Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

N. Lerner
L. Robbiano

Unicité de Cauchy pour des opérateurs de type principal à coefficients C^∞

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1983-1984), exp. nº 9, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1983-1984____A9_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (École Polytechnique), 1983-1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z 1 9 8 3 - 1 9 8 4

UNICITE DE CAUCHY POUR DES OPERATEURS DE TYPE PRINCIPAL A COEFFICIENTS C^{∞},

par N. LERNER et L. ROBBIANO

Paris XI Orsay

Exposé n° IX

17 Janvier 1984

§ 1 - INTRODUCTION

1.1. Notations

On désigne par P un opérateur différentiel d'ordre m défini dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$,

$$P = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\, D_x^\alpha \quad ,$$

dont le symbole principal est p ,

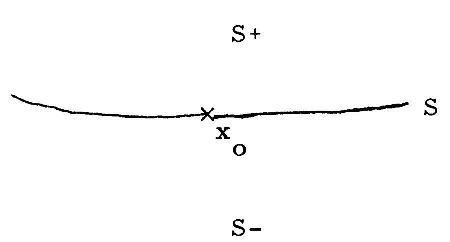
$$p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\, \xi^\alpha \quad , \quad (x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \ .$$

On notera H_p le champ hamiltonien de p , dont l'expression en coordonnées locales est

$$H_p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial p}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \ .$$

1.2. L'unicité de Cauchy

Soit S une hypersurface C^∞ orientée de Ω passant par un point x_o . Comme S est orientée on peut définir localement S+ et S- régions respectivement "au dessus" et "en dessous" de S :



On dira que P possède l'unicité de Cauchy par rapport à S près de x_o s'il existe un voisinage V de x_o tel que pour tout $u \in C^\infty(V)$ les conditions

(1.1) $$Pu = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{supp} u \subset S+$$

impliquent $u = 0$ sur un voisinage de x_o .

1.3 Des résultats connus

On se limite d'emblée à des opérateurs d'ordre 2, de symbole principal réel C^∞ , dont les termes d'ordre inférieur sont L^∞ (pour d'autres cas voir Hörmander [5], Zuily [6]). On a tout d'abord un résultat d'unicité.

Théorème (Hörmander [5]):Dans le cadre spécifié plus haut, si, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0$,

(1.2) $$p(x_o,\xi) = H_p(\varphi)(x_o,\xi) = 0 \text{ implique } H_p^2(\varphi)(x_o,\xi) < 0 ,$$

alors P possède l'unicité de Cauchy par rapport à S (dont une équation est $\varphi(x) = \varphi(x_o)$, avec $S+ = \{\varphi(x) \geq \varphi(x_o)\}$) près de x_o .

On dispose également d'un résultat de non unicité avec perturbation d'ordre 0 .

Théorème (Alinhac [1]). Dans le cadre spécifié plus haut, s'il existe $\xi_o \in \mathbb{R}^n \setminus 0$,tel que

(1.3) $$p(x_o,\xi_o) = H_p(\varphi)(x_o,\xi_o) = 0 \text{ et } H_p^2(\varphi)(x_o,\xi_o) > 0 ,$$

avec $d_\xi p(x_o,\xi_o) \neq 0$ et S non caractéristique pour P (i.e. $p(x_o,\varphi'(x_o)) \neq 0$ si $\varphi(x) = \varphi(x_o)$ est une équation de S), alors il existe un voisinage V de x_o , des fonctions a, $u \in C^\infty(V)$ tels que $(P+a)u = 0$ et supp u $\subset \{\varphi(x) \geq \varphi(x_o)\} = S+$

1.4 Position des courbes bicaractéristiques (courbes intégrales de H_p) .

L'hypothèse du théorème d'unicité cité en 1.3. signifie que toutes les bicaractéristiques (nulles) tangentes à S au point x_o sont tournées vers S- avec un contact d'ordre 2 .

Pour le théorème de non unicité précédent, on suppose qu'il existe une bicaractéristique tangente à S au point x_o tournée vers S+ avec un contact d'ordre 2 .

