

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

S. ALINHAC

G. MÉTIVIER

## **Propagation de l'analyticité locale pour l'équation d'Euler**

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1983-1984), exp. n° 16,  
p. 1-13

[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1983-1984\\_\\_\\_A16\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1983-1984___A16_0)

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1983-1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

---

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z 1 9 8 3 - 1 9 8 4

PROPAGATION DE L'ANALYTICITE LOCALE

POUR L'EQUATION D'EULER

par S. ALINHAC et G. METIVIER



1. INTRODUCTION

Cet exposé comprend deux parties : l'une consacrée à l'équation d'Euler, l'autre aux opérateurs pseudo-différentiels analytiques, étant bien entendu que ces deux parties sont étroitement reliées. Soulignons d'abord que tout ce qui touche l'équation d'Euler a été obtenu en collaboration avec S. Alinhac [3].

Les équations d'Euler pour un fluide incompressible, homogène et non visqueux s'écrivent, avec les notations habituelles

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u &= \text{grad } p + f \\ (1.1) \quad \text{div } u &= 0 \\ u|_{t=0} &= u_0 \end{aligned}$$

où la variable  $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , les inconnues sont  $u = (u_1, \dots, u_n)$  et  $p$ , et les données  $f$  et  $u_0$ .

Le problème est d'étudier la propagation de l'analyticité pour une solution de (1.1), dans un domaine où, a priori, elle est assez régulière. Dans [7] [8] et [9], Bardos, Benachour et Zerner ont étudié le problème de l'analyticité globale et on veut ici préciser l'étude en s'attachant à l'analyticité locale des solutions.

(1.1) n'est pas un système différentiel hyperbolique et les résultats de Alinhac-Métivier [1],[2] ne peuvent être directement appliqués. Cependant, comme il est bien connu, la pression  $p$  s'exprime en fonction de  $u$  par l'intermédiaire des équations :

$$(1.2) \quad \Delta p = \text{div}(u \cdot \nabla u) - \text{div } f$$

ou encore

$$(1.3) \quad p = \Delta^{-1}(\text{div}(u \cdot \nabla u) - \text{div } f)$$

On remarque que, grâce à l'équation  $\operatorname{div} u = 0$ , on a :

$$(1.4) \quad \operatorname{div}(u \cdot \nabla u) = F(u) = \sum_{j,k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_j} .$$

Notant  $P$  l'opérateur  $\operatorname{grad} \Delta^{-1}$  et  $f' = f - P \operatorname{div} f$ , le système (1.1) prend alors l'allure d'un système hyperbolique pseudodifférentiel non linéaire

$$(1.5) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = P F(u) + f' .$$

L'objet du travail est alors d'étendre les résultats de [1] à des systèmes du type (1.5).

Avant de poursuivre, notons que  $P$  est de degré  $-1$ , et que  $F(u)$  ne fait intervenir que des dérivées d'ordre 1 en  $u$  (cf. (1.4)). Par conséquent l'expression  $P F(u)$  est de degré 0 et la partie principale du système (1.5) est tout simplement le système différentiel hyperbolique diagonal :

$$(1.6) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = f' .$$

On s'attend donc à ce que la régularité se propage le long des bicaractéristiques de (1.6), c'est-à-dire ici, le long des trajectoires du mouvement du fluide, c'est-à-dire le long des courbes intégrales du champ de vitesses  $u$  :

$$(1.7) \quad \frac{dx}{dt} = u(t, x(t)) .$$

Énonçons maintenant un résultat précis : considérons sur un cylindre  $[0, T] \times \Omega$  une solution  $u(t, x)$  de (1.1) vérifiant :

$$(1.8) \quad \begin{cases} u \in C^0([0, T] ; H^{\mu+1}(\Omega)) \\ \frac{\partial u}{\partial t} \in C^0([0, T] ; H^{\mu}(\Omega)) \end{cases}$$

où  $\mu$  est un entier  $> \frac{n}{2}$ . Pour des théorèmes d'existence de solutions vérifiant (1.8) on renvoie à Kato [14], Ebin-Marsden [12], Bourguignon-Brezis [11] ou Temam [16].

