

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

V. M. PETKOV

La distribution des pôles de la matrice de diffusion

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1982-1983), exp. n° 7, p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1982-1983__A7_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1982-1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z 1 9 8 2 - 1 9 8 3

LA DISTRIBUTION DES POLES DE
LA MATRICE DE DIFFUSION.

par V. M. PETKOV

1. INTRODUCTION

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine ouvert et soit $n \geq 3$, n impair. On suppose que le complémentaire de Ω : $K = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ est borné et que la frontière de K , notée ∂K , est C^∞ et compacte. Dans notre exposé, nous traiterons le problème de Dirichlet

$$(1) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u = 0, & \text{dans } \mathbb{R} \times \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times \partial K. \\ u|_{t=0} = f_0 & u_t|_{t=0} = f_1, \end{cases}$$

mais les résultats restent valables pour le problème de Neumann (cf. [9]).

L'opérateur de diffusion S , associé à (1), est un opérateur unitaire dans $L^2(\mathbb{R} \times S^{n-1})$. De plus, on peut considérer S comme une fonction $S(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ à valeurs opérateurs bornés de $L^2(S^{n-1})$ dans $L^2(S^{n-1})$. Cette fonction admet un prolongement méromorphe dans \mathbb{C} ayant ses pôles λ_j dans $\text{Im } \lambda > 0$ (cf. [6]). Dans chaque domaine borné nous n'avons qu'un nombre fini de pôles. La distribution des pôles dépend de la géométrie de K . Lax et Phillips [7] ont prouvé que si K est non captif (cf. [10] pour la définition) il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$(2) \quad \text{Im } \lambda_j \geq \varepsilon_0 \text{Log } |\lambda_j|, \quad \forall \lambda_j.$$

Récemment Bardos, Guillot et Ralston [1] et Ikawa [3], [4] ont examiné le cas plus simple où des rayons captifs apparaissent. C'est le cas avec $K = K_1 \cup K_2$, où K_1 et K_2 sont strictement convexes et $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Ils ont montré que pour chaque $\varepsilon > 0$ il y a des pôles λ_j tels que

$$(3) \quad 0 < \text{Im } \lambda_j < \varepsilon \text{Log } |\lambda_j|.$$

D'autre part les résultats de Ikawa [3] [4] sont beaucoup plus précis car il prouve qu'il y a un nombre infini de pôles situés dans la région $C_0 \leq \text{Im } \lambda \leq C_0 + \varepsilon$, où $C_0 > 0$ est convenablement choisi.

Le but de cet exposé est de discuter l'existence de pôles qui satisfont à (3) pour une classe d'obstacles captifs.

2. LA DISTRIBUTION $\sigma(t)$

Soit L l'extension auto-adjointe du laplacien dans un domaine borné $G \subset \mathbb{R}^n$, avec la condition de Dirichlet sur ∂G . Le spectre de L est formé par une suite $0 < \nu_1 \leq \dots \leq \nu_m \leq \dots, \nu_m \nearrow \infty$, de valeurs propres et on sait que

$$\nu(t) = \sum_j e^{i\nu_j t} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

L'étude de l'asymptotique de $N(\lambda) = \#\{\nu_j; \nu_j \leq \lambda\}$ repose sur l'analyse des singularités de $\nu(t)$. Afin d'obtenir le terme principal de $N(\lambda)$ modulo un reste du type $O(\lambda^{n-1})$ il suffit d'examiner la singularité de $\nu(t)$ en $t = 0$ (cf. [5]).

Dans le cas où Ω est un domaine non borné il est naturel de donner un sens à l'expression $\sum_j e^{i\lambda_j t}$, où la sommation est prise sur tous les pôles. Soit $-\Delta$ l'extension auto-adjointe du laplacien dans $L^2(\Omega)$ avec la condition de Dirichlet sur $\partial\Omega$. Soit $E(t, x, y)$ le noyau de l'opérateur $\cos \sqrt{-\Delta}t$. Récemment Melrose [9] a démontré le :

Théorème 1 : Pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ nous avons

$$(\varphi(t), E(t, x, y)) \in C^\infty(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}) \quad \text{et}$$

$$(4) \quad 2 \int_{\Omega} \varphi(t) E(t, x, x) dx = \sum_j \hat{\varphi}(-\lambda_j),$$

où $\hat{\varphi}(\lambda)$ désigne la transformation de Fourier-Laplace de $\varphi(t)$.

