

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

N. SIBONY

Constructions de fonctions holomorphes bornées

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1982-1983), exp. n° 21,
p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1982-1983____A21_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1982-1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>).
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z 1 9 8 2 - 1 9 8 3

CONSTRUCTIONS DE FONCTIONS HOLOMORPHES BORNEES
=====

par N. SIBONY

1. Introduction

Soit L l'opérateur de Hans Lewy dans $\mathbb{R}^3$

$$L = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} - 2i(x + iy) \frac{\partial}{\partial t}.$$

Considérons une fonction $f \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, supposons que $L(f) = 0$ et que $0 < \delta \leq |f| \leq 1$. On se demande si $L(1/f)$ au sens des distributions est nul. Le but de cet exposé est de montrer qu'il n'en est rien. En effet on construit des fonctions f analytiques réelles dans $\mathbb{R}^3 \setminus F$, F fermé de mesure nulle telles que

$$\frac{1}{2} \leq |f| \leq 1 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^3 \setminus F$$

$L(f) = 0$ mais $L(1/f) \neq 0$.

Le problème précédent est bien sûr lié à l'étude des valeurs au bord des fonctions holomorphes bornées dans la boule unité B de $\mathbb{C}^p$, $p \geq 2$.

Désignons par $H^\infty(B)$ l'espace des fonctions holomorphes bornées dans B , muni de la norme uniforme

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in B} |f(z)|.$$

Notons σ la mesure de Lebesgue sur ∂B . Toute fonction $f \in H^\infty(B)$ admet des limites radiales σ presque partout sur ∂B . Notons f^* la fonction de $L^\infty(\partial B)$ ainsi obtenue.

Si $f \in H^\infty(B) \cap \mathcal{C}(\bar{B})$ et pour $p \geq 2$ on a

$$(*) \quad f(B) \subset f(\partial B).$$

Il suffit en effet de remarquer que l'ensemble analytique de codimension 1

$$V_a = \{z ; z \in B, \quad f(z) = f(a)\}$$

où $a \in B$, ne peut être compact.

Il est assez troublant qu'on ne puisse lier l'image essentielle de f^* pour $f \in H^\infty(B)$ et les valeurs de f prises dans B .

Rappelons que pour $h \in L^\infty(\partial B)$ on appelle image essentielle de h l'ensemble R_h des nombres complexes w tels que pour tout $\varepsilon > 0$ on ait

$$\sigma(\{\zeta ; |h(\zeta) - w| < \varepsilon\}) > 0.$$

Une généralisation naturelle de la relation (*) serait pour $f \in H^\infty(B)$

$$f(B) \subset R_{f^*}.$$

Nous allons voir qu'il n'en est rien.

Les problèmes précédents ont été résolus indépendamment par A. B. Aleksandrov [1] et par H. Hakim et N. Sibony [2].

2. Les résultats

THEOREME 1 [Aleksandrov]. Soit φ une fonction positive continue sur ∂B . Il existe une mesure $\nu \geq 0$ singulière par rapport à σ , vérifiant

$$\|\nu\| = \int \varphi \, d\sigma$$

et telle que la transformée de Poisson

$$u = P[\varphi \, d\sigma - d\nu]$$

soit pluriharmonique.

Remarques

1. Si $\varphi = 1$ on trouve qu'il existe une fonction pluriharmonique positive u , dont les limites radiales sur ∂B sont nulles presque partout. Si v est la conjuguée de u la fonction

$$f = e^{-(u+iv)}$$

est une fonction intérieure, c'est-à-dire qu'elle est holomorphe bornée dans U , non constante et vérifie

$$|f^*| = 1 \quad \text{p. p. sur } \partial B.$$

2. Le théorème 1 est d'autant plus intéressant qu'il est facile de vérifier la propriété suivante.

Soit $\varphi \in C^3(\partial B)$, $B \subset \mathbb{C}^p$, $p \geq 2$. Si u est une fonction pluriharmonique dans B telle que

$$\lim_{r \rightarrow 1} u(r\zeta) = \varphi(\zeta)$$

pour ζ appartenant à un G_δ partout dense G , alors φ se prolonge en une fonction pluriharmonique v dans B .

Si G est de mesure totale alors v coïncide avec u dans B .

Cette dernière propriété n'est pas valable si $p = 1$. En effet la fonction

$$u(z) = \operatorname{Im} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^2 \quad z \in \mathbb{C}, \quad |z| < 1$$

a des limites radiales nulles et n'est pas nulle.