Fixons  $x_0 \in \Omega$  et notons  $\gamma(t)$  la courbe intégrale de (1.7) issue au temps  $t=0$  du point  $x_0$ ; d'après (1.8),  $u$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, T] \times \bar{\Omega}$  et on peut supposer  $\gamma$  définie sur  $[0, T]$  avec  $\gamma(t) \in \Omega$ .

Théorème 1 : Si la donnée  $u_0$  est analytique en  $x_0$ , et si  $f$  est analytique sur  $\gamma$ , alors la solution  $u$  est analytique sur  $\gamma$ .

Ce théorème peut être étendu dans différentes directions : on peut considérer d'abord le cas d'un fluide non homogène :

$$(1.9) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + f \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \nabla \rho = 0 \\ \operatorname{div} u = 0. \end{cases}$$

où les inconnues sont  $u$ ,  $\rho$  et  $p$ .

L'opérateur  $P$  intervenant dans (1.5) est alors à remplacer par  $\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} \cdot (\operatorname{div} \frac{1}{\rho} \operatorname{grad})^{-1}$ ; il dépend donc de l'inconnue  $\rho$ .

On peut considérer ensuite le système (1.1) ou (1.9) sur un ouvert borné ; on adjoint alors la condition aux limites

$$(1.10) \quad u \cdot n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

$n$  désignant la normale à  $\partial\Omega$ .

Ces deux extensions ont été faites par Le Bail. (Travaux en cours de rédaction).

Plus généralement la méthode s'applique à des systèmes qui couplent une partie hyperbolique (en  $t$ ) et une partie elliptique en  $x$ , par exemple du type suivant :

$$(1.11) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + F(u, p, \partial_x u, \partial_x p) = 0 \\ A(u, p, \partial_x u, \partial_x p, \partial_x^2 u, \partial_x^2 p) = 0 \end{cases}$$

$A$  étant elliptique par rapport à  $p$ .

2. SCHEMA DE LA DEMONSTRATION

Soit  $\omega \subset \Omega$  un petit voisinage de  $x_0$  ; soit  $\omega_t$  son image par le flot de (1.7) et soit  $\mathcal{C} = \{(t,x) \in [0,T] \times \Omega / x \in \omega_t\}$ . On suppose  $u_0$  analytique sur  $\bar{\omega}$ ,  $f$  analytique sur  $\bar{\mathcal{C}}$  et on montre que  $u$  est analytique sur  $\mathcal{C}$ . Tout d'abord, en utilisant les résultats de J.M. Bony [10] on vérifie que  $u$  est  $C^\infty$  sur  $\mathcal{C}$ .

Pour  $\delta > 0$  assez petit on note  $\omega_\delta = \{x \in \omega / \text{dist}(x, \partial\omega) > \delta\}$  et  $\omega_{t,\delta}$  son image par le flot de (1.7). On introduit alors les notations suivantes :

$$(2.1) \quad |u|_{N,t,\delta} = \sup_{|\alpha|=N} \|\partial_x^\alpha u(t.)\|_{H^\mu(\omega_{t,\delta})}$$

$$(2.2) \quad |u|_{N,t} = \sup_{\delta \in ]0, \delta_0]} \delta^{N-1} |u|_{N,t,\delta}$$

$\varepsilon$  et  $\lambda$  étant des paramètres on pose :

$$(2.3) \quad \|u\|_N = \sup_{1 \leq p \leq N} \sup_{t \in [0,1]} \frac{e^{-\lambda t(p-1)} \varepsilon^{p-1}}{m_{p-1}} |u|_{p,t}$$

$$\text{où } m_p = \frac{p!}{(p+1)^2} .$$

On a :  $\|u\|_1 \leq \|u\|_{C^0([0,T] ; H^{\mu+1}(\Omega))}$  et la démonstration consiste à montrer par récurrence sur  $N$  que

$$(2.4) \quad \forall N \geq 1 : \|u\|_N \leq H$$

si les paramètres  $\varepsilon$ ,  $\lambda$  et  $H$  sont bien choisis.

