Y. Meyer

Continuité sur les espaces de Hölder et de Sobolev des opérateurs définis par des intégrales singulières

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1983-1984), exp. n° 1, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1983-1984____A1_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z 1 9 8 3 - 1 9 8 4

CONTINUITE SUR LES ESPACES DE HOLDER ET DE SOBOLEV DES OPERATEURS DEFINIS PAR DES INTEGRALES SINGULIERES

par Y. MEYER

Exposé n° I

18 octobre 1983

Les résultats qui suivent ont été établis en collaboration avec P. G. Lemarié et répondent à des problèmes soulevés par C. Goulaouic. Les techniques employées sont élémentaires en ce sens qu'elles n'utilisent pas la transformation de Fourier sur $\mathbb{R}^n$ ni même la structure de groupe. Le cadre naturel est donc celui des espaces de nature homogène de Coifman et Weiss. Nous avons cependant préféré écrire ces notes avec le langage usuel ; la traduction dans le langage de Coifman et Weiss est laissée au lecteur.

Commençons par rappeler quelques définitions.
Si $0 < s < 1$, nous désignerons par $\Lambda^s(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions continues (modulo les fonctions constantes) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vérifiant pour une certaine constante $C \geq 0$, tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $y \in \mathbb{R}^n$, $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^s$. Si $s = 1$, nous désignerons dans cet exposé par $\Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ la classe de Zygmund des fonctions continues (modulo les fonctions affines) vérifiant pour une certaine constante $C \geq 0$ tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $y \in \mathbb{R}^n$, $|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)| \leq C|y|$.

Enfin si $s > 1$, on écrit $s = m+r$ où $0 < r \leq 1$ et $m \in \mathbb{N}$ et $f \in \Lambda^s(\mathbb{R}^n)$ signifie que, pour tous les multi-indices $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tels que $|\alpha| = m$, on a $\partial^\alpha f \in \Lambda^r(\mathbb{R}^n)$ Si $m < s < m+1$ (c'est à dire si $0 < r < 1$) , $\Lambda^s(\mathbb{R}^n)$ est un espace de fonctions modulo les polynômes de degré $\leq m$. Si $s = m+1$, $\Lambda^s(\mathbb{R}^n)$ est un espace de fonctions modulo les polynômes de degré $\leq m+1$

A l'aide des espaces $\Lambda^s(\mathbb{R}^n)$, on définit maintenant les espaces $C^s(\mathbb{R}^n)$.

Si $0 < s \leq 1$, $C^s(\mathbb{R}^n) = \Lambda^s(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. La norme de f dans $C^s(\mathbb{R}^n)$ est la somme de la norme $\Lambda^s(\mathbb{R}^n)$ et de la norme $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $C^s(\mathbb{R}^n)$ est un espace de fonctions continues (et même une algèbre). Les fonctions constantes ne sont plus identifiées à 0. Si $m < s \leq m+1$, $m \in \mathbb{N}$, on écrit $f \in C^s(\mathbb{R}^n)$ si (et seulement si) $\partial^\alpha f \in C^r$ $(r = s-m)$ pour tous les multi-indices α de longueur $|\alpha| \leq m$.

Naturellement il n'y a pas de différence locale entre C^s et Λ^s. La norme dans Λ^s est adaptée au groupe δ_t $(t > 0)$ des dilatations usuelles de $\mathbb{R}^n$. L'avantage de $C^s(\mathbb{R}^n)$ est d'être une algèbre.