On se propose d'étudier ici des cas dans lesquels toutes les bicaractéristiques sont "tournées du bon côté" (i.e. vers les zéros de u) sans faire d'hypothèse de stricte convexité.

§ 2. LES RESULTATS

2.1 Le cadre du problème

2.1.1. Soit P un opérateur différentiel d'ordre 2 , à coefficients C^∞ pour la partie principale, L^∞_{loc} pour les termes d'ordre inférieur , défini sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, de symbole principal $p(x,\xi)$ supposé réel.

Soit $\mathcal{H}$ une famille d'hypersurfaces orientées de Ω i.e. la donnée d'une classe de fonctions $\varphi \in C^\infty$, réelles sur Ω, de gradient ne s'annulant pas, équivalentes pour la relation

(2.1) $\qquad \varphi \sim \tilde{\varphi}$ qui signifie

pour tout x de Ω, il existe $\lambda(x) > 0$ tel que $\tilde{\varphi}'(x) = \lambda(x)\varphi'(x)$ (remarquons que λ est alors nécessairement C^∞).

On suppose que p est de type principal sur Ω, i.e.

(2.2) $\frac{\partial p}{\partial \xi}(x,\xi)$ ne s'annule pas sur $\Omega \times \mathbb{R}^n \setminus 0$. Egalement on fait l'hypothèse que $\mathcal{H}$ est non caractéristique pour P, i.e.

(2.3) $\{\{p,\varphi\},\varphi\}$ ne s'annule pas sur Ω,

ce qui est indépendant du choix du représentant φ de $\mathcal{H}$.

2.1.2. On dira que P possède l'unicité de Cauchy compacte relativement à $\mathcal{H}$ si la propriété suivante est vérifiée.

Pour tout $x_o \in \Omega$, il existe un ouvert $V \subset \Omega$, $x_o \in V$, tel que, pour tout voisinage W de x_o inclus dans V, si

$$u \in C^\infty(W)\ ,\ Pu = 0 \text{ sur } W\ ,$$

(2.4) $$\operatorname{supp} u \subset \{x, \varphi(x) \geq \varphi(x_o)\} \text{ et en outre}$$

$$\operatorname{supp} u \cap \{x, \varphi(x) = \varphi(x_o)\} \subset\subset W \text{ (compact inclus dans } W),$$

on obtienne $u = 0$ sur un voisinage de x_o.

On dira que P possède l'unicité de Cauchy compacte 0-stable relativement à $\mathcal{H}$ si, pour toute fonction $a \in C^\infty(\Omega)$, $P + a$ possède l'unicité de Cauchy compacte relativement à $\mathcal{H}$.

2.2. Enoncé des résultats

2.2.1. unicité de Cauchy compacte

- Théorème 1 : (Condition suffisante d'unicité de Cauchy compacte)

Soient P et $\mathcal{H}$ comme dans le paragraphe 2.1.1. On suppose que, pour tout $(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$,

(2.5) $$p(x,\xi) = H_p(\varphi)(x,\xi) = 0 \text{ implique } H_p^2(\varphi)(x,\xi) \leq 0\ .$$

Alors, P possède l'unicité de Cauchy compacte relativement à $\mathcal{H}$.

Théorème 2 (C.N.S. d'unicité de Cauchy compacte 0-stable) :
Soient P et $\mathcal{H}$ comme dans le paragraphe 2.1.1., P étant à coefficients C^∞ .
Pour que P possède l'unicité de Cauchy compacte 0-stable relativement à $\mathcal{H}$, il faut et il suffit que (2.5) soit vérifiée.

2.2.2. Condition suffisante d'unicité de Cauchy

Soit P un opérateur différentiel d'ordre 2 , à coefficients C^∞ dans sa partie principale, L^∞ pour les termes d'ordre inférieur, défini dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ de symbole principal réel, de type principal en x_o .
Soit S une hypersurface C^∞ orientée passant par x_o dont une équation est localement $\varphi(x) = \varphi(x_o)$, $\varphi \in C^\infty$, $\varphi'(x_o) \neq 0$. On suppose que S est non caractéristique pour P en x_o i.e. $p(x_o,\varphi'(x_o)) \neq 0$. On note

$S+ = \{x \in \Omega\ ,\ \varphi(x) \geq \varphi(x_o)\}$, $S^*(V)$ le fibré en sphère du cotangent $T^*(V)$, où V est un voisinage de x_o .