Pour cela, on reprend la méthode de [1] : dériver l'équation, et utiliser les inégalités d'énergie. Soit  $|\alpha| = N \geq 2$  ; posons  $v = \partial^\alpha u$  ; en dérivant (1.1) il vient :

$$(2.5) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \nabla v = g$$

où  $g$  vérifie

$$(2.6) \quad \|g(t, \cdot)\|_{H^\mu(\omega_{t,\delta})} \leq C \left\{ |\text{grad } p|_{N,t,\delta} + N|u|_{N,t,\delta} + e^{\lambda(N-1)t} \varepsilon^{1-N} \delta^{1-N} m_{N-1} (\|u\|_{N-1}^2 + 1) \right\}.$$

Pour l'équation (2.5) on a les inégalités d'énergie suivantes :

$$(2.7) \quad \|v(t, \cdot)\|_{H^\mu(\omega_{t,\delta})} \leq C \left\{ \|v(0, \cdot)\|_{H^\mu(\omega_\delta)} + \int_0^t \|g(s, \cdot)\|_{H^\mu(\omega_{s,\delta})} ds \right\}.$$

Avec (2.6) multipliant  $\delta^{N-1}$ , et prenant le sup en  $\delta$  il vient :

$$(2.8) \quad |u|_{N,t} \leq C \left\{ |u|_{N,0} + \int_0^t (|\text{grad } p|_{N,s} + N|u|_{N,s}) ds + \varepsilon^{1-N} \frac{e^{\lambda(N-1)t}}{\lambda} m_{N-1} (\|u\|_{N-1}^2 + 1) \right\}.$$

L'ingrédient fondamental est alors le suivant :

Lemme 2 : Il existe des constantes  $C$  et  $\varepsilon_1$  telles que pour tout  $N \geq 1$ , tout  $t \in [0, T]$  on ait : pour  $\varepsilon \leq \varepsilon_1$

$$|\text{grad } p|_{N,t} \leq C \left\{ |u|_{N,t} + \varepsilon^{1-N} e^{\lambda(N-1)t} m_{N-1} (\|u\|_{N-1}^2 + 1) \right\}.$$

Reportant dans (2.8) et utilisant le lemme de Gronwall on obtient pour  $\varepsilon \leq \varepsilon_2$  une estimation du type

$$(2.9) \quad \|u\|_N \leq \text{Max} \left\{ \|u\|_{N-1} ; H_1 + \frac{C\|u\|_{N-1}^2 + 1}{\lambda} \right\}.$$



Il suffit alors de choisir  $H = \sup \{ \|u\|_1, 2H_1 \}$  et  $\lambda \geq C \frac{(H^2 + 1)}{H_1}$  pour que (2.4) ait lieu .

(2.4) exprime l'analyticité partielle en  $x$  ; l'analyticité en  $t$  s'en déduit en revenant à l'équation.

Il reste donc à étudier le Lemme 2 ; clairement, dans ce lemme,  $t$  est un paramètre qu'on omettra d'écrire dorénavant ; si  $E$  est une param etrix analytique de  $\Delta$  sur un voisinage de  $\bar{\omega}$  on a, plus correctement que (1.3) :

$$(2.10) \quad p = E(F(u)) + q$$

où  $q$  est analytique sur  $\bar{\omega}$ . Le caractère non linéaire de  $F$  est secondaire, ce qui importe ici c'est l'action précise de l'opérateur pseudodifférentiel  $E$  vis-à-vis des semi-normes introduites.

### 3. ACTION PRECISEE DES OPERATEURS PSEUDODIFFERENTIELS ANALYTIQUES

Plus généralement, considérons un opérateur pseudodifférentiel analytique  $A = a(x, D_x)$ , défini par un symbole analytique  $a(x, \xi)$  sur  $\Omega \times \mathbb{R}^n$  où  $\Omega$  désigne maintenant un ouvert qui contient le compact  $\bar{\omega}$ . On peut d'ailleurs ajouter à  $A$  un opérateur à noyau  $R(x, y)$  analytique sur  $\Omega \times \Omega$ .