On reprend le même schéma en définissant les espaces de Beppo Levi B^s, $s > 0$, et les espaces de Sobolev H^s, $s \geq 0$. Rappelons que si $0 < s < 1$, $B^s(\mathbb{R}^n)$ est le complété de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ pour la norme $\left(\iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |f(x) - f(y)|^2 |x-y|^{-n-2s} dx\, dy \right)^{1/2}$. Si $s = 1$, $B^1(\mathbb{R}^n)$ est le complété de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ pour la norme $\|\mathrm{Grad}\, f\|_2$ et, si $s > 1$, $s = m+r$ où $0 < r \leq 1$ et l'on complète $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ pour la norme $\left(\sum_{|\alpha| = m} \|\partial^\alpha f\|^2_{B^r} \right)^{1/2}$. Tout comme $C^s = \Lambda^s \cap L^\infty$ si si $0 < s \leq 1$, on a $H^s = B^s \cap L^2$ etc...

Avant d'énoncer les résultats de notre étude, il est peut-être utile (bien que l'exposé oral ait démontré le contraire) de donner cinq exemples.

1. LES CINQ EXEMPLES

Exemple 1 : Soit $a(x) \in C^s(\mathbb{R}^n)$, désignons par A l'opérateur de multiplication ponctuelle par la fonction a(x). Soit T un opérateur pseudo-différentiel classique d'ordre 1 dont le symbole $\tau(x,\xi) \in S^1_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Désignons par $\tilde{a}(x)$ la fonction (Ta)(x). Supposons $s > 1$ de sorte que $\tilde{a}(x) \in C^{s-1}(\mathbb{R}^n)$.

Appelons $\tilde{A}$ l'opérateur de multiplication ponctuelle par la fonction $\tilde{a}(x)$. Considérons alors les deux opérateurs $L_1 = [T,A]$ (commutateur entre T et A) et $L_2 = [T,A] + \tilde{A}$.

On observe (et l'on démontre aussi) le phénomène curieux suivant : L_1 envoie continûment $C^\lambda(\mathbb{R}^n)$ dans $C^\lambda(\mathbb{R}^n)$ lorsque $0 < \lambda \leqslant s-1$ mais ceci stoppe pour $\lambda = s-1$. C'est à dire que si $\lambda > s-1$, L_1 envoie continûment $C^\lambda(\mathbb{R}^n)$ dans $C^{s-1}(\mathbb{R}^n)$ et l'on n'a pas mieux. En revanche L_2 est continu de $C^\lambda(\mathbb{R}^n) \to C^\lambda(\mathbb{R}^n)$ lorsque $0 < \lambda \leqslant s$ et, de nouveau, si $\lambda > s$, l'espace d'arrivée est $C^s(\mathbb{R}^n)$.

C'est à dire que L_2 est "meilleur" que L_1 en un sens que le calcul pseudo-différentiel classique ne peut expliquer. Je me permets de donner un contre exemple contredisant l'opinion de certains auditeurs du séminaire persuadés que, si $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, L_2 est en fait régularisant d'ordre 1.

Prenons $\tau(x,\xi) = |\xi|$ ou encore $T = \sqrt{-\Delta}$. Choisissons $a(x) = e^{i\alpha.x}$ ($\alpha \in \mathbb{R}^n$). Alors L_2 est un opérateur pseudo-différentiel classique dont le symbole est $(|\xi+\alpha| - |\xi| - |\alpha|)e^{i\alpha.x}$. Ce symbole a pour développement asymptotique $(\alpha.\frac{\xi}{|\xi|} - |\alpha|)e^{i\alpha.x} + O(|\xi|^{-1})$ et l'opérateur correspondant est (au facteur $e^{i\alpha.x}$ près) une combinaison de transformations de Riesz, combinaison qui n'est pas absorbée par la soustraction par $|\alpha|$.

Exemple 2 : On reprend les mêmes opérateurs L_1 et L_2 que ci-dessus mais on les fait opérer sur les espaces de Sobolev $H^\lambda(\mathbb{R}^n)$. Là encore la valeur critique pour L_1 est $\lambda = s-1$ (mais il convient si $\lambda = s-1$ de remplacer l'espace d'arrivée par $H^{\lambda-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ étant arbitraire et l'on a $\varepsilon = 0$ si $\lambda > s-1$).

Avec les mêmes précautions de langage, la valeur critique pour L_2 est $\lambda = s$.