Remarque 1 : Si $\text{supp } \varphi \subset (2\rho, \infty)$, où $K \subset \{x; |x| \leq \rho\}$ la formule (4) a été obtenue par Bardos, Guillot et Ralston [1].

Il découle de (4) que $\sigma(t) = \sum_j e^{i\lambda_j t}$ est une distribution dans $\mathcal{D}'(0, \infty)$. De plus on peut obtenir une liaison entre les singularités de $\sigma(t)$ et les périodes des bicaractéristiques généralisées, introduites dans [8]. Plus précisément on a la

Proposition 2 ([1] , [10]) : Le support singulier de $\sigma(t)$ est inclus dans l'union des périodes des bicaractéristiques généralisées périodiques de l'opérateur $\partial_t^2 - \Delta$.

L'étude des singularités de $\sigma(t)$ pour $t > 0$ est très difficile surtout quand des bicaractéristiques tangentes à $T^*(\partial K)$ et périodiques apparaissent.

$\sigma(t)$ n'est une distribution que sur $(0, \infty)$ et même s'il existe un prolongement de $\sigma(t)$ sur $[0, \infty)$ dans un sens convenable il semble très difficile d'entirer des renseignements sur le comportement de σ au voisinage de 0. D'autre part, si K est non captif, pour $|t|$ assez grand, $\sigma(t)$ coïncide avec une fonction de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (cf. [10] pour la démonstration). On a un résultat analogue sous l'hypothèse que (2) est satisfaite.

Proposition 3 : Supposons qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel qu'on a (2). Alors pour chaque $m \in \mathbb{N}$, il existe $T_m > 0$, $\delta > 0$ tels que $\sigma(t) \in C^m$ pour $t \geq T_m$ et

$$(5) \quad \sum_{k=0}^m \left| \frac{\partial^k \sigma(t)}{\partial t^k} \right| \leq C_m e^{-\delta t}, \quad t \geq T_m.$$

Démonstration : Soit

$$N(\mu) = \# \{ \lambda_j ; \mu \leq \operatorname{Im} \lambda_j < \mu + 1 \}.$$

Alors la convergence de la série

$$\sum_j \frac{e^{-2\rho \operatorname{Im} \lambda_j}}{|\lambda_j|^{n+2}},$$

démontrée dans [1], implique l'estimation

$$(6) \quad N(\mu) \leq C \exp\left(2\rho + \frac{n+2}{\varepsilon_0}\right)\mu, \quad \forall \mu \in \mathbb{N}$$

On peut ainsi obtenir (6) avec une autre constante à la place de $(2\rho + \frac{n+2}{\varepsilon_0})$ en profitant de l'estimation :

$$(7) \quad \# \{ \lambda_j ; |\lambda_j| \leq m \} \leq C m^M, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Ce résultat pour le problème de Dirichlet est annoncé dans [9].

Etant donné $m \in \mathbf{N}$, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_j e^{-\operatorname{Im} \lambda_j t} |\lambda_j|^m &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k \leq \operatorname{Im} \lambda_j < k+1} e^{-\operatorname{Im} \lambda_j t} |\lambda_j|^m \\ &\leq C \sum_{k=0}^{\infty} e^{(2\rho + \frac{n+2}{\varepsilon_0})k} e^{-kt} e^{\frac{(k+1)m}{\varepsilon_0}} \end{aligned}$$

et pour $t > 2\rho + \frac{n+2+m}{\varepsilon_0}$ nous obtenons la convergence de $\sum_j e^{i\lambda_j t} \lambda_j^m$. L'estimation (5) en découle facilement et cela prouve la proposition 3.

3. LA DISTRIBUTION DES POLES

En appliquant la proposition 3 on peut trouver une contradiction avec (2) en construisant une suite $t_j \uparrow \infty$ de singularités de $\sigma(t)$. Pour cela nous allons utiliser les rayons périodiques et réfléchissants (cf. [2] pour la définition précise d'un rayon réfléchissant).

Définition 1 : On dit qu'un rayon périodique et réfléchissant γ , ayant une période primitive T , est isolé si les propriétés ci-dessous sont satisfaites :

(i) il existe une suite $n_j \uparrow \infty$, $n_j \in \mathbf{N}$, telle que $n_j T$ n'est pas période des bicaractéristiques périodiques généralisées différentes de γ .

