

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

P-L. LIONS

## **Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre et applications**

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1983-1984), exp. n° 6,  
p. 1-12

[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1983-1984\\_\\_\\_A6\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1983-1984___A6_0)

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1983-1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

---

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z   1 9 8 3 - 1 9 8 4

SOLUTIONS DE VISCOSITE DES EQUATIONS DE HAMILTON - JACOBI

DU PREMIER ORDRE ET APPLICATIONS

par P-L. LIONS

dédié à la mémoire de C. Goulaouic



1. INTRODUCTION

Notre but est de présenter quelques travaux récents sur les équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre :

$$(1) \quad H(x, u, \nabla u) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ ,  $u$  est scalaire. La nonlinéarité  $H$ -appelée Hamiltonien - est une fonction donnée continue sur  $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ . L'équation (1) est une formulation générale des équations de Hamilton-Jacobi (HJ en abrégé) qui contient la formulation plus habituelle :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + F(x, \nabla_x u) = 0 \quad \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^N \times ]0, \infty[$$

(on considère alors  $y = (x, t)$ ,  $H(y, \nabla_y u) = \frac{\partial u}{\partial t} + F(x, \nabla_x u) \dots$ ).

Il est bien connu que (pour des conditions aux limites données) il n'existe pas de solutions globales  $C^1$  de (1) (satisfaisant ces conditions aux limites) même si toutes les données sont analytiques et que les solutions localement Lipschitziennes (vérifiant (1) p.p.) étudiées par W.H. Fleming [9],[10]; S.N. Kruzkov [14],[15], A. Friedman [11], ne sont ni stables ni uniques.

Récemment M.G. Grandall et l'auteur ([4],[5]) ont introduit la notion de solutions de viscosité de (1) dont nous rappelons brièvement la définition et les principales propriétés (tirées de [5] et de M.G. Grandall, L.C. Evans et P-L. Lions [3], P-L. Lions [17]) dans la section II. Cette notion permet d'obtenir des résultats d'existence et d'unicité très généraux que nous donnons dans la section III : l'unicité découle de M.G. Grandall et P-L. Lions [5], [6] et l'existence de P-L. Lions [17],[18], G. Barles [1], M.G. Grandall et P-L. Lions [6].

Les équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre interviennent de manière fondamentale dans les théories du contrôle optimal déterministe et des jeux différentiels : la notion de solutions de viscosité permet alors de justifier ces relations par une adaptation aisée du principe de la programmation dynamique. Cette observation, due à P-L. Lions [17], est rappelé dans la section 3 ainsi que divers résultats reliés adaptés de P-L. Lions et M. Nisio [20].

Enfin la section IV est consacrée à quelques problèmes asymptotiques - intervenant en optique - pour les équations de HJ. Ces problèmes sont résolus dans P-L. Lions, G. Papanicolaou et S.R.S. Varadhan [21] à l'aide de la notion de solutions de viscosité.

## 2. SOLUTIONS DE VISCOSITE : DEFINITION ET PROPRIETES ELEMENTAIRES

Soient  $\varphi \in C(\Omega)$  et  $x_0 \in \Omega$  : on rappelle que le surdifférentiel (resp. sous-différentiel) de  $\varphi$  au point  $x_0$  est l'ensemble convexe fermé éventuellement vide donné par :

$$D^+ \varphi(x_0) = \{ \xi \in \mathbb{R}^N / \limsup_{y \rightarrow x_0, y \in \Omega} \{ \varphi(y) - \varphi(x_0) - (\nabla \varphi(x_0), y - x_0) \} |y - x_0|^{-1} \leq 0 \}$$

$$(\text{resp. } D^- \varphi(x_0) = \{ \xi \in \mathbb{R}^N / \liminf_{y \rightarrow x_0, y \in \Omega} \{ \varphi(y) - \varphi(x_0) - (\nabla \varphi(x_0), y - x_0) \} |y - x_0|^{-1} \geq 0 \}).$$

Une caractérisation de ces ensembles est donné par le

Lemme 2.1 : Soient  $\varphi \in C(\Omega)$  et  $x_0 \in \Omega$  alors  $\xi \in D^+ \varphi(x_0)$  (resp.  $D^- \varphi(x_0)$ ) si et seulement si il existe  $\psi \in C^1(\Omega)$  vérifiant :  $\varphi - \psi$  admet au point  $x_0$  un maximum global (resp. minimum global) strict.