On pose

$$(2.6)\quad \Sigma_V = \{(x,\xi) \in S^*(V),\ p(x,\xi) = H_p(\varphi)(x,\xi) = \varphi(x)-\varphi(x_o) = 0\} .$$

On peut démontrer qu'il existe un voisinage V_o de x_o tel que Σ_{V_o} soit une sous-variété de codimension 3 de $S^*(V)$.

Corollaire : S'il existe un voisinage V de x_o , $V \subset V_o$, tel que pour tout $\rho \in \Sigma_V$,

$$(2.7)\quad \begin{array}{l} \text{(i) } H_p^2(\varphi)(\rho) \leq 0 , \\ \text{(ii) } \mathrm{Hess}\, H_p^2(\varphi)(\rho)\big|_{\Sigma_V} < 0 \ \text{ si } H_p^2(\varphi)(\rho) = 0 , \end{array}$$

alors P possède l'unicité de Cauchy par rapport à S près de x_o (cf.1.1.).

3. Commentaires

3.1. Invariance des hypothèses

Les hypothèses sont invariantes par changement de coordonnées ainsi que par changement de fonction φ définissant $\mathcal{H}$ pour les théorèmes, et S

pour le corollaire.

3.2. Position des bicaractéristiques

- Lemme -

Soient P et $\mathcal{H}$ vérifiant les hypothèses du théorème 1 . Alors pour tout $x_o \in \Omega$, $\xi_o \in \mathbb{R}^n \setminus 0$, si $p(x_o,\xi_o) = H_p(\varphi)(x_o,\xi_o) = 0$, la bicaractéristique tangente issue de (x_o, ξ_o) reste localement "du bon côté" , i.e. vérifie

$$\varphi(\omega(s)) \leq \varphi(\omega(0)) \text{ pour } s \text{ dans un voisinage de } 0_{\mathbb{R}}$$

($\dot{\omega} = H_p(\omega)$, $\omega(0) = (x_o, \xi_o)$) . En particulier, si une bicaractéristique tangente a un contact d'ordre fini avec une hypersurface de la famille $\mathcal{H}$, nécessairement ce contact est d'ordre pair et du "bon côté" i.e.

$$p(x_o,\xi_o) = H_p^{\ell}(\varphi)\ (x_o,\xi_o) = 0 \quad , \quad 1 \leq \ell < 2k \ ,$$

et $$H_p^{2k}(x_o,\xi_o) < 0 \ .$$

Pour démontrer ce lemme on utilise que $dp \wedge d\{p,\varphi\} \neq 0$ sur $p = \{p,\varphi\} = 0$ et on trouve une carte locale symplectique au voisinage de (x_o,ξ_o) dans laquelle $p = \xi_1$. On peut comparer ce résultat au paragraphe 1.4 ci-dessus.

3.4. Globalité de l'hypothèse (2.5)

Il semble impossible de faire une hypothèse en un seul point x_o dans le cas où il existe des bicaractéristiques tangentes ayant un contact d'ordre strictement supérieur à 2 . Ceci est illustré par l'exemple suivant :
Dans $\mathbb{R}^3$, $x = (t,x_1,x_2)$ de variables duales (τ,ξ_1,ξ_2) , on se place au voisinage de $0 = (0,0,0)$ avec $\varphi \equiv t$. Posons

$$p = \tau^2 + \xi_1\xi_2 + t(x_1^2 - x_2^4)\ (\xi_1-\xi_2)^2 + t\xi_1^2 \ . \tag{3.1}$$

Cet opérateur est à coefficients C^∞ réels, d'ordre 2, de type principal, non caractéristique, et vérifie pour $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus 0$

$$\begin{aligned} &p(0,\xi) = H_p(\varphi)\ (0,\xi) = 0 \ \text{ implique} \\ (3.2) \qquad &(H_p^2(\varphi)(0,\xi) < 0) \ \text{ ou} \\ &((H_p^2(\varphi)(0,\xi) = H_p^3(\varphi)(0,\xi) = 0 \ \text{ et } H_p^4(\varphi)(0,\xi) < 0) \ . \end{aligned}$$

Néanmoins dans tout voisinage de O , sur S , on peut trouver x et $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ tel que

$$p(x,\xi) = H_p(\varphi)(x,\xi) = 0 \quad \text{et} \quad H_p^2(\varphi)(x,\xi) > 0 \quad .$$

Donc au point x , le théorème d'Alinhac [1] permet de construire un contre-exemple à l'unicité de Cauchy.