(ii) si P désigne l'application de Poincaré associée à γ (cf. [2]), l'application P^{n_j} n'a pas de valeurs propres égales à 1.

Maintenant si γ est un rayon réfléchissant et isolé on peut appliquer les résultats de Melrose et Guillemin [2] et on obtient que $\sigma(t)$ près de $n_j T$ coïncide mod L_{loc}^1 avec

$$(8) \quad \frac{T(-1)^{n_j m}}{\pi} \operatorname{Re} \{ i^{\alpha_j} |\det(P^{n_j} - I)|^{-1/2} (t - n_j T + i0)^{-1} \}.$$

Ici α_j est l'indice de Maslov et m est le nombre de réflexions de γ . Par conséquent on en déduit que $n_j T \in \operatorname{sing} \operatorname{supp} \sigma(t)$. Cette observation et la proposition 3 nous amènent au

Théorème 4 : Supposons qu'il existe au moins un rayon réfléchissant périodique et isolé. Alors pour $\forall \varepsilon > 0$ il y a des pôles λ_j tels que

$$(9) \quad 0 < \text{Im } \lambda_j < \varepsilon \text{Log } |\lambda_j|.$$

Comme exemple où le théorème 4 s'applique, nous considérons le cas de M obstacles strictement convexes et disjoints.

Théorème 5 : Supposons que $K = \bigcup_{j=1}^M K_j$, où $K_i \cap K_j = \emptyset$, $i \neq j$ et chaque K_j est strictement convexe. Soit $T_0 = 2 \min_{\substack{1 \leq i, j \leq M \\ i \neq j}} \text{dist}(K_i, K_j) > 0$. Considérons l'ensemble

Q des périodes primitives T des bicaractéristiques généralisées et périodiques pour lesquelles T/T_0 est rationnel. Supposons que Q ne contient qu'un nombre fini de périodes primitives. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il y a des pôles λ_j tels que (9) est satisfaite.

Démonstration : Soit $T_k \in Q$, $T_k \neq T_0$, $k = 1, \dots, m$. Il est clair que $T_0 < T_k$, $k = 1, \dots, m$, donc

$$T_k = \frac{p_k}{q} T_0, \quad p_k \in \mathbf{N}, \quad p_k > q, \quad k = 1, \dots, m.$$

Considérons les nombres

$$j \prod_k p_k + 1, \dots, j \prod_k p_k + q.$$

Il existe $n_j \in \mathbf{N}$ tel que

$$j \prod_k p_k + 1 \leq n_j q \leq j \prod_k p_k + q, \quad \forall j \in \mathbf{N}.$$

On voit immédiatement que la suite $n_j T_0$ satisfait à (i). Le nombre T_0 est associé aux rayons captifs réalisés comme la distance entre deux ou plusieurs obstacles. D'après [1] le spectre de l'application de Poincaré correspondant aux rayons de ce type est contenu dans $(0, 1) \cup (1, \infty)$. Alors la formule (8) donne

$$T_0 \sum_{k=1}^{\ell} |\det(p_k^{n_j} - I)|^{-1/2} \delta(t - n_j T_0) + L_{loc}^1,$$

et par conséquent $n_j T_0 \in \text{sing supp } \sigma(t)$. Cela prouve le théorème 5.

Remarque 2 : Il semble que les restrictions géométriques sur les nombres des périodes primitives $T \in \mathbb{Q}$ sont génériquement satisfaites.

Remarque 3 : Les raisonnements utilisés ci-dessus s'appliquent aussi dans le cas où K est un obstacle non-convexe. Il faut supposer que la plus petite période primitive T_0 correspond juste à un rayon réfléchissant γ et que le spectre de l'application de Poincaré, associée à γ , ne contient pas 1 ni les racines $\sqrt[p]{T}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

4. APPLICATION DE POINCARÉ

L'information sur le spectre de l'application de Poincaré, associée à un rayon γ ayant points de réflexions P_i , $i = 1, \dots, m$ joue un rôle essentiel dans l'application des résultats dans [2]. Récemment P. Vogel [12] a trouvé la forme de la matrice de P dans une base convenable, adaptée au rayon γ . Plus précisément il a montré que cette matrice possède la représentation

$$P = \prod_{i=1}^m \begin{pmatrix} I & O \\ \lambda_i I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_i & \tilde{\psi}_i \sigma_i \\ O & \sigma_i \end{pmatrix},$$

où $\lambda_i = \text{dist}(P_i, P_{i+1})$, σ_i sont des matrices qui correspondent aux symétries par rapport aux plans tangents en P_i et $\tilde{\psi}_i$ sont des matrices symétriques qui dépendent de l'application de Gauss en P_i . De plus $\tilde{\psi}_i, \sigma_i, I$ sont des $(n-1) \times (n-1)$ matrices.