Exemple 3 : Il est dû à A. P. Calderón. On appelle $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne : $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant C|x-y|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$.

Considérons le noyau-distribution $K(x,y) = \text{v.p.}\ \dfrac{\varphi(x) - \varphi(y)}{(x-y)^2}$ et l'opérateur $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ défini à l'aide de ce noyau-distribution. Alors T est continu sur $L^2(\mathbb{R})$ (Calderón, 1965) mais T n'est pas continu sur $H^s(\mathbb{R})$ ou sur $\Lambda^s(\mathbb{R}^n)$ pour $s > 0$. En revanche le noyau-distribution $K_1(x,y) = \dfrac{\varphi(x) - \varphi(y) - (x-y)\varphi'(y)}{(x-y)^2}$ conduit à un meilleur opérateur T_1 au sens que T_1 est borné sur $H^s(\mathbb{R})$ pour $0 \leqslant s \leqslant 1$ et sur $\Lambda^s(\mathbb{R})$ pour $0 < s < 1$.

Exemple 4 : On désigne par $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un ouvert connexe et borné dont la frontière ∂D est localement le graphe d'une fonction lipschitzienne et l'on appelle $K : L^2(\partial D) \to L^2(\partial D)$ l'opérateur défini par le potentiel de double couche.

En employant des coordonnées locales, ∂D est représenté par un graphe $t = \varphi(x)$ où $x \in \mathbb{R}^n$ et où $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne. Alors le noyau-distribution $K(x,y)$ de l'opérateur K est donné par

$$K(x,y) = \text{v.p.}\ \frac{1}{\omega_n}\ \frac{\varphi(x) - \varphi(y) - (x-y).\nabla\varphi(y)}{[\,|x-y|^2 + (\varphi(x) - \varphi(y))^2\,]^{\frac{n+1}{2}}}$$

(ω_n est la surface de la sphère unité $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$). Il est bien connu (A. Calderón, Fabes, Jodeit et Rivière) que si $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est seulement lipschitzienne, l'opérateur K n'est pas compact.

La continuité de K sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ a été démontrée par les auteurs que nous venons de citer si $\|\nabla\varphi\|_\infty < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ étant une mystérieuse constante dont la valeur s'est trouvée devenir $+\infty$ après quelques années).

L'opérateur K est continu sur $H^s(\mathbb{R}^n)$ si $0 < s \leqslant 1$ et sur $\Lambda^s(\mathbb{R}^n)$ si $0 < s < 1$.

En revanche ces deux dernières assertions cessent si l'on remplace le numérateur de $K(x,y)$ par $\varphi(x) - \varphi(y)$.

Exemple 5 : Nous retournons aux opérateurs pseudo-différentiels. Soit $\sigma(x,\xi) \in S^0_{1,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ un symbole vérifiant

$$|\partial^\alpha_\xi\, \partial^\beta_x\, \sigma(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta}\ (1 + |\xi|)^{-|\alpha| + |\beta|}\ .$$

Alors l'opérateur pseudo-différentiel correspondant est borné sur $H^s(\mathbb{R}^n)$ et sur $C^s(\mathbb{R}^n)$ pour $s > 0$. Cependant l'opérateur n'est pas continu sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Finalement il est important de rappeler que la transformation de Hilbert usuelle $H : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ (définie par la convolution avec v.p. $\frac{1}{\pi x}$) n'est pas continue sur $C^s(\mathbb{R})$ lorsque $0 < s$ car la condition $L^\infty(\mathbb{R})$ n'est pas respectée. En revanche H est continue sur $\Lambda^s(\mathbb{R})$.

Conclusion : Les cinq exemples ci-dessus montrent que la continuité L^2 et la continuité C^s (ou Λ^s) ou la continuité B^s (ou H^s) ne sont pas fortement corrélées.