Pour tenir compte du décalage des dérivées nous changeons quelque peu les notations du paragraphe 2 et nous posons :

$$(3.1) \quad [u]_N = \sup_{\delta \in ]0, \delta_0]} \sup_{|\alpha|=N} \delta^N \| \partial^\alpha u \|_{H^\mu(\omega_\delta)}$$

$$(3.2) \quad ||| u |||_N = \text{Max} \left\{ \|u\|_{H^\mu(\Omega)}, \text{Max}_{0 < p \leq N} \frac{\varepsilon^p}{m^p} [u]_p \right\} .$$

$$(3.3) \quad \|u\|_\varepsilon = \sup_{N \in \mathbb{N}} ||| u |||_N$$

Théorème 3 : Soit  $a(x, \xi)$  un symbole analytique de degré 0 sur  $\Omega \times \mathbb{R}^n$  et soit  $\Omega_0 \subset\subset \Omega$  un ouvert contenant  $\bar{\omega}$ . Il existe  $\varepsilon_0 > 0$  et  $C$  tels que pour tout  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ , tout  $N > 0$  et  $u \in C_0^\infty(\Omega_0)$  on a :

$$[a(x, D_x)u]_N \leq C \|u\|_N m_N \cdot \varepsilon^{-N}.$$

Compte tenu de (2.10) le lemme 2 est en fait une conséquence quasi-immédiate de ce théorème.

Notons  $B_\varepsilon$  l'espace des  $u \in H^l(\Omega)$  analytiques sur  $\omega$  et tels que  $\|u\|_\varepsilon < \infty$  ; notons aussi  $B_\varepsilon^0$  l'espace des  $u \in B_\varepsilon$  à support dans  $\bar{\Omega}_0$ . On déduit directement du théorème 3 le corollaire suivant :

Corollaire 4 : A est un opérateur pseudodifférentiel analytique de degré 0 sur  $\Omega$ , alors il existe  $\varepsilon_0$  et C tels que pour  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ , A opère de  $B_\varepsilon^0$  dans  $B_\varepsilon$  avec une norme majorée par C.

Ce résultat est similaire à ceux qu'ont obtenus Baouendi et Goulaouic lorsque A agit sur une variété compacte sans bord [4] [5].

Donnons maintenant les grandes lignes de la démonstration du théorème 3 ; pour simplifier, supposons que A soit un opérateur de convolution :

$$(3.4) \quad Au = k * u$$

avec  $\hat{k}(\xi) = a(\xi)$  symbole analytique de degré 0.

On sait que k est analytique sur  $\mathbb{R}^n \setminus 0$  et que k vérifie des estimations du type suivant (cf.[6]) :

$$(3.5) \quad \left| \partial_x^\alpha k(x) \right| \leq C_1^{|\alpha|+1} \frac{|\alpha|!}{|x|^{n+|\alpha|}} \text{ pour } 0 < x \leq R$$

avec C indépendant de  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  et x.

Introduisons une suite de fonctions de troncatures  $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  ( $j \geq 0$ ) à support dans  $|x| \leq 1$ , valant 1 pour  $|x| \leq 1/2$  et vérifiant, avec une constante  $C_2$  convenable :

$$(3.6) \quad \left| \partial_x^\gamma \varphi_j(x) \right| \leq (C_2(j+1))^{|\gamma|} \text{ pour } |\gamma| \leq j+1.$$

Fixons  $\delta \in ]0, \delta_0]$  et  $\alpha > 0$  ; il nous faut montrer que :

$$(3.7) \quad \|\partial^\alpha A u\|_{H^\mu(\omega_\delta)} \leq \|u\|_{|\alpha|} m^{|\alpha|} \varepsilon^{-|\alpha|}$$

On pose alors  $N = |\alpha|$  ,  $r = \frac{\delta}{N+1}$  et

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \theta_0(x) &= \varphi_0\left(\frac{x}{r}\right) \\ \theta_j(x) &= \varphi_j\left(\frac{x}{(j+1)r}\right) - \varphi_{j-1}\left(\frac{x}{rj}\right) \quad \text{pour } j = 1, \dots, N-1 \\ \theta_N(x) &= 1 - \varphi_{N-1}\left(\frac{x}{rN}\right) \end{aligned}$$

Enfin, appelons  $A_j$  l'opérateur de convolution par  $k_j = \theta_j k$ .  
Par construction on a  $A = \sum_{j=0}^N A_j$ .