A l'aide de ces différentiels généralisés on définit pour  $u \in C(\Omega)$  :

Définition :  $u$  est solution de viscosité de l'équation de HJ (1) si :

$$(2) \quad \forall x \in \Omega, \forall \xi \in D^+ u(x), H(x, u(x), \xi) \leq 0$$

$$(3) \quad \forall x \in \Omega, \forall \xi \in D^- u(x), H(x, u(x), \xi) \geq 0 .$$

Remarques : i) Si  $u \in C^1(\Omega)$  est solution (classique) de (1),  $u$  est solution de viscosité de (1).

ii) Si  $u$  est solution de viscosité de (1), alors (1) a lieu en tout point de différentiabilité de  $u$ . En particulier si  $u$  est localement Lipschitzien, l'équation (1) a lieu p.p.

En utilisant le lemme 2.1, on obtient la définition équivalente suivante où ( $u \in C(\Omega)$ ).

Définition équivalente :  $u$  est solution de viscosité de (1) si et seulement si on a pour tout  $\psi \in C^1(\Omega)$  les propriétés suivantes :

$$(2') \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{en tout point } x_0 \text{ de maximum local de } u - \psi \\ H(x_0, u(x_0), \nabla \psi(x_0)) \leq 0 ; \end{array} \right.$$

$$(3') \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{en tout point } x_0 \text{ de minimum local de } u - \psi \\ H(x_0, u(x_0), \nabla \psi(x_0)) \geq 0 . \end{array} \right.$$

Remarque : On obtient encore des définitions équivalentes en remplaçant  $C^1$  par  $C^2$  ou  $C^\infty$  et (ou) en remplaçant local par local strict, global, global strict.

Ces observations élémentaires impliquent la

Proposition 2.1 : Soit  $H_n(x, t, p) \in C(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$  convergeant uniformément sur tout compact de  $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$  vers  $H(x, t, p)$ , soit  $u_n \in C(\Omega)$  solution de viscosité de :  $H_n(x, u, \nabla u) = 0$  dans  $\Omega$ . On suppose de plus que  $u_n$  converge uniformément vers  $u$  sur tout compact de  $\Omega$ . Alors  $u$  est solution de viscosité de (1).

Remarque : De même obtient-on - et ceci justifie la terminologie utilisée - la convergence de la méthode de viscosité évanescence. Par analogie avec la mécanique des Fluides, on appelle méthode de viscosité évanescence la méthode consistant à approcher (1) par :

$$(4) \quad -\varepsilon \Delta u_\varepsilon + H_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

où  $\varepsilon > 0$ ,  $H_\varepsilon(x, t, p) \in C(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$  converge uniformément sur tout compact de  $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$  vers  $H(x, t, p)$ . L'équation (4) - pour  $\varepsilon$  fixé - est l'exemple typique d'équations quasilinéaires qui sont assez bien comprises : nous renvoyons le lecteur à D. Gilbarg et N.S. Trudinger [12], O.A. Ladyzenskaya et N.N. Ural'tceva [16], J. Serrin [22], P-L. Lions [19]. Sous des hypothèses générales sur  $H_\varepsilon$  (et pour des conditions aux limites prescrites) on obtient l'existence de  $u_\varepsilon \in C^2(\Omega)$ . De plus on peut obtenir (cf. P-L. Lions [17] pour plus de détails) des estimations  $W^{1,\infty}$  uniformes en  $\varepsilon$ . Il est donc naturel de supposer qu'il existe  $u_\varepsilon \in C^2(\Omega)$  convergeant uniformément sur tout compact de  $\Omega$  vers  $u$ . Alors  $u$  est solution de viscosité : en effet il suffit de considérer (par exemple) un point  $x_0$  de maximum local strict de  $u - \psi$  où  $\psi \in C^2(\Omega)$ , alors on peut trouver

