Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

S. Alinhac

Unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs du second ordre à symbole réel

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1982-1983), exp. n° 3, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1982-1983____A3_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-MEYER-SCHWARTZ 1982-1983

UNICITE DU PROBLEME DE CAUCHY POUR DES OPERATEURS DU SECOND ORDRE A SYMBOLE REEL .

par S. ALINHAC

Exposé n° III

16 Novembre 1982

Nous étudions ici des cas où la condition de "pseudo-convexité" d'Hörmander sur le symbole principal de l'opérateur n'est pas satisfaite. On donne une condition faible de "pseudo-convexité" et des conditions sur les termes d'ordre un de l'opérateur qui assurent l'unicité. Les deux théorèmes présentés permettent de traiter la plupart des exemples connus (hyperbolique faible, elliptique faible, Schrödinger, etc...).

1. GENERALITES ET RAPPELS DE RESULTATS CLASSIQUES

Soit $P(y,D_y)$ $(y \in \mathbb{R}^{n+1})$ un opérateur différentiel du second ordre, à coefficients C^∞ dans un voisinage V d'un point $y_o \in \mathbb{R}^{n+1}$, dont le symbole principal $p(y,\eta)$ est réel.

Soit $\varphi \in C^\infty(V)$ une fonction réelle $\varphi(y_o) = 0$, $d\varphi(y_o) \neq 0$; on note S la "surface initiale" $\{y,\ \varphi(y) = \varphi(y_o) = 0\}$.

On considère ici le problème de l'unicité de Cauchy locale pour P à travers S, c'est-à-dire :
si $u \in C^\infty(V)$, $Pu = 0$ et $\operatorname{Supp} u \subset \{\varphi \geqslant 0\}$ a-t-on $u = 0$ près de y_o ?

Dans toute la suite, on supposera S non caractéristique pour P.

a) Rappelons, dans ce cas particulier, le résultat fondamental d'Hörmander (théorème 8.9.1 de [7]) ; il s'exprime en termes de courbes caractéristiques réelles de P.

Soit (y,η) $(y \in S, \eta \neq 0)$ un zéro réel de p : la courbe intégrale de $H_p = p'_\eta \dfrac{\partial}{\partial y} - p'_y \dfrac{\partial}{\partial \eta}$ issue de (y,η) est tangente à la surface S en (y,η) si $d\varphi(H_p) = \{p,\varphi\} = 0$.

La condition de "pseudo-convexité" de S par rapport à P s'énonce ainsi :

(ψ) pour tout (y,η) $(y \in S,\ \eta \neq 0)$ tel que $p(y,\eta) = 0$ et $\{p,\varphi\}(y,\eta) = 0$, on a $\{p,\{p,\varphi\}\} = H_p^2\varphi < 0$.

Cette condition implique l'unicité de Cauchy pour P ; elle est bien entendu, unilatérale. Elle signifie, géométriquement, que toutes les caractéristiques de P tangentes à S sont "tournées" vers $\{\varphi \leqslant 0\}$.

b) Discutons la nécessité de la condition (ψ) d'Hörmander.

D'après un résultat d'Alinhac [1] , si, pour une "vraie" courbe caractéristique tangente de P (c'est-à-dire lorsque $p'_\eta\ (y_o,\eta_o) \neq 0$), on a $H_p^2\ \varphi > 0$, il existe une perturbation de P (par une fonction C^∞) qui ne possède pas l'unicité de Cauchy à travers S.

On supposera donc que là où $p = \{p,\varphi\} = 0$, on a soit $p'_\eta = 0$, soit $H_p^2\ \varphi \leqslant 0$.