2. ENONCES DES RESULTATS

Nous désignerons par ∂_t, $t > 0$, le groupe des dilatations usuelles de $\mathbb{R}^n$ ($\delta_t(x) = tx$) et poserons $(\delta_t\varphi)(x) = \varphi(\frac{x}{t})$ si $\varphi \in \mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$. De même R_u, $u \in \mathbb{R}^n$, est l'opérateur de translation par $u \in \mathbb{R}^n$ défini par $(R_u\varphi)(x) = \varphi(x-u)$. Les résultats que nous présentons sont invariants par conjugaison par les opérateurs R_u et δ_t . Remarquons, en effet, que les opérateurs $L : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $R_u\delta_t\, L\, \delta_t^{-1}\, R_u^{-1}$ ont la même norme (si elle est finie) lorsqu'on les fait opérer sur Λ^s $(s > 0)$ ou sur B^s $(s > 0)$. Il est donc naturel de faire sur le noyau-distribution de L des hypothèses invariantes par les conjugaisons que nous venons de décrire.

Voici ces hypothèses.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ l'ouvert défini par $y \neq x$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$. Désignons par $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ un opérateur linéaire continu dont le noyau distribution sera appelé $K(x,y)$. Nous supposerons dans toute la suite que la restriction à Ω de $K(x,y)$ soit, en fait, une fonction vérifiant, pour une certaine constante $C \geqslant 0$ et un certain exposant $\varepsilon \in]0,1]$,

$$|K(x,y)| \leqslant C|x-y|^{-n} \tag{2.1}$$

$$|K(x',y) - K(x,y)| \leqslant C|x-x'|^{\varepsilon}|x-y|^{-n-\varepsilon} \tag{2.2}$$

pour tout $(x,y) \in \Omega$ et tout x' tel que $|x-x'| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|$.

Avant d'énoncer le premier de nos résultats, nous avons besoin d'une définition.

Définition 1 : Un opérateur linéaire continu $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est d'ordre 0 au sens faible si l'ensemble des applications $R_u\delta_t\, L\, \delta_t^{-1}\, R_u^{-1} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $u \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, est un ensemble borné.

Nous pouvons expliciter cette condition en désignant par $<.,.>$ la forme bilinéaire de dualité entre $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

La condition ci-dessus signifie que pour toute partie bornée $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ il existe une constante $C = C(\mathcal{B})$ telle que pour toute $f \in \mathcal{B}$, toute $g \in \mathcal{B}$ tout $t > 0$ et tout $u \in \mathbb{R}^n$, on ait

(2.3) $$|<T(R_u\,\delta_t f)\ ,\ R_u\,\delta_t\,g>| \leqslant C\,t^n\ .$$

Par exemple, un opérateur linéaire continu $T : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ est d'ordre 0. La réciproque est évidemment fausse : si $\sigma(x,\xi) \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, cette condition suffit pour que l'opérateur pseudo-différentiel correspondant $\sigma(x,D)$ soit d'ordre 0 et ne suffit pas pour qu'il soit borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Une seconde définition est nécessaire. Appelons $\mathcal{D}_o(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ le sous-espace des fonctions $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telles que $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 0$. Le dual de l'espace localement convexe $\mathcal{D}_o(\mathbb{R}^n)$ est l'espace quotient $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)/\mathbb{R}$ des distributions modulo les fonctions constantes.

<u>Définition 2</u> : <u>Soit</u> $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ <u>un opérateur linéaire continu dont le noyau-distribution vérifie</u> (2.1) <u>et</u> (2.2).

<u>Alors pour toute</u> $\psi \in \mathcal{D}_o(\mathbb{R}^n)$ <u>et</u> $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{k \to +\infty} < T(\delta_k\varphi),\psi> \;=\; \varphi(0)\ \ell(\psi)$$

<u>et la forme linéaire continue</u> $\ell \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)/\mathbb{R}$ <u>sera notée</u> $T(1)$.