$\varepsilon_n \rightarrow 0$ ,  $x_{\varepsilon_n} \rightarrow x_0$  tels que  $x_{\varepsilon_n}$  est un point de maximum local de  $u_{\varepsilon_n} - \psi$ .  
D'où, d'après les conditions nécessaires d'extrémalité et (4) :

$$H_{\varepsilon_n}(x_{\varepsilon_n}, u_{\varepsilon_n}(x_{\varepsilon_n}), \nabla \psi(x_{\varepsilon_n})) = \varepsilon_n \Delta u_{\varepsilon_n}(x_{\varepsilon_n}) \leq \varepsilon_n \Delta \psi(x_{\varepsilon_n}) \rightarrow 0$$

et (2') est prouvé ! ■

Les résultats de cette section sont dûs à M.G. Grandall et P-L. Lions [5] (une présentation plus directe se trouvant dans [3]).

### 3. EXISTENCE ET UNICITE

Nous ne considérons ici que le cas modèle suivant :

$$(5) \quad H(x, Du) + \lambda u = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N,$$

où  $H(x, p) \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ ,  $\lambda > 0$  ; bien que tous les résultats qui suivent s'étendent à des Hamiltoniens généraux  $H(x, u, \nabla u)$  ainsi qu'à des problèmes avec conditions aux limites comme par exemple :

$$(6) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + H(x, Du) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \times (0, \infty)$$

et  $u(x, 0) = u_0(x)$  sur  $\mathbb{R}^N$ , où  $u_0$  est donnée.

Dans un premier temps, nous supposons que "la condition aux limites à l'infini" se traduit par la bornitude des solutions et nous utiliserons les hypothèses :

$$(7) \quad H(x, p) \in B \cup C(\mathbb{R}^N \times \bar{B}_R) \quad , \quad \forall R < \infty$$

$$(8) \quad \lim_{\varepsilon \searrow 0} \{ \sup [ |H(x, p) - H(y, p)| / |x-y| (1+|p|) ] \} = 0$$

$$(9) \quad H(x, p) \rightarrow \infty \quad \text{quand } |p| \rightarrow \infty \quad , \quad \text{uniformément pour } x \in \mathbb{R}^N .$$

Théorème 3.1 : i) Sous les hypothèses (7)(8), il existe une unique solution de viscosité de (5) dans  $B \cup C(\mathbb{R}^N)$ .

ii) Sous les hypothèses (7) et (9), il existe une unique solution de viscosité  $u$  de (5) dans  $C_b(\mathbb{R}^N)$  et  $u \in W^{1, \infty}(\mathbb{R}^N)$ .

iii) Soient  $u, v \in B \cup C(\mathbb{R}^N)$  solutions de viscosité de, respectivement, (5) et (5')  $H(x, Dv) + \lambda v = f(x)$  dans  $\mathbb{R}^N$ .

Si  $f \in C_b(\mathbb{R}^N)$ , si on suppose (7) et ou bien (8), ou bien  $u, v \in W^{1, \infty}(\mathbb{R}^N)$  alors on a :

$$(10) \quad \sup_{\mathbb{R}^N} (v-u)^+ \leq \frac{1}{\lambda} \sup_{\mathbb{R}^N} f^+ .$$

Remarques : i) Bien sûr (10) entraîne l'unicité.

ii) Les résultats d'unicité et de comparaison du type (10) sont dûs à M.G. Grandall et P-L. Lions [5]. L'existence est démontrée dans P-L. Lions [17],[18] dans le cas ii) et dans le cas où (8) est remplacée par l'hypothèse (naturelle pour les applications) :

$$(8') \quad \exists C_0, C_1 \geq 0, |H(x,p) - H(y,p)| \leq C_0 |p| + C_1, \forall x, y, p \in \mathbb{R}^N ;$$

- voir également P.E. Souganidis [23]. Le cas général est démontré dans G. Barles [1] par une méthode d'approximation élégante utilisant le cas où (8') a lieu.

iii) Si (8') a lieu, on peut démontrer (cf. P-L. Lions [18] que la solution de viscosité  $u$  vérifie :  $u \in C^{0, \theta}(\mathbb{R}^N)$  avec  $\theta = \lambda / C_0$  si  $\lambda \in ]0, C_0[$ ,  $\theta$  quelconque dans  $(0, 1)$  si  $\lambda = C_0$  et  $\theta = 1$  si  $\lambda > C_0$ .