Un exemple d'un cas où $p'_\eta = 0$, $H_p^2\varphi > 0$, et P possède l'unicité de Cauchy est donné par l'opérateur de Tricomi

$$P = D_t^2 - t\ D_x^2 \qquad (n = 1\ ,\ \ y = (x,t)\ ,\ \eta = (\xi,\tau)\ ,\ \ \varphi \equiv t).$$

Ce cas, et des cas généraux du même type, fera l'objet du théorème 2 qui sera exposé au paragraphe 3.

c) Nous nous limitons dans la suite de la discussion (§§1 et 2) au cas où $H_p^2\ \varphi \leqslant 0$ .Remarquons que, d'après un résultat d'Alinhac-Baouendi [2] généralisé par Bahouri [4] si il y a "suffisamment" de vraies courbes caractéristiques tangentes de P pour lesquelles $H_p^2\varphi = 0$, une perturbation de P n'a pas l'unicité de Cauchy. Par exemple, une perturbation de $P = D_t^2 - D_{x_1}^2 - D_{x_2}^2$ ne possède pas d'unicité par rapport à $S = \{x_1 = 0\}$; les courbes caractéristiques sont ici les droites $(x_1 = 0,\ t + x_2 = Cte)$.

Ce phénomène nous conduira à faire l'hypothèse que les points de l'ensemble

$$\Lambda = \{(y,\eta),\ \ \eta \neq 0,\ \ p = \{p,\varphi\} = \ \{p,\{p,\varphi\}\} = 0\}$$

sont des points critiques de p ($dp = 0$ sur Λ).

2. TROIS EXEMPLES ET UN THEOREME

Mentionnons ici trois exemples qui permettront d'illustrer le théorème 1 et d'en faire comprendre les hypothèses. Ces exemples sont écrits en coordonnées $y = (x,t)$ avec $\varphi \equiv t$, $y_o = 0$.

Exemple 1 : $P = D_t^2 + p_1(t,x,D_x)$, où p_1 est réel et homogène d'ordre 1. C'est un cas particulier des opérateurs $P = D_t^2 + p_1(t,x,D_x) + ip_2(t,x,D_x)$ étudiés par Alinhac et Zuily [3].

Si $p_1(0,0,\xi) \not\equiv 0$, une condition nécessaire d'unicité de Cauchy pour P (à perturbation d'ordre zéro près) est

$$p_1(0,0,\xi) = 0 \Rightarrow (p_1)'_t\ (0,0,\xi) = 0$$

Une condition suffisante est $ap_1 + (p_1)'_t \equiv 0$ (pour une certaine a réelle régulière).

Il est expliqué dans Alinhac [1] comment ces conditions peuvent être interprétées comme des conditions de "pseudo convexité" faible analogues à la condition $H_p^2 \varphi \leqslant 0$ discutée au § 1, c). La différence est qu'il faut considérer ici, à la place du symbole principal, le symbole total $\tilde{p} = \tau^2 + p_1$ de P, qui est en fait le symbole principal quasi-homogène de P, lorsque l'on donne à τ le poids 1 et à ξ le poids 2. L'hamiltonien $H_{\tilde{p}}$ est alors pris au sens quasi-homogène, c'est-à-dire

$$H_{\tilde{p}} = \tilde{p}'_\tau \frac{\partial}{\partial t} - \tilde{p}'_t \frac{\partial}{\partial \tau} \qquad \text{(voir R. Lascar [11]).}$$

Nous dirons pour abréger, et de façon un peu vague, que l'on a là une condition de "pseudo-convexité" sur le symbole total de l'opérateur.

Exemple 2 : $P = D_t^2 + Q(t,x,D_{x'}) + c\, D_{x_n}$, où $x = (x',x_n)$.
Q est un opérateur différentiel du second ordre de symbole principal q, et c est réelle non nulle. C'est l'expression en coordonnées locales des opérateurs "de type Schrödinger" considérés par R. Lascar et Zuily [10] : ils montrent que sous la condition

$$(\tilde{\psi}) \qquad (q'_t - \frac{c'_t}{c} q)(0,0,\xi') \geqslant \text{Cte } |\xi'|^2 ,$$

l'opérateur P possède l'unicité de Cauchy.

Cette condition est à la fois une condition de "pseudo convexité" faible sur P et une condition de "pseudo-convexité" sur le symbole total de P. En effet, lorsque q = 0, elle implique $q'_t = -\frac{1}{2}\{p, \{p, \varphi\}\} \geqslant 0$. D'autre part, comme pour l'exemple 1, si l'on donne à τ et ξ' le poids 1, et à ξ_n le poids 2, le symbole $\tilde{p} = \tau^2 + q + c\,\xi_n$ est le symbole principal quasi-homogène de P, et $(\tilde{\psi})$ n'est autre que la condition $H_{\tilde{p}}^2 \varphi < 0$.