3.5. Compacité

La condition (2.5) n'est pas suffisante pour que P possède l'unicité de Cauchy au sens (1.1). Par exemple l'opérateur (des ondes) $D_+^2 + D_{x_1} D_{x_2}$ ne possède pas l'unicité de Cauchy (pour des termes d'ordre inférieur quelconques C^∞) par rapport à la surface d'équation $t = 0$ (cf.[2],[3],[5] th.8.9.4.). On évite dans les théorèmes ces problèmes de "convexification" en utilisant la notion d'unicité de Cauchy compacte.

3.6. Exemples

3.6.1. Considérons un opérateur P à coefficients L^∞ , défini dans un voisinage de O dans $\mathbb{R}^4$, de symbole principal

$$p = \tau^2 + \xi_1 \xi_2 + \xi_3^2 + t\,((1+x_1)\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)^2 \quad ,$$

Les variables de $\mathbb{R}^4$ étant $x = (t,x_1,x_2,x_3)$, et leur variables duales $\xi = (\tau,\xi_1,\xi_2,\xi_3)$. Soit $\mathcal{H}$ la famille d'hypersurfaces orientées donnée par $\varphi \equiv t$, clairement non caractérsitique pour p . Le symbole p vérifie les hypothèses du théorème 1 , les bicaractéristiques tangentes sont tournées du bon côté ($t \le 0$) à un ordre ≤ 4 ; en outre, en tout point voisin de O , on peut trouver des bicaractéristiques tangentes à l'ordre 4 exactement, de sorte qu'aucun résultat de stricte pseudo-convexité n'est applicable ici.

3.6.2. Soit P un opérateur défini sur un voisinage de O dans $\mathbb{R}^3$, à coefficients L^∞ , de symbole principal

$$p = \tau^2 + \xi_1\xi_2 + t(x_1^2 + x_2^2)(\xi_1 - \xi_2)^2 - t^2\xi_1^2 \quad ,$$

et soit S l'hypersurface d'équation, (t,x_1,x_2) étant des coordonnées locales et (τ,ξ_1,ξ_2) des variables duales. Le corollaire implique l'unicité de Cauchy (au sens (1.1) ici) pour P par rapport à S près de $0_{\mathbb{R}^3}$. Remarquons qu'en 0 il existe des bicaractéristiques tangentes à l'ordre 4 et que par conséquent un résultat de pseudo-convexité ne peut s'appliquer à priori ici.

§.4. INDICATIONS SUR LA PREUVE

La technique employée consiste à établir une inégalité de Carleman pour P. Pour cela on étudie l'opérateur

$$e^{-\gamma\psi} P e^{\gamma\psi} = P(x, D_x - i\gamma\psi'(x)) = P_\gamma \quad , \tag{4.1}$$

où ψ est une fonction C^∞ réelle et γ un "grand paramètre" positif. On est par suite conduit à étudier le "symbole" $p(x,\xi-i\gamma\psi'(x))$. Pour cela on développe un calcul symbolique à grand paramètre analogue au calcul classique (à cela près qu'on ne demande pas de "gagner" quand on dérive par rapport à γ).

4.1. Calcul symbolique avec grand paramètre

4.1.1. Définition

Soit $1 \geq \rho > \delta \geq 0$, $m \in \mathbb{R}$.