La méthode de démonstration de la partie existence du théorème est basée sur l'estimation (10), la méthode de viscosité évanescence et divers procédés d'approximation ; et l'unicité (ainsi que (10)) se démontre élémentairement : donnons la démonstration de iii) dans le cas où  $u, v \in C_0(\mathbb{R}^N)$ . Elle repose sur le lemme suivant :

Lemme 3.1 : Soient  $u, v \in C_0(\mathbb{R}^N)$  tels que  $\max(v-u) > 0$ . Alors il existe  $(x_n)_n, (y_n)_n$  vérifiant :  $x_n, y_n \xrightarrow{n} x_0 \in \arg \max_{\mathbb{R}^N} (v-u)$  et  
 $\exists \xi_n \in D^+v(x_n) \cap D^-u(y_n)$  ;  $|\xi_n| |x_n - y_n| \xrightarrow{n} 0$  .

De plus si  $u$  ou  $v \in W^{1, \infty}(\mathbb{R}^N)$ ,  $\xi_n$  est bornée. ■

Démontrons (10) à partir du lemme : la définition des solutions de viscosité implique que :

$$\begin{cases} H(x_n, \xi_n) + \lambda v(x_n) \leq f(x_n) \leq \sup f^+ \\ H(y_n, \xi_n) + \lambda u(y_n) \geq 0 \end{cases}$$



d'où par soustraction :

$$\lambda\{v(x_n) - u(y_n)\} \leq \sup_{\mathbb{R}^N} f^+ + |H(x_n, \xi_n) - H(y_n, \xi_n)|$$

$$\leq \sup_{\mathbb{R}^N} f^+ + \sup\{|H(x,p) - H(y,p)| / |x-y|(1+|p|) \leq |x_n - y_n|(1+|\xi_n|)\}.$$

On conclut en faisant tendre  $n$  vers l'infini et en utilisant (8) (ou (7)).

Enfin, le lemme 3.1 se démontre en étudiant la fonction :

$$w_\varepsilon(x,y) = v(x) - u(y) + 3M\beta_\varepsilon(x-y) \quad \text{sur } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \quad \text{où}$$

$$M = \max(\|u\|_\infty, \|v\|_\infty)\beta_\varepsilon(\xi) = \beta(\xi/\varepsilon), \quad 0 \leq \beta \leq 1, \quad \beta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N), \quad \beta(0) = 1. \quad \blacksquare$$

Pour les applications au contrôle optimal, aux jeux différentiels et à l'étude des semi-groupes associés à l'équation de Hamilton-Jacobi, il est intéressant de généraliser les résultats qui précèdent au cas de données non bornées. On utilisera les hypothèses (pas simultanément !) :

$$(11) \quad H \in \cup C(\mathbb{R}^N \times \overline{B}_R), \quad \forall R < \infty$$

$$(12) \quad \exists C_0 \geq 0, \quad |H(x,p) - H(x,q)| \leq C_0 |p-q|, \quad \forall x,p,q \in \mathbb{R}^N$$

$$(13) \quad \exists C \geq 0, \exists \theta \in ]0,1[, \quad |H(x,p) - H(x,q)| \leq C |p-q|^\theta, \quad \forall x,p,q \in \mathbb{R}^N.$$

Theorème 3.2 : i) Sous les hypothèses (11) et (8), il existe une unique solution de viscosité  $u$  de (5) dans  $\cup C(\mathbb{R}^N)$ . De plus  $u + \frac{1}{\lambda} H(x,0) \in \text{BUC}(\mathbb{R}^N)$ .