Remarquons que dans ce cas $\Lambda = \{\xi' = 0 \ , \ \tau = 0\}$.

Exemple 3 : P est faiblement elliptique, c'est-à-dire $p \geqslant 0$. Ce cas est considéré dans un récent travail de Nirenberg [12] , qui fait les hypothèses

i) $-\frac{1}{2}\{p,\{p,\varphi\}\} + \text{Cte}\ p \geqslant 0$ (globalement en (y,η))

ii) $(p_1^s)^2 \leqslant \text{Cte}\ p$. ($p_1^s$ est le symbole sous-principal de P).

La condition ii) réduit pratiquement à rien le rôle joué par les termes d'ordre inférieur. La condition i) en revanche fournit une condition faible de "pseudo-convexité" dont nous nous sommes inspirés pour (3) dans le théorème 1.

Notons qu'une telle condition n'est pas, en général, stable par les procédures habituelles de "convexification" ou d'"éclatement" (cf. [3]) qui permettent de se ramener au cas où la fonction u considéré est à "support compact en x" ($y = (x,t)$, $\varphi \equiv t$ comme dans les exemples).

C'est pourquoi dans les théorèmes 1 et 2 nous nous plaçons d'emblée dans ce cas, afin d'écrire les conditions les plus fines. Nous pouvons énoncer maintenant le premier théorème.

Théorème 1 : Soient P et φ comme ci-dessus.
Faisons les hypothèses suivantes :
(1) si $p = \{p,\varphi\} = 0$, alors $\{p,\{p,\varphi\}\} \leqslant 0$ ("pseudo-convexité" faible)
(2) l'ensemble Λ des points de $T^*V \setminus 0$ où $p = \{p,\varphi\} = \{p,\{p,\varphi\}\} = 0$ est une sous-variété.
(3) Il existe $C \in \mathbb{R}$ et $a \in C^\infty(V)$, réelle, telles que

$$e = -\frac{1}{2}\{p,\{p,\varphi\}\} + ap + C\{p,\varphi\}^2 \geqslant 0$$

au voisinage de Λ , e étant transversalement elliptique à Λ (c'est-à-dire $e \geqslant \text{Cte}\ d^2$, où d est la distance à Λ).
(4) $dp = 0$ sur Λ
(5) $p_1^s|_\Lambda \in \mathbb{R}$
(6) on se trouve dans l'un des trois cas suivants :

i) $H_{\{p,\varphi\}}$ est transverse à Λ .

ii) $H_{\{p,\varphi\}}$ est tangent à Λ , la 2-forme symplectique σ est de rang constant sur Λ , et pour un $\varepsilon > 0$, on a

$$(1-\varepsilon)T^{+}(e) - \frac{1}{2}\{p_1^s,\{p,\varphi\}\} + ap_1^s \geqslant 0 \qquad \text{sur } \Lambda$$

(où $T^{+}(e)$ désigne la tr^{+} de e restreint à $(\{p,\varphi\} = 0) \cap (\varphi = \varphi(y))$, pour la structure symplectique induite par σ).

iii) $p_1^s\big|_{\Lambda} = 0$.

Il existe alors un voisinage ouvert $W \subset V$ de y_o tel que , si $u \in C^{\infty}(V)$, $Pu = 0$, $\mathrm{Supp}\, u \subset \{\varphi \geqslant 0\}$ et $\mathrm{supp}\, u \cap S \subset\subset W$, alors $u = 0$ près de y_o ■

Les hypothèses (1), (2), (3), (4) ont été discutées au § 1. L'hypothèse (5) a pour but d'éliminer d'éventuelles conditions de commutation entre des parties réelles et imaginaires du symbole total de P, qui sont encore assez mal comprises (voir le récent travail de Dehman [5]).