On dit que $a(x,\xi,\gamma) \in \Sigma^m_{\rho,\delta}$ si

(i) $\qquad a(x,\xi,\gamma) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times I)$ où $I = [1,+\infty[$,

(ii) pour tout $(\alpha,\beta,\lambda) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$, il existe $C > 0$ tel que, pour tout $(x,\xi,\gamma) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times I$

$$|\partial^\alpha_x \partial^\beta_\xi \partial^\lambda_\gamma a(x,\xi,\gamma)| \leq C(\gamma+|\xi|)^{m-\rho|\beta|+\delta|\alpha|} .$$

On démontre les propriétés usuelles du calcul symbolique : composition, adjoint, continuité L^2. On démontre également une inégalité de Gårding :

4.1.2. Inégalité de Gårding précisée

Soit A_γ un opérateur de symbole $a(x,\xi,\gamma) \in \Sigma^m_{1,0}$,

$$a = a_m + b \text{ , où } b \in \Sigma^{m-1}_{1,0} .$$

Si $a_m \geq 0$, alors il existe $C \geq 0$ (indépendant de γ) tel que, pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\mathbb{R}e\,(A_\gamma u,u) + C\,\|u\|^2_{\frac{m-1}{2},\gamma} \geq 0\ ,$$

avec $$\|u\|^2_{s,\gamma} = \int (\gamma^2 + |\xi|^2)^s\,|\hat{u}(\xi)|^2\,d\xi\ .$$

4.2. Estimation sur les symboles

En utilisant les hypothèses sur p et $\mathcal{H}$, on prouve tout d'abord une estimation du type

$$\sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial a}{\partial \xi_j}(x,\xi,\Gamma)\right|^2 \geq C(|\xi|^2 + \Gamma^2)\ ,\ x \in \Omega_1\ ,$$

où $a = \chi(x)p(x,\xi - i\gamma\psi'(x))$, χ étant une fonction de troncature, $(\xi,\Gamma) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \setminus (0,0)$; de cette estimation, on déduit une inégalité sur P_γ du type

$$\|P_\gamma u\|^2_{L^2} + \|(P_\gamma)^* u\|^2_{L^2} \geq C(\delta)\,\|u\|^2_{1,\gamma}\ , \tag{4.2}$$

avec $C(\delta) \xrightarrow[\delta \to 0]{} +\infty$, (diamètre supp$u \leq \delta$) .

Puis en posant

$$p(x,\xi - i\Gamma\,\psi'(x)) = j_1(x,\xi,\Gamma) + i\Gamma\, j_2(x,\xi,\Gamma)\ ,$$

on prouve une estimation du type

$$c_1|j_1|^2 + c_2|j_2|^2 + a\,j_1 + b\,j_2 + \{j_1,j_2\} \leq 0\ ,\ (\xi,\Gamma) \in S^n\ ,$$

où c_1, c_2 sont des constantes et a,b des fonctions C^∞ sur la sphère S^n .

Ceci nous permet d'établir une estimation de la forme

$$\|P_\gamma u\|^2_{L^2} - \|(P_\gamma)^* u\|^2_{L^2} + C\|u\|^2_{1,\gamma} \geq 0\ , \tag{4.3}$$

ce qui avec (4.2) nous donne une inégalité de Carleman.

Cette méthode s'inspire de la preuve de [4] pour la résolubilité locale d'opérateurs de type principal dans le cas non dégénéré ($p = p_1 + ip_2$, $dp_1 \wedge dp_2 \neq 0$ sur $p_1 = p_2 = 0$).

BIBLIOGRAPHIE :

[1] S. ALINHAC : Non unicité du problème de Cauchy, Annals of Mathematics, 117 (1983), 77-108.

[2] S. ALINHAC, M.S. BAOUENDI : Construction de solutions nulles et singulières pour des opérateurs de type principal, Séminaire Goulaouic-Schwartz, Exposé n°22 (1979).

[3] H. BAHOURI : Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs à symbole principal réel, Thèse de 3ème cycle, Université Paris XI (Orsay) 1982.

[4] Yu.V. EGOROV : On the solubility of differential equations with simple characteristics, Russian Math. Surveys, 26 (1971), 113-127.

[5] L. HÖRMANDER : Linear partial differential operators, Springer-Verlag (1963).

[6] C. ZUILY : Uniqueness and non uniqueness in the Cauchy problem, Progress in Mathematics (Vol.33).