ii) Sous les hypothèses (12), (8) et si  $f \in C(\mathbb{R}^N)$  vérifie :

$$(14) \quad \int_0^\infty \sup_{|x| \leq t} |f(x)| e^{-\lambda t/C_0} dt < \infty$$

alors il existe une unique solution de viscosité  $u \in C(\mathbb{R}^N)$  de

$$(15) \quad H(x, Du) + \lambda u = f(x) \quad \text{dans } \mathbb{R}^N$$

vérifiant

$$(14') \quad \sup_{\mathbb{R}^N} |u(x)| \exp(-\lambda |x|/C_0) \rightarrow 0 \quad \text{quand } |x| \rightarrow \infty.$$

iii) Sous les hypothèses (13) (8) et si  $f \in C(\mathbb{R}^N)$ , il existe une unique solution de viscosité  $u$  de (15) dans  $C(\mathbb{R}^N)$ .

Remarques : i) Il est possible bien sûr de réunir (12) et (13) (i.e. ii) et iii)) dans un même résultat. De plus l'analogue de (10) a toujours lieu.

ii) L'unité dans i),ii) est démontrée par H. Ishii [13]. L'existence et iii) sont dûs à M.G. Grandall et P-L. Lions [6] - où l'unicité pour i),ii) est redémontrée par une méthode plus simple que dans [13].

Pour conclure indiquons que des exemples montrant l'optimalité des résultats et des hypothèses sont donnés dans [5], [17], [6]. Enfin les résultats précédents ainsi que la méthode de démonstration de l'unité sont utiles pour l'approximation numérique des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre : cf. M.G. Grandall et P-L. Lions [7], P.E. Souganidis [23],[24]...

#### 4. APPLICATIONS AU CONTROLE OPTIMAL

On s'intéresse ici au contrôle optimal de systèmes déterministes gouvernées par les équations différentielles ordinaires. L'état du système est donné par la solution  $y_x(t)$  de l'équation différentielle :

$$y_x(t) = x + \int_0^t b(y_x(s), \alpha(s)) ds$$

où  $x$  - l'état initial du système -  $\in \mathbb{R}^N$ ,  $\alpha(s)$  - le contrôle - est une fonction mesurable sur  $\mathbb{R}_+$  à valeurs dans  $A$  espace métrique - ensemble des valeurs du contrôle - et où le champ  $b(x,\alpha)$  défini sur  $\mathbb{R}^N \times A$  vérifie (par exemple) :

$$(16) \quad |b(x,\alpha) - b(x',\alpha)| \leq C_0 |x-x'|, \quad |b(x,\alpha)| \leq C, \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}^N, \forall \alpha \in A.$$

On se donne  $f(x,\alpha)$  fonction réelle sur  $\mathbb{R}^N \times A$  -  $f$  est le coût infinitésimal - et  $\lambda > 0$  -  $\lambda$  est le taux d'actualisation. La fonction coût est donnée par :

$$(17) \quad J(x, \alpha(\cdot)) = \int_0^\infty f(y_x(t), \alpha(t)) \exp(-\lambda t) dt$$

et il s'agit de déterminer le coût minimum - appelé fonction valeur - i.e. :

$$(18) \quad u(x) = \inf_{\alpha(\cdot)} J(x, \alpha(\cdot))$$

où l'infimum est pris sur tous les contrôles admissibles i.e. toutes les fonctions mesurables sur  $\mathbb{R}_+$  à valeurs dans  $A$ . Pour simplifier on suppose :

$$(19) \quad |f(x, \alpha) - f(x', \alpha)| \leq \varepsilon(|x - x'|) , \quad |f(x, \alpha)| \leq C , \forall x, x' \in \mathbb{R}^N , \forall \alpha \in A$$

où  $\varepsilon(t) \rightarrow 0$  si  $t \rightarrow 0_+$ .