On observe que dans les exemples 1 et 2, la variété Λ est involutive, et l'on se trouve dans le cas (6) ii) du théorème 1, avec $T^{+}(e) = 0$: c'est la combinaison de (3) et de (6) ii) qui fournit ce qu'on a appelé alors la condition de "pseudo convexité" sur le symbole total de P. Dans des cas plus généraux où $T^{+}(e) > 0$, la condition ne peut plus s'interpréter comme une condition de "pseudo-convexité". Voici un exemple.

<u>Exemple 4</u> : $P = D_t^2 + (D_{x_1}^2 + x_1^2 D_{x_2}^2) - 2e^{-t} D_{x_1}^2 + c\, D_{x_2}$, c réel, on a

$\Lambda = \{\tau = \xi_1 = x_1 = 0\}$, et $e = 4\, C\, \tau^2 + \xi_1^2(2(ta)e^{t} + a) + a x_1^2\, \xi_2^2$.

Si $C > 0$ et $0 < a < 2$, (3) est satisfaite, et $T^{+}(e) = |\xi_2|\, (a(2-a))^{1/2}$.

La condition (6) ii) sera satisfaite si

$$|c_t + ac|^2 \leqslant a(2-a),$$

c'est-à-dire :

$$cc_t < 1, \quad c_t^2 - 2cc_t + 1 > 0 \quad \text{et} \quad c^2 + cc_t + 1 > 0 .$$

En particulier, si $c_t \equiv 0$, le théorème 1 s'applique à P.

Citons enfin un exemple du cas 6) i).

Exemple 5 : $P = D_t^2 + t^3 D_x^2$, $\Lambda = \{\tau = t = 0\}$.

3. LE THEOREME DANS LE CAS "SINGULIER"

Dans le théorème 1, la surface S ne joue pas de rôle particulier parmi les surfaces voisines $\{\varphi(y) = Cte\}$.

Le théorème 2 au contraire s'applique au cas d'opérateurs qui dégénèrent sur $\{\varphi = 0\}$.

Théorème 2 : Soient P et φ comme ci-dessus.

Faisons les hypothèses suivantes :

I) Il existe une sous-variété Λ_s de $T^*V \setminus 0$, $C \in \mathbb{R}$ et $a \in C^\infty(V)$, réelle, telle que, pour $\varphi \geqslant 0$,

$$e_s = -\frac{1}{2}\varphi \{p,\{p, \varphi\}\} + ap + C\{p,\varphi\}^2 \geqslant \varphi^2 b ,$$

où b est un symbole réel du second ordre avec les propriétés :

i) $b \geqslant 0$ près de S

ii) b est elliptique sur $(\varphi = p = \{p,\varphi\} = 0) \setminus \Lambda_s$.

iii) b est transversalement elliptique à Λ_s.

2) $\dfrac{a}{\{\{p,\varphi\},\varphi\}} < 1$ sur S.

3) $p = dp = 0$ sur Λ_s.

4) $p_1^s = 0$ sur Λ_s .

Il existe alors un voisinage ouvert $W \dot{\subset} V$ de y_0 tel que si $u \in C^\infty(V)$, $Pu = 0$, $\operatorname{supp} u \subset \{\varphi \geqslant 0\}$ et $\operatorname{Supp} u \cap S \subset\subset W$, alors $u = 0$ près de y_0 .

Exemple 6 : $P = D_t^2 \pm t^m D_x^2$, $m = 1$ ou 2 .

Le théorème 2 s'applique avec $\Lambda_s = \emptyset$ (c'est-à-dire sans condition sur les termes d'ordre inférieur), en choisissant a = 0 ou a = - 3 (selon le signe + ou -), et b = Cte ($\xi^2 + \tau^2$).

<u>Exemple 7</u> : $P = D_t^2 - D_x^2 \pm t\, D_y^2 + t^2 D_z^2$.

On a ici, comme à l'exemple 6, $\Lambda_s = \emptyset$, et $a = -\frac{1}{2}$ ou $-\frac{3}{2}$ selon le signe + ou -. Cet exemple est dû à Bahouri [4].