Naturellement cette définition indirecte est inutile si, par ailleurs, le noyau-distribution $K(x,y)$ de T vérifie, par exemple, $|K(x,y)| \leqslant C|x-y|^{-n-1}$ lorsque $|x-y| \geqslant 1$. On décompose alors simplement $1 = u + v$ où $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est égale à 1 au voisinage de x et, sur ce voisinage $T(1)$ est défini comme la somme $T(u) + T(v)$.

La preuve de la définition 2 est donnée dans [5] mais ne présente aucune difficulté.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer la condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ dont le noyau-distribution vérifie (2.1) et (2.2) se prolonge à Λ^s $(0 < s < \varepsilon)$. Cette condition entraînera que T se prolonge à B^s $(0 < s < \varepsilon)$.

Théorème 1 : Soit $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ un opérateur linéaire continu dont le noyau-distribution vérifie (2.1) et (2.2). Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes

(a) T est d'ordre 0 (au sens de la définition 1) et $T(1) = 0$ (au sens de la définition 2)

(b) il existe un $s \in]0, \varepsilon[$ tel que T se prolonge en un opérateur linéaire continu sur $\Lambda^s(\mathbb{R}^n)$

(c) pour tout $s \in]0,\varepsilon[$, $T : \Lambda^s(\mathbb{R}^n) \to \Lambda^s(\mathbb{R}^n)$ est continu.

Enfin l'une de ces propriétés équivalentes entraîne que, pour tout $s \in]0,\varepsilon[$, T se prolonge en un opérateur linéaire continu sur B^s.

Cependant, comme le montrent des contre-exemples très simples, les hypothèses du théorème 1 n'impliquent ni la continuité H^s $(0 < s < \varepsilon)$ ni la continuité C^s $(0 < s < \varepsilon)$.

Nous allons généraliser le théorème 1 dans deux directions. D'une part nous allons demander au noyau-distribution $K(x,y)$ plus de régularité en x permettant de conclure à la continuité de l'opérateur correspondant T sur les espaces B^s lorsque $s \geqslant 1$. D'autre part nous allons donner des conditions suffisantes pour passer de B^s à H^s (sans supposer nécessairement la continuité L^2).

Théorème 2 : Soient $m \in \mathbb{N}$, $0 < \eta < 1$ et $\varepsilon = m + \eta$. Soit $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ un opérateur linéaire continu dont le noyau-distribution $K(x,y)$ restreint à l'ouvert Ω du théorème 1, est une fonction continue vérifiant

$$(2.8) \qquad |\partial_x^\alpha K(x,y)| \leqslant C|x-y|^{-n-|\alpha|}$$

pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leqslant m$ et

$$(2.9) \qquad |\partial_x^\alpha K(x',y) - \partial_x^\alpha K(x,y)| \leqslant C \frac{|x-x'|^\eta}{|x-y|^{n+\varepsilon}}$$

si $|\alpha| = m$ et $|x-x'| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|$.

Supposons $0 < s < m+\eta$.

Alors tout opérateur T du type précédent qui est d'ordre 0 (au sens de la définition 1) et qui vérifie $T(x^\beta) = 0$ (en un sens qui sera précisé ci-dessous), pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\beta| \leqslant m$, est continu de B^s dans lui-même et de Λ^s dans lui-même.

Il convient de définir $T(x^\beta)$. On appelle $W_m \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ le sous-espace défini par $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)x^\beta dx = 0$ pour tout $\varphi \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\beta| \leqslant m$. Le dual de W_m est l'espace quotient de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ par les polynômes de degré $\leqslant m$. De sorte que l'espace Λ^s s'injecte naturellement dans cet espace quotient.
En d'autres termes un élement $f \in \Lambda^s$ définit naturellement une forme linéaire (continue) sur W_m lorsque $m < s < m + \eta$.

Nous allons précisément définir les $T(x^\beta)$ comme de telles formes linéaires continues sur W_m. Pour cela on reprend la démarche de la définition 2.
La distribution $\int K(x,y)\ \psi(x)dx$ est, en dehors du support de $\psi \in W_m$, une fonction localement bornée qui est $O(|y|^{-n-\varepsilon})$ à l'infini.