L'argument de la programmation dynamique de R. Bellman donne alors l'identité suivante valide pour tout  $T > 0$  :

$$(20) \quad u(x) = \inf_{\alpha(\cdot)} \left\{ \int_0^T f(y_x(t), \alpha(t)) \exp(-\lambda t) dt + u(y_x(T)) \exp(-\lambda T) \right\} .$$

On en déduit alors (cf. P-L. Lions [17]) le :

Théorème 4.1 : Sous les hypothèses (16) et (19), u est l'unique solution de viscosité dans  $B \cup C(\mathbb{R}^N)$  de (15) où H est donné par

$$(21) \quad H(x, p) = \sup_{\alpha \in A} \{-b(x, \alpha) \cdot p - f(x, \alpha)\} .$$

Remarques : i) Il est bien connu que si u est différentiable en  $x^0$  alors (15) (avec H donné par (21)) a lieu en  $x^0$  : on retrouve ici ce fait comme sous-produit de la notion de solution de viscosité. De plus l'unicité permet la détermination effective de u .

ii) (16) et (19) entraînent (7) et (8'). En fait en utilisant le théorème 3.2, on peut considérablement relâcher (19).

Démonstration du Théorème 4.1 : L'unicité découle du Théorème 3.1 et on vérifie que  $u \in B \cup C(\mathbb{R}^N)$  en démontrant que  $J(\cdot, \alpha(\cdot))$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}^N$  uniformément en  $\alpha(\cdot)$ . Vérifions maintenant que u est solution de viscosité de (15) : soit par exemple  $\psi \in C_b^1(\mathbb{R}^N)$  tel que  $u - \psi$  a un minimum global en un point  $x_0 \in \mathbb{R}^N$ . On peut supposer sans restreindre la généralité que :  $u(x_0) = \psi(x_0)$ . On déduit alors de (20) :

$$\psi(x_0) \geq \inf_{\alpha(\cdot)} \left\{ \int_0^T f(y_{x_0}(t), \alpha(t)) \exp(-\lambda t) dt + \psi(y_{x_0}(T)) \exp(-\lambda T) \right\}$$

ou également

$$\sup_{\alpha(\cdot)} \left\{ \frac{1}{T} [\psi(x_0) - \psi(y_{x_0}(T)) \exp(-\lambda T)] x - \frac{1}{T} \int_0^T f(y_{x_0}(t), \alpha(t)) \exp(-\lambda t) dt \right\} \geq 0 \quad x .$$

En utilisant (16), (19) et la différentiabilité de  $\psi$  en  $x_0$ , on en déduit :

$$\sup_{\alpha(\cdot)} \left\{ -\nabla\psi(x_0) \cdot \frac{1}{T} \left[ \int_0^T b(x_0, \alpha(s)) ds \right] - \frac{1}{T} \int_0^T f(x_0, \alpha(s)) ds \right\} + \lambda\psi(x_0) \geq -\varepsilon(T)$$

où  $\varepsilon(T) \rightarrow 0$  si  $T \rightarrow 0_+$ . Et on conclut en faisant tendre  $T$  vers  $0_+$ . ■

Le théorème précédent ainsi que sa démonstration au cas de jeux différentiels déterministes (cf. Souganidis [24]; L.C. Evans and P-E. Souganidis [8]; Barron, L.C. Evans et R. Jensen [2]...). En fait les relations entre programmation dynamique et solutions de viscosité sont contenues dans la remarque suivante - adaptée de P-L. Lions et M. Nisio [20] - :  
soit  $H(x, t, p) \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ .

Théorème 4.2 : Soit  $S(t)$  un semi-groupe sur une partie  $\mathcal{C}$  de  $C_b(\mathbb{R}^N)$  contenant  $C_b^\infty(\mathbb{R}^N)$ . On suppose que  $S(t)$  vérifie :

$$(22) \quad u(x, t) = [S(t)u](x) \in C(\mathbb{R}^N \times ]0, \infty[), \quad \forall u \in \mathcal{C}$$

$$(23) \quad S(t)u \leq S(t)v \quad \text{sur } \mathbb{R}^N, \quad \forall t \geq 0, \quad \text{si } u \leq v \quad \text{sur } \mathbb{R}^N, \quad u, v \in \mathcal{C}$$

$$(24) \quad \frac{1}{t} [\{S(t)[\varphi + t\mu]\}(x) - \varphi(x)] \rightarrow \mu - H(x, \varphi, D\varphi(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

$$t \rightarrow 0_+$$

pour tous  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N)$ .

