> : $A_5 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \Phi(x)^2 \dfrac{\partial}{\partial y^2}$ où Φ est une fonction à valeurs réelles et de classe C^∞ sur D .

Les champs de vecteurs sous-unitaires pour A_5 sont engendrés par

$$\{ \frac{\partial}{\partial x} , \Phi(x) \frac{\partial}{\partial y} \} .$$



Alors il est facile de voir que l'assertion (2.2)' est vraie si et seulement si la fonction Φ n'est pas identiquement nulle sur D .
On sait d'après Fujiwara-Omori [5] que si la fonction Φ n'est pas identiquement nulle sur D , alors l'opérateur A_5 est globalement hypoelliptique dans D .

Remarque : Le résultat ci-dessus de Fujiwara-Omori [5] est généralisé par Amano [1] pour des opérateurs différentiels de la forme

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Phi(x,y) \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

où Φ est une fonction non-négative et de classe C^∞ sur D .

Exemple 6 : $A_6 = (\frac{\partial}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial y})^2$ où α est un nombre réel irrationnel. (C'est Bony qui nous a indiqué cet exemple.)

Les champs de vecteurs sous-unitaires pour A_6 sont engendrés par

$$\frac{\partial}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial y} .$$

On sait d'après Greenfield-Wallach [6] que l'opérateur A_6 est globalement hypoelliptique dans D si et seulement si α est non-liouvilien. Il en résulte alors que la condition (2.2) n'est pas nécessaire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. Amano : The global hypoellipticity of a class of degenerate elliptic-parabolic operators, à paraître.

[2] J.M. Bony : Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 19 (1969), 277-304.

[3] V.S. Fediĭ : On a criterion for hypoellipticity, Math. USSR Sb. 14 (1971), 15-45.

[4] C. Fefferman and D.H. Phong : Subelliptic eigenvalue problems, Conference on Harmonic Analysis W. Beckner et al. ed. Wadsworth (1981), 590-606.

[5] D. Fujiwara and H. Omori : An example of a globally hypo-elliptic operator, Hokkaido Math. J. 12 (1983), 293-297.

[6] S. Greenfield and N. Wallach : Global hypoellipticity and Liouville numbers, Proc. Amer. Math. Soc. 31 (1972), 112-114.

[7] C.D. Hill : A sharp maximum principle for degenerate elliptic-parabolic equations, Indiana Univ. Math. J. 20 (1970), 213-229.

[8] L. Hörmander : Hypoelliptic second order differential equations, Acta Math. 119 (1967), 147-171.

[9] N. Ikeda and S. Watanabe : Stochastic differential equations and diffusion processes, Kodansha, Tokyo and North-Holland, Amsterdam-Oxford - New-York, 1981.

[10] O.A. Oleĭnik and E.V. Radkevič : Second order equations with nonnegative characteristic form, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island and Plenum Press, New-York, 1973.

[11] R.M. Redheffer : The sharp maximum principle for nonlinear inequalities, Indiana Univ. Math. J. 21 (1971), 227-248.

[12] D.W. Stroock and S.R.S. Varadhan : On the support of diffusion processes with applications to the strong maximum principle, Proc. of 6-th Berkeley Symp. of Prob. and Math. Stat. Vol.III (1972), 333-359.

[13] D.W. Stroock and S.R.S. Varadhan : On degenerate elliptic-parabolic operators of second order and their associated diffusions, Comm. Pure Appl. Math. 25 (1972), 651-713.

[14] K. Taira : Diffusion processes and partial differential equations, Academic Press, New-York, à paraître.