Si $|\beta| \leqslant m$, l'intégrale $\int y^\beta\ dy\ \{\int K(x,y)\psi(x)dx\}$ a un sens à l'infini. Elle a, de toute façon, un sens local puisque $K(x,y) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Nous allons maintenant décrire un énoncé local correspondant au théorème 2. Outre (2.8) et (2.9) on suppose

$$(2.10)\quad |\partial_x^\alpha K(x,y)| \leqslant C_N |x-y|^{-N} \quad \text{pour } |x-y| \geqslant 1 \quad \text{et tout } N \geqslant n \quad \text{lorsque} \quad |\alpha| \leqslant m$$

$$(2.11)\quad |\partial_x^\alpha K(x',y) - \partial_x^\alpha K(x,y)| \leqslant C_N |x'-x|^\eta |x-y|^{-N} \quad \text{pour } |x-y| \geqslant 1,$$

$$|x'-x| \leqslant \frac{1}{2}|x-y| \quad \text{et tout } N \geqslant n .$$

Avec ces nouvelles hypothèses et en conservant les notations du théorème 2, on a le résultat local suivant.

Théorème 3 : Soit $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ un opérateur linéaire continu dont le noyau-distribution vérifie les conditions (2.8), (2.9), (2.10) et (2.11).

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un tel opérateur soit continu sur C^s $(0 < s < \varepsilon)$ est que T soit d'ordre 0 (au sens de la définition 1) et que

$$(2.12)\qquad \sup_{u \in \mathbb{R}^n}\ \sup_{f \in \mathcal{B}} \|T\,R_u\,\varphi\|_{C^s} < +\infty$$

pour toute partie bornée $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Cette condition implique que T se prolonge en un opérateur linéaire sur H^s pour $0 < s < \varepsilon$.

3. RETOUR AUX EXEMPLES PRELIMINAIRES

Considérons les deux opérateurs $L_1 = [T,A]$ et $L_2 = [T,A] + \tilde{A}$ du premier exemple. Appelons $T(x,y)$ le noyau-distribution de T. Les restrictions à Ω des noyaux-distributions $L_1(x,y)$ et $L_2(x,y)$ de L_1 et L_2 sont les mêmes et valent $-(a(x) - a(y))T(x,y)$. Les estimations (2.8) à (2.11) sont alors immédiates. On prendra garde que la signification de la lettre s a changé. Il est facile de vérifier que L_1 et L_2 sont d'ordre 0. La seule différence entre L_1 et L_2 apparaît dans la condition (2.12). On a $L_2(\varphi) = T(a\varphi) - aT(\varphi) - \varphi T(a) = [T,\Phi](a) - aT(\varphi)$. Ceci en appelant Φ l'opérateur de multiplication ponctuelle par $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. On observe alors que le commutateur $[T, \Phi]$ est d'ordre 0 (et ceci uniformément en $u \in \mathbb{R}^n$ si φ est remplacée par $R_u\,\varphi$). Si $a \in C^s(\mathbb{R}^n)$, on a donc $[T, \Phi](a) \in C^s$ et il en est de même pour $aT(\varphi)$.

Un autre cas typique d'application du théorème 3 est celui des opérateurs de la "classe interdite" $T \in Op\, S^0_{1,1}$. Suivant E. M. Stein (notes d'un cours donné à Princeton en 1972), ces opérateurs sont bornés sur H^s pour tout $s > 0$ et sur C^s pour tout $s > 0$. En fait, c'est un corollaire du théorème 3 puisque le noyau-distribution $K(x,y)$ de T vérifie

$$|\partial_x^\alpha\, \partial_y^\beta\, K(x,y)| \leqslant C_{\alpha,\beta}|x-y|^{-n-|\alpha|-|\beta|} \quad .$$