Alors pour tout  $u \in \mathcal{C}$ ,  $u(x, t) = [S(t)u](x)$  est solution de viscosité de :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H(x, u, \nabla_x u) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \times ]0, \infty[.$$

## 5. QUELQUES PROBLEMES ASYMPTOTIQUES

La propagation des rayons lumineux dans un milieu non homogène conduit à différents problèmes de type homogénéisation dont le prototype est le suivant : on se donne  $H(x, p)$  un Hamiltonien ( $\in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ ) vérifiant (9) et périodique par rapport à  $x$ , i.e. :

$$(25) \quad H(\hat{x}, p) = H(x, p) \quad \forall p \in \mathbb{R}^N, \quad \forall x, \hat{x} \in \mathbb{R}^N \quad \text{tel que } x - \hat{x} \in \mathcal{R}$$

où  $\mathcal{R} = (\mathbb{Z} T_1) \times \dots \times (\mathbb{Z} T_N)$ , et  $T_1, \dots, T_N > 0$  sont fixés. Dans ce qui suit toutes les fonctions périodiques auront la même période que ci-dessus.

On considère  $u_\varepsilon$  l'unique solution de viscosité de :  $u_\varepsilon \in BUC(\mathbb{R}^N \times [0, T]) (\forall T)$

$$(26) \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + H\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla_x u_\varepsilon\right) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \times ]0, \infty[ , u_\varepsilon|_{t=0} = u^0 \text{ sur } \mathbb{R}^N$$

où  $u^0 \in BUC(\mathbb{R}^N)$ . Le résultat suivant est tiré de P-L. Lions, G. Papanicolaou et S.R.S. Varadhan [21] :

Théorème 5.1 : La solution de viscosité  $u_\varepsilon$  de (26) converge uniformément sur  $\mathbb{R}^N \times [0, T]$  ( $\forall T > \infty$ ) vers la solution de viscosité dans  $BUC(\mathbb{R}^N \times [0, T])$  ( $\forall T < \infty$ ) de :

$$(27) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + F(\nabla_x u) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \times ]0, \infty[ , u|_{t=0} = u^0 \text{ sur } \mathbb{R}^N$$

où l'Hamiltonien  $F$  est déterminé par le problème ergodique défini comme suit. Pour tout  $p \in \mathbb{R}^N$ ,  $F(p)$  est l'unique réel  $\lambda$  tel qu'il existe  $v \in C(\mathbb{R}^N)$ , périodique, solution de viscosité de :

$$(28) \quad H(y, p + \nabla_y v) = \lambda \quad \text{dans } \mathbb{R}^N .$$

Remarques : i) Si  $H$  est convexe par rapport à  $p$ ,  $F$  est convexe.

ii) Si  $H(x, p) = |p|^m - V(x)$ , où  $m > 0$ ,  $N=1$ ,  $V$  est périodique de période  $T$  et  $\min V = 0$  (on peut toujours se ramener à ce cas) ; alors  $F(p)$  est donné par

$$\begin{cases} F(p) = 0 & \text{si } |p| \leq L, \text{ si } |p| \geq L, \lambda = F(p) \text{ est l'unique réel vérifiant} \\ |p| = \frac{1}{T} \int_0^T (V(x) + \lambda)^{1/m}, & \lambda \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{où } L = \frac{1}{T} \int_0^T V(x) dx .$$

Si  $N \geq 2$ , sous des hypothèses générales sur  $V$ , on vérifie que  $F \equiv 0$  sur un voisinage de 0. Or, si  $F \equiv 0$  sur  $\bar{B}_L$ , on voit que pour tout  $u^0$  vérifiant :  $\|\nabla_x u^0\|_\infty \leq L$ , la solution limite  $u$  de (27) est donnée par :  $u(x, t) = u^0(x)$ ,  $\forall t \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^N$ . En d'autres termes, dans ce cas-là, à la limite, il n'y a plus de propagation !