Le symbole de  $A_0$  est  $a * \hat{\theta}_0$  et il est borné dans  $L^\infty$  indépendamment de  $r \leq \delta_0$ . Par suite, on a :

$$(3.9) \quad \|A_0 v\|_{H^\mu(\omega_\delta)} \leq \|v\|_{H^\mu(\omega_{\delta-r})}$$

avec  $C$  indépendant de  $r$ .

Il résulte de (3.5) et (3.6) que l'on a pour  $|\beta| = j \geq 1$

$$|\partial_X^\beta k_j(x)| \leq C_3^{j+1} \frac{j^j}{|x|^{n+j}}$$

et comme  $k_j$  est à support dans  $|x| \geq \frac{1}{2}jr$  on a :

$$\|\partial_X^\beta k_j\|_{L^1(|x| \leq R)} \leq \frac{C_4^{j+1}}{r^j}$$

On en déduit les majorations suivantes :

$$(3.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|\partial_X^\beta A_j v\|_{H^\mu(\omega_\delta)} \leq \frac{C_5^{j+1}}{r^{j+1}} \|v\|_{H^\mu(\Omega_\delta - (j+1)r)} \quad \text{pour } 1 \leq j \leq N-1 \\ \|\partial^\beta A_N v\|_{H^\mu(\omega_\delta)} \leq \frac{C_5^{N+1}}{r^{N+1}} \|v\|_{H^\mu(\mathbb{R}^n)} \end{array} \right. .$$

Si  $u \in C_0^\infty(\Omega_0)$ , écrivant pour tout  $j, \alpha = \beta_j + \alpha_j$  avec  $|\beta_j| = j$ , on a :

$$\partial^\alpha A u = \sum_{j=0}^N \partial^{\beta_j} A_j (\partial^{\alpha_j} u) .$$

En utilisant (3.9) et (3.10) on arrive facilement (et classiquement) à (3.7) pourvu que  $\varepsilon$  soit assez petit.

#### 4. UN THEOREME DE CAUCHY KOWALEWSKI PSEUDODIFFERENTIEL LOCAL

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - A(t, X, D_X) u = f \\ u|_{t=0} = u_0 \end{array} \right.$$

où  $A(t, X, D_X)$  est un opérateur pseudodifférentiel analytique de degré  $l$  sur  $[-T_0, T_0] \times \Omega$ , et où les données  $u_0$  et  $f$  sont analytiques.

Ce type de problème de Cauchy-Kowalewski a été considéré par Baouendi et Goulaouic [4][5] dans le cas où  $\Omega$  est une variété compacte sans bord, et aussi par Kajitani [13] dans le cas où  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , (avec des conditions d'uniformité à l'infini). Nous voulons considérer ici le problème local pour répondre à une question posée par C. Goulaouic. L'outil essentiel est une variante du Corollaire 4, que nous décrivons maintenant.

Donnons-nous  $\omega \subset\subset \Omega$ , ouvert borné régulier (de classe  $C^1$ ). Pour  $\delta > 0$  assez petit  $\omega_\delta$  désigne toujours l'ensemble des points de  $\omega$  à distance de  $\partial\omega$  supérieure à  $\delta$ . On se donne un paramètre  $p \in [0, 1/2[$ , et pour  $\varepsilon > 0$  on note  $B_\varepsilon$  l'espace des fonctions analytiques  $u$  sur  $\omega$  telles que :

$$(4.2) \quad \|u\|_\varepsilon = \sup_{|\alpha| \geq 0} \sup_{\delta \in ]0, \delta_0]} \frac{(\varepsilon \delta)^{|\alpha|}}{|\alpha|!} \delta^\rho \| \partial^\alpha u \|_{L^2(\omega_\delta)} < +\infty .$$

On montre facilement que  $B_\varepsilon \rightarrow L^1(\omega)$ , de sorte que, en prolongeant par 0,  $B_\varepsilon$  s'identifie à un espace de distributions à support compact dans  $\Omega$ . Ce prolongement permet de faire agir les opérateurs pseudodifférentiels définis sur  $\Omega$ , sur les fonctions de  $B_\varepsilon$ .