Il suffit, pour conclure, de remarquer que le symbole de l'opérateur $R_u^{-1} T\, R_u$ est $\sigma(x+u, \xi)$ qui vérifie uniformément en u les mêmes estimations que $\sigma(x,\xi)$. Pour cette raison, si $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est une partie bornée, $R_u^{-1}\, T\, R_u(\mathcal{B})$ est une partie bornée de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

4. LA DEMONSTRATION, PAR P. G. LEMARIE, DE LA CONTINUITE SUR B^s DES OPERATEURS DEFINIS PAR LE THEOREME 1

Nous partons du lemme suivant (prouvé dans [5]).

Lemme 1 : Soit $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ un opérateur d'ordre 0 au sens de la définition 1, tel que $T(1) = 0$ et dont le noyau-distribution vérifie (2.1) et (2.2). Alors pour toute partie bornée $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, il existe une constante C telle que, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, tout $t > 0$ et toute $\varphi \in \mathcal{B}$ on ait

(4.1) $$\|T\, R_u \delta_t(\varphi)\|_\infty \leqslant C.$$

Armés de ce lemme, la continuité sur B^s s'établit comme suit. On appelle $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ une fonction radiale, égale à 1 si $|u| \leqslant 2$ (u est la variable) et l'on pose $1 = \xi(u) + \eta(u)$.

On a alors, si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset B^s(\mathbb{R}^n)$ et si $g = T(f)$, $g(y) - g(x) = g_1(x,y) + g_2(x,y) + g_3(x,y) + g_4(x,y)$ où, grâce à $T(1) = 0$,

$$g_1(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} \{K(y,u) - K(x,u)\}\,(f(u) - f(x))\eta\left(\frac{u-x}{|y-x|}\right) du$$

$$g_2(x,y) = -\int_{\mathbb{R}^n} K(x,u)(f(u) - f(x))\,\xi\left(\frac{u-x}{|y-x|}\right) du$$

$$g_3(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} K(y,u)(f(u) - f(y))\xi\left(\frac{u-x}{|y-x|}\right) du\ .$$

et

$$g_4(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} K(y,u)(f(y) - f(x))\xi\left(\frac{u-x}{|y-x|}\right) du\ .$$

Tous les termes se traitent alors sans faire davantage appel aux "cancellations du noyau" qui ont été complètement utilisées dans la preuve du lemme 1. Par exemple, on choisit $s < \alpha < \varepsilon$ et l'on écrit

$$|g_1(x,y)| \leqslant C \int_{|u-x| \geqslant 2|y-x|} |x-y|^{\varepsilon} |u-x|^{-n-\varepsilon} |f(u) - f(x)|\, du =$$

$$C \int_{|u-x| \geqslant 2|y-x|} |x-y|\ |u-x|^{-\frac{n}{2}-\varepsilon+\alpha}\ |u-x|^{-\frac{n}{2}-\alpha}\ |f(u) - f(x)|\, du\ .$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors

$$|g_1(x,y)|^2 \leqslant C'|y-x|^{2\alpha} \int_{|u-x| \geqslant 2|y-x|} |u-x|^{-n-2\alpha} |f(u) - f(x)|^2 du$$

et le calcul de $\iint |g_1(x,y)|^2 |x-y|^{-n-2s} dx\, dy$ se termine en intégrant d'abord en y (puis en u et x). On obtient

$$\iint |g_1(x,y)|^2\ |x-y|^{-n-2s} dx\, dy \leqslant C' \iint |f(x) - f(y)|^2 |x-y|^{-n-2s}\, dx\, dy\ .$$

Le cas de g_2 est semblable. On a :

$$|g_2(x,y)| \leqslant C\int_{|u-x|\leqslant 10|y-x|} |x-u|^{-n}|f(u)-f(x)|\,du\ .$$

On introduit un exposant $\beta > 0$ tel que $0 < \beta < s$ et l'on écrit $|x-u|^{-n} = |x-u|^{-n/2+\beta}|x-u|^{-n/2-\beta}$. On applique de nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'on termine comme plus haut.