3. La technique de démonstration du théorème 1 est assez remarquable.

Aleksandrov montre qu'on peut approcher φ , par des fonctions pluriharmoniques au voisinage de $\bar{B}$, pour la distance de $L^{1/2}(\partial B)$. Il obtient la mesure $\varphi d\sigma - d\nu$ comme limite vague de fonctions pluriharmoniques.

THEOREME [Hakim-Sibony]. Soit φ une fonction continue positive sur ∂B . Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert U de mesure totale sur ∂B et une fonction f bornée, holomorphe au voisinage de $B \cup U$ vérifiant

$$f(0) = 0, \quad ||f| - \varphi| < \varepsilon \quad \text{sur } U.$$

Remarques

1. Si $\varphi = 1$ on trouve par restriction à ∂B une fonction f réelle analytique sur U , ouvert de mesure totale telle que

$$Df = 0, \quad \frac{1}{2} \leq |f| \leq 1$$

mais $D(1/f) \neq 0$. Ici D désigne un opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel.

2. La structure du compact $F = \partial B \setminus U$ est assez compliquée. Il est facile de vérifier que l'enveloppe polynomialement convexe de F contient un ouvert de B . Par exemple si $\varphi = 1$, $\hat{F}$ contient l'ouvert où $|f| < 1 - \epsilon$.

On déduit de résultats de Harvey-Polking [5] que la dimension de Hausdorff d'un tel F est supérieure ou égale à $2p-2$.

3. L'idée de la démonstration est assez simple. Posons

$$u(z) = e^{-n(1-\langle z, \zeta \rangle)}$$

où $\zeta \in \partial B$, $\langle z, \zeta \rangle = \sum_{i=1}^p z_i \bar{\zeta}_i$. On a $u(\zeta) = 1$ et $|u|$ est petit en dehors d'un voisinage de ζ sur ∂B . On construit f comme somme de telles fonctions

$$f(z) = \sum_j \alpha_j e^{-n_j(1-\langle z, \zeta_j \rangle)}$$

pour des $\zeta_j \in \partial B$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $n_j \in \mathbb{N}$ convenablement choisis.

4. L'existence de fonctions $f \in H^\infty(B)$ non constantes telles que $|f^*| = 1$ p. p. sur ∂B , peut être formulée indépendamment de la mesure de Lebesgue σ . En effet la transformée de Gelfand $\hat{f}$ d'une telle fonction f est de module 1 sur la frontière de Shilov de l'algèbre $H^\infty(B)$.

5. E Löw [6], [7] a montré qu'on pouvait construire des fonctions intérieures à partir du théorème 2. Il a également généralisé les constructions précédentes à des domaines strictement pseudoconvexes.

Pour des résultats sur le même thème voir également [1], [2], [3], [4], [7].

Signalons enfin le théorème suivant qui reprend des résultats de [1], [3] et [7].

Désignons par $A(B)$ l'algèbre des fonctions continues sur $\bar{B}$, holomorphe dans B .

THEOREME ([3]). Soit Φ une fonction s.c.i. ≥ 0 intégrable sur ∂B . Soit f une fonction de $A(B)$. On suppose qu'il existe $h \in A(B)$, $h \neq 0$ telle que

$$|f| + |h| \leq \Phi \quad \text{p. p. sur } \partial B.$$

Alors pour toute fonction $g \in A(B)$, $g \neq 0$, il existe une fonction λ holomorphe dans B telle qu'on ait

$$|f + \lambda g|(z) \leq P[\varphi d\sigma](z)$$

pour tout $z \in B$ et

$$|f + \lambda^* g|(z) = \varphi(z) \quad \text{p. p. sur } \partial B.$$

- [1] ALEKSANDROV, A. B. Existence des fonctions internes dans la boule. Mat. Sornik (1982), 147-163 (en russe).
- [2] HAKIM, M. et SIBONY, N. Fonctions holomorphes bornées sur la boule unité de $\mathbb{C}^p$. Invent. Math. 67 (1982), 213-222.
- [3] HAKIM, M. et SIBONY, N. Valeurs au bord des modules de fonctions holomorphes. Math. Ann. (à paraître).
- [4] HAKIM, M. et SIBONY, N. Fonctions holomorphes bornées et limites tangentielles. Duke Math. Journal 50 (1983), 133-141.
- [5] HARVEY, R. et POLKING, J. Removable singularities of solutions of linear partial differential equations. Acta Math. 125 (1970), 39-56.
- [6] LÖW, E. A construction of inner functions on the unit ball in $\mathbb{C}^p$. Invent. Math. 67 (1982), 223-229.
- [7] LÖW, E. Inner functions and boundary values in $H^\infty(\Omega)$ and $A(\Omega)$ in smoothly bounded pseudo-convex domains. Ph. D., Princeton Univ., June 1983.