Lemme 5 : Si A est o.p.d. analytique sur  $\Omega$  de degré 0, il existe  $\varepsilon_0 > 0$  et C tels que l'opérateur  $u \rightarrow (A\tilde{u})|_\omega$  opère de  $B_\varepsilon$  dans lui-même avec une norme majorée par C, pourvu que  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ .

$\tilde{u}$  désigne le prolongement de  $u$  par 0.

Lorsque  $\rho = 0$  ce lemme est une modification triviale du Théorème 3 : il suffit essentiellement de remplacer dans (3.9) et (3.10) les normes  $H^\mu$  par les normes  $L^2$ . Lorsque  $\rho > 0$ , la seconde estimation de (3.10) est à remplacer par la suivante :

$$\| \partial_X^\beta A_N v \|_{L^2(\omega_\delta)} \leq \frac{C_5^{N+1}}{C^{N+1}} \delta^{-\rho} \sup_{\tau \in ]0, \delta_0]} \{ \tau^\rho \| v \|_{L^2(\omega_\tau)} \} .$$

Les détails seront donnés dans [15].

$\lambda$  et  $T$  étant des paramètres vérifiant  $\lambda T \leq \frac{1}{2} \delta_0$ , on désigne par  $\mathcal{C}_{\lambda, T}$  l'ouvert :

$$(4.3) \quad \mathcal{C}_{\lambda, T} = \{ (t, x) \in \mathbb{C} \times \omega / |t| \leq T \text{ et } x \in \omega_{\lambda|t|} \} .$$

Pour  $\varepsilon > 0$  on désigne par  $E_\varepsilon$  l'espace des fonctions sur  $\mathcal{C}_{\lambda, T}$ , holomorphes en  $t$ , analytiques en  $x$ , et telles que :

$$(4.4) \quad \|u\|_\varepsilon = \sup_\varepsilon \sup_{|t| \leq T} \sup_{\substack{\alpha \\ \lambda|t| < \delta \leq \delta_0}} \frac{\varepsilon^{|\alpha|} (\delta - \lambda|t|)^{|\alpha| + \rho}}{|\alpha|} \| \partial_X^\alpha u(t, \cdot) \|_{L^2(\omega_\delta)} < +\infty .$$

Il revient au même de dire que  $u(t) = u(t, \cdot)$  appartient à un espace  $B_\varepsilon(\omega_\lambda |t|)$  et que :

$$(4.5) \quad \|u\|_\varepsilon = \sup_{|t| \leq T} \|u(t)\|_{B_\varepsilon(\omega_\lambda |t|)} < +\infty .$$

Comme précédemment on fait agir un opérateur  $A(t, X, D_X)$  sur une fonction  $u \in E_\varepsilon$  en prolongeant celle-ci par 0. On suppose maintenant que le paramètre  $\rho \in ]0, 1/2[$ .

Théorème 6 : Soit  $A(t, X, D_X)$  un o.p.d. analytique de degré 1 sur  $[-T_0, T_0] \times \Omega$ . Alors il existe  $\varepsilon_0 > 0$   $T_1 \in ]0, T_0]$  et  $\lambda_0 > 0$  tels que pour  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,  $\lambda \geq \lambda_0 / \varepsilon$  et  $T \leq \text{Inf}\{T_1, \frac{\delta_0}{2\lambda}\}$ , si  $u_0 \in B_\varepsilon(\omega)$  et  $f \in E_\varepsilon(\mathcal{E}_{\lambda, T})$ , il existe  $u \in E_\varepsilon(\mathcal{E}_{\lambda, T})$  tel que

$$(4.6) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - A(t, X, D_X) \tilde{u} = f & \text{sur } \mathcal{E}_{\lambda, T} \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{sur } \omega . \end{cases}$$