On a

$$|g_3(x,y)| \leqslant C\int_{|u-y|\leqslant 11|x-y|} |y-u|^{-n}|f(u)-f(y)|\,du$$

et il suffit d'échanger les rôles de x et de y dans le traitement de $g_2(x,y)$ pour conclure.

Enfin $|g_4(x,y)| \leqslant C|f(y)-f(x)|$ grâce au lemme 1. La preuve de la continuité Λ^s est tout aussi élémentaire et laissée au lecteur (et également basée sur le lemme 1) .

5. LA NOUVELLE PREUVE DU THEOREME DE JOURNE ET DAVID.

Rappelons ce théorème. On considère un opérateur $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ dont le noyau-distribution $K(x,y)$ vérifie (2.1) et (2.2). On appelle T^* le transposé formel de T dont le noyau-distribution est $K^*(x,y) = K(y,x)$. On suppose également que K^* vérifie (2.1) et (2.2).

Alors le théorème de David et Journé est l'équivalence, pour un tel opérateur T, entre les deux conditions suivantes

(5.1) T se prolonge en un opérateur linéaire et continu sur $L^2(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n;dx)$

(5.2)
$$T(1) = \beta \in BMO(\mathbb{R}^n)\ ,$$
$$T^*(1) = \gamma \in BMO(\mathbb{R}^n)$$

et T d'ordre 0.

Rappelons que l'implication (5.1) $\Rightarrow$ (5.2) est due à Ch. Fefferman et E. Stein.

L'implication (5.2) $\Rightarrow$ (5.1) peut maintenant se démontrer comme suit. On appelle P_t le semi-groupe de Poisson, on pose $Q_t = -t\frac{\partial}{\partial t}P_t$ et

$$L_\beta(f) = 4\int_0^\infty Q_t\,\{(Q_t\beta)(P_tf)\}\,\frac{dt}{t}\,. \tag{5.3}$$

Alors la théorie des mesures de Carleson et la caractérisation de BMO grâce aux mesures de Carleson (Fefferman et Stein) donnent gratuitement la continuité de L_β .

On a par ailleurs $L_\beta(1) = \beta$ (ceci est la raison d'être du 4). On a $L_\beta^*(1) = 0$ et le noyau-distribution $K_\beta(x,y)$ de L_β vérifie (2.1), (2.2) ainsi que la condition analogue en y (pour tout $\varepsilon \in]0,1[$). On forme de même L_γ puis $R = T - L_\beta - L_\gamma^*$. Alors le noyau-distribution $R(x,y)$ de R vérifie (2.1), (2.2) ainsi que les conditions analogues en y. L'opérateur R est d'ordre 0 (au sens de la définition 1) et $R(1) = R^*(1) = 0$.

Le théorème 1 et la moitié des hypothèses sur R fournissent la continuité de R sur B^s pour $0 < s < \varepsilon$. Ce même théorème 1 fournit, avec l'autre moitié des hypothèses sur R, la continuité de R^* sur B^s ; c'est à dire la continuité de R sur B^{-s} . Par interpolation, R est continu sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ ce qu'il fallait démontrer.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. David et J. L. Journé : Une caractérisation des opérateurs intégraux singuliers bornés sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. C. R. Acad. Sc. Paris, t.296 (16 mai 1983) 761-764.

[2] C. Feffermann and E. M. Stein : H^p spaces of serveral variables. Acta Math. 129 (1972), 137-193.

[3] P. G. Lemarié : Thèse de 3ème cycle, à paraître.

[4] Y. Meyer : Théorie du potentiel dans les domaines lipschitziens d'après G. C. Verchota (Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, 1982-83).

[5] Y. Meyer : Les nouveaux opérateurs de Calderon-Zygmund. Actes du Colloque L. Schwartz, Ecole Polytechnique, Juin 1983.

*
**