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. BARLES : Existence results for first order Hamilton-Jacobi equations. In These 3e cycle, Univ. Paris IX-Daphine, 1983. A paraître dans Trans. Amer. Math. Soc.
- [2] E.N. BARRON, L.C. EVANS et R. JENSEN : Viscosity solutions of Isaac's equations and differential games with Lipschitz controls. A paraître dans J. Diff. Eq.
- [3] M.G. GRANDALL, L.C. EVANS et P-L. LIONS : Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. A paraître dans Trans. Amer. Math.Soc
- [4] M.G. GRANDALL et P-L. LIONS : Conditions d'unicité pour les solutions généralisées des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre : C.R.A.S. Paris, 292 (1981), p. 183-186.
- [5] M.G. GRANDALL et P-L. LIONS : Viscosity solutions of Mamilton-Jacobi equations. Trans. Amer. Math. Soc., 277 (1983), p. 1-42.
- [6] M.G. GRANDALL et P.L. LIONS : Solutions de viscosité non bornées des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre. C.R.A.S. Paris 1984 ; et article détaillé en préparation.
- [7] M.G. GRANDALL et P-L. LIONS : Two approximations of solutions of Hamilton-Jacobi equations. Maths. Comp., à paraître.
- [8] L.C. EVANS et P.E. SOUGANIDIS : Differential games and representations formulas for solutions of Hamilton-Jacobi-Isaacs equations. MRC Report #2452, Univ. of Wisconsin-Madison, 1983.
- [9] W.H. FLEMING : The Cauchy problem for degenerate parabolic equations. J. Math. Mech., 13 (1964), p. 987-1008.
- [10] W.H. FLEMING : The Cauchy problem for a nonlinear first order partial differential equation. J. Diff. Eq. , 5 (1969), p. 515-530.
- [11] A. FRIEDMAN : The Cauchy problem for first order partial differential equations Ind. Univ. Math. J., 23, (1973), p. 27-40.
- [12] D. GILBARG et N.S. TRUDINGER : Elliptic partial differential equations of second order. Springer, Berlin, 1977.

- [13] H. ISHII ; Uniqueness of unbounded viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. Preprint.
- [14] S.N. KRUZHKOV<sup>v</sup> : Generalized solutions of nonlinear first order equations and of several variables. I, Mat. Sb., 70(112) (1966), p. 394-415 ; II, Math. USSR Sbornik, 1 (1967), p. 93-116.
- [15] S.N. KRUZHKOV<sup>v</sup> : Generalized solutions of the Hamilton-Jacobi equations of Eikonal type. I, Math. USSR Sbornik, 27 (1975), p. 406 - 446.
- [16] O.A. LADYZENSKAYA et N.N. URAL'TSEVA : Linear and quasilinear elliptic equations. Academic Press, New-York, 1968.
- [17] P-L. LIONS : Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations. Pitman, Londres, 1982.
- [18] P-L. LIONS : Existence results for first order Hamilton-Jacobi equations. Ric. Mat., 1983.
- [19] P-L. LIONS : Résolution de problèmes quasilinéaires. Arch. Rat. Mech. Anal., 74 (1980), p. 335-354.
- [20] P-L. LIONS et M. NISIO : A uniqueness result for the semigroup associated with the Hamilton-Jacobi-Bellman operator. Proc. Japan Acad., 58 (1982), p. 273-276.
- [21] P-L. LIONS, G. PAPANICOLAOU et S.R.S. VARADHAN : travail en préparation.
- [22] J. SERRIN : The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic differential equations with many independent variables. Philos.Trans.Roy.Soc,London,Ser.A, 264 (1969), p. 413-496.
- [23] P.E. SOUGANIDIS : Existence of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. J. Diff. Eq., à paraître.
- [24] P.E. SOUGANIDIS : Thesis, Univ. of Wisconsin-Madison, 1983.

\*  
\*   \*  
\*