4. QUELQUES INDICATIONS SUR LES PREUVES

La méthode utilisée est celle des inégalités de Carleman dans la présentation de [3] , [10] ,[4] etc...

a) En utilisant des propriétés d'invariance des hypothèses, on se ramène au cas où $y = (x,t)$, $\varphi \equiv t$, et P est de la forme

$$P = D_t^2 + Q(t,x,D_x) + \tilde{Q}_1(t,x,D_x) + c\, D_t + d \ ,$$

où c et d sont complexes, $\tilde{Q}_1$ est homogène de degré 1, de symbole $\tilde{q}_1$; Q est un opérateur (auto-adjoint) d'ordre 2, de symbole de Weyl $q(t,x,\xi)$ réel et homogène de degré 2 (sur le calcul de Weyl, voir [8]). On a alors

$$p = \tau^2 + q \ , \quad p_1^s = \tilde{q}_1 + c\tau \quad , \quad \Lambda = \{\tau = 0 \ , \ q = q'_t = 0\} \ .$$

b) Pour le théorème 1, on utilise un "poids" $e^{\gamma(t - \mu t^2/2)}$, ($\mu > 0$ à choisir, γ grand paramètre) tandis que pour le théorème 2 on utilise le "poids" $t^{+\gamma}$.

En notant $e^{\gamma\psi}$ l'un ou l'autre de ces poids, on procède comme suit : on pose $u = e^{\gamma\psi} v$, $P_\gamma = e^{-\gamma\psi} P\, e^{\gamma\psi}$; on écrit $P_\gamma = A + B$, où A est auto-adjoint, B anti-auto-adjoint, et on calcule $\|P_\gamma v\|^2 = \|Av\|^2 + \|Bv\|^2 + 2\mathrm{Re}(Av,Bv)$ à l'aide d'intégrations par parties (la norme et le produit scalaire sont dans L^2).

On aboutit à un expression du type Re(Ku,u), où K est un opérateur du second ordre en D_x, dépendant de t. On fait alors une étude microlocale de K (au voisinage de chaque point (t_o,x_o,ξ_o)), qui utilise deux outils principaux :

1) L'inégalité de Hörmander-Melin telle qu'elle est présentée dans [9].

2) L'inégalité de Feffermann-Phong [6].

L'ensemble de l'argument est dans l'esprit de l'article d'Hörmander sur les opérateurs faiblement hyperboliques [9].

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Alinhac : Non unicité du problème de Cauchy, à paraître dans Annals of Math. 116 (1982).

[2] S. Alinhac, M. S. Baouendi : Construction de solutions nulles et singulières pour des opérateurs de type principal, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1978-79, exposé XXII.

[3] S. Alinhac, C. Zuily : Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs hyperboliques à caractéristiques doubles, Comm. in P. D. E. 6(7) (1981), 799-828.

[4] H. Bahouri : Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs à symbole principal réel, Thèse de 3ème cycle, Université Paris XI (Orsay) (1982) et article à paraître.

[5] B. Dehman : Unicité et non unicité pour une classe d'opérateurs différentiels quasi-homogènes, Thèse de 3ème cycle, Université Paris XI (Orsay) (1982) et article à paraître.

[6] C. Fefferman et D. Phong : On positivity of pseudo-differential operators, Proc. Natl. Acad. SC. U.S.A. 75 (1978), 4673-4674.

[7] L. Hörmander : Linear partial differential operators. Springer Verlag (1963).

[8] L. Hörmander : The Weyl calculus of pseudo-differential operators. Comm. Pure Appl. Math. 32 (1979); 359-443.

[9] L. Hörmander : The Cauchy problem for differential equations with double characteristics. J. d'analyse Math. 32 (1977), 110-196.

[10] R. Lascar et C. Zuily : Unicité et non-unicité du problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs différentiels à caractéristiques doubles. Duke Math. J. 49(1) (1982), 137-162.

[11] R. Lascar : Propagation des singularités des solutions d'équations pseudo-différentielles quasi-homogènes. Ann. Inst. Fourier 27(2) (1977) 79-123.

[12] L. Nirenberg : Uniqueness in the Cauchy problem for a degenerate elliptic second order equation. Preprint.

***