En utilisant l'égalité

$$\begin{pmatrix} I & O \\ \lambda_i I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_i & \tilde{\psi}_i \sigma_i \\ O & \sigma_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_i & O \\ O & \sigma_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & O \\ \lambda_i I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \sigma_i^{-1} \tilde{\psi}_i \sigma_i \\ O & I \end{pmatrix}$$

on se ramène à la matrice

$$P = \begin{pmatrix} \prod_{i=1}^m \sigma_i & O \\ O & \prod_{i=1}^m \sigma_i \end{pmatrix} \prod_{i=1}^m \begin{pmatrix} I & \psi_i \\ \lambda_i I & \lambda_i \psi_i + I \end{pmatrix}.$$

où $\psi_i = (\sigma_m \dots \sigma_i)^{-1} \tilde{\psi}_i (\sigma_i \dots \sigma_m)$. Dans le cas où au voisinage de P_i , $i = 1, \dots, m$,

l'obstacle ou les obstacles sont strictement convexes les formes ψ_i , $i = 1, \dots, m$ seront définies positives.

Exemple 1 : Soit $n = 2$ et soit $\psi_i > 0, i = 1, \dots, m$. Alors on voit facilement que $|\text{tr } P| > 2$. On en déduit que P a deux valeurs propres $\alpha, \frac{1}{\alpha}$, où $1 < \alpha < 1$, $\alpha \neq 0$.

Exemple 2 : Soit $m = 2$ et soit $\psi_i, i = 1, 2$, définies positives. Alors on a $\lambda_1 = \lambda_2, \sigma_1 \sigma_2 = I$. On peut montrer que les valeurs propres de P sont réels et différents de ± 1 (cf. [1] pour une autre démonstration).

Supposant que les matrices $\psi_i, i = 1, \dots, m$ sont définies positives au voisinage de $P_i, i = 1, \dots, m$, nous pouvons modifier la courbure de K dans les petits voisinages de P_i sans changer les plans tangents en P_i ni les distances λ_i . Alors on peut espérer changer les courbures en P_i de sorte que les valeurs propres de P soient placées hors du cercle $|z| = 1$.

REFERENCES

- [1] C. Bardos, J. C. Guillot et J. Ralston : La relation de Poisson pour l'équation des ondes dans un ouvert non borné. Application à la théorie de la diffusion, Comm. in Partial Diff. Eq., 7, (1982), p. 905-958.
- [2] V. Guillemin et R. Melrose : The Poisson summation formula for manifolds with boundary. Advances in Math., 32, (1979), p. 204-232.
- [3] M. Ikawa : On the poles of the scattering matrix for two strictly convex obstacles. J. Math. Kyoto Univ. (to appear).
- [4] M. Ikawa : On the distribution of the poles of the scattering matrix for two strictly convex obstacles, preprint.
- [5] V. Ivrii : Second term of the spectral asymptotic expansion of the Laplace-Beltrami operator on manifolds with boundary. Funct. Analiz i Ego Pril., 14, N° 2 (1980), p. 25-34.
- [6] P. Lax and R. Phillips : Scattering theory, Academic Press, 1967.
- [7] P. Lax and R. Phillips : A logarithmic bound on the location of the poles of the scattering matrix, Arch. Rat. Mech. and Anal., 40, (1971), p. 268-280.
- [8] R. Melrose and J. Sjöstrand : Singularities in boundary value problems. Comm. Pure Appl. Math., 31, (1978), p. 593-617 and 35, (1982), p.129-168.

- [9] R. Melrose : Polynomial bound on the number of scattering poles. Preprint.
- [10] V. Petkov and G. Popov : Asymptotic behaviour of the scattering phase for non-trapping obstacles. *Ann. Inst. Fourier*, 32, (1982), (to appear).
- [11] V. Petkov : Note on the distribution of poles of the scattering matrix. *J. Math. Anal. Appl.* (to appear).
- [12] P. Vogel : Communication personnelle.

*
* *
*