Démonstration : On peut écrire :

$$A = \sum_{j=1}^n D_{X_j} A_j + A_0$$

où les  $A_j$  ( $j = 0, \dots, n$ ) sont de degré 0. Il résulte du lemme 5 (à paramètres) que les opérateurs  $\tilde{A}_j : u \rightarrow (A_j \tilde{u})|_{\mathcal{E}_{\lambda, T}}$  sont bornés de  $E_\varepsilon$  dans lui-même avec une norme majorée indépendamment de  $\varepsilon$ ,  $\lambda$  et  $T$  pourvu que  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  et  $T \leq \text{Inf}\{T_1, \frac{\delta_0}{2\lambda}\}$ . Introduisant l'opérateur

$$Hv(t, X) = \int_{[0, t]} v(s, x) ds$$

on met l'équation (4.6) sous la forme :

$$(4.7) \quad u - H\tilde{A}_0 u - \sum_{j=1}^n HD_{X_j} \tilde{A}_j u = u_0 + Hf .$$

Les estimations suivantes résultent directement de la définition (4.4) :

Lemme 7 : Les opérateurs  $H$  et  $H D_{X_j}$  sont bornés de  $E_\epsilon$  dans lui-même, de norme majorée respectivement par  $T$  et  $\frac{1}{\epsilon \lambda \rho}$ .

En choisissant  $T$  assez petit et  $\epsilon \lambda$  assez grand, il est alors clair que  $H \tilde{A}_0 + \sum_{j=1}^n H D_{X_j} \tilde{A}_j$  est borné de  $E_\epsilon$  dans lui-même de norme  $< 1$ , et l'équation (4.7) possède alors une solution dans  $E_\epsilon$ .

Pour terminer cet exposé, signalons que ce Théorème 6 admet des versions non linéaires, que l'on obtient en modifiant les définitions (4.2) et (4.4) des espaces  $B_\epsilon$  et  $E_\epsilon$  de manière à en faire des algèbres. On renvoie pour cela à [15].

#### REFERENCES

- [1] S. Alinhac, G. Métivier : Propagation de l'analyticité des solutions de systèmes hyperboliques non linéaires ; Invent. Math. 75 (1984), 189-204.
- [2] S. Alinhac, G. Métivier : Propagation de l'analyticité des solutions d'équations non linéaires de type principal ; Comm. in Partial Diff. Equ. , à paraître.
- [3] S. Alinhac, G. Métivier : Propagation de l'analyticité locale pour les solutions de l'équation d'Euler ; Arch. Rat. Mec. Analysis, à paraître.
- [4] M.S. Baouendi, C. Goulaouic : Cauchy problems for analytic pseudo-differential operators ; Comm. in Partial Diff. Equ., 1 (1976) 135-189.
- [5] M.S. Baouendi, C. Goulaouic : Sharp estimates for analytic pseudo-differential operators and application to Cauchy problems ; J. Diff. Equ. 48 (1983) 241-268.
- [6] M.S. Baouendi, C. Goulaouic, G. Métivier : Kernels and symbols of analytic pseudodifferential operators ; J. Diff. Equ. 48 (1983) 227-240.

- [7] C. Bardos : Analyticité de la solution de l'équation d'Euler dans un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  ; C.R. Acad. Sc. Paris, t. 283 (1976), 255-258.
- [8] C. Bardos, S. Benachour, M. Zerner : Analyticité des solutions périodiques de l'équation d'Euler en dimension deux ; C.R. Acad. Sc. Paris, t. 282 (1976), 995-998.
- [9] S. Benachour : Analyticité des solutions périodiques de l'équation d'Euler en dimension trois ; C.R. Acad. Sc. Paris, t. 283 (1976), 107-110.
- [10] J.M. Bony : Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires ; Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., 14 (1981), 209-240.
- [11] J.P. Bourguignon, H. Brezis : Remarks on the Euler Equation ; J. Functional Analysis 15 (1974), 341-363.
- [12] D.G. Ebin, J. Marsden : Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid ; Ann. of Math. 92 (1970), 102-163.
- [13] K. Kajitani : Nonlinear Cauchy Kowalewski theorem for pseudodifferential operators ; Comm. in Partial Diff Equ. 8 (1984), 1487-1520.
- [14] T. Kato : Nonstationary flows of viscous and ideal fluids in  $\mathbb{R}^3$  ; J. Functional Analysis 9 (1972), 296-305.
- [15] G. Métivier : Un théorème de Cauchy Kowalewski pseudodifférentiel local ; preprint.
- [16] R. Temam : On the Euler equations of incompressible perfect fluids ; J. Functional Analysis 20 (1975), 32-43.

-----