J. M. Lasry

# Solutions périodiques de systèmes hamiltoniens sur des surfaces d'énergie étoilées

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1982-1983), exp. nº 16, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1982-1983____A16_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z   1 9 8 2 - 1 9 8 3

# SOLUTIONS PERIODIQUES DE SYSTEMES HAMILTONIENS SUR DES SURFACES D'ENERGIE ETOILEES

par J. M. LASRY *

Exposé n° XVI

22 Février 1983

* Les résultats exposés ici sont dûs à H. Berestycki, G. Mancini, B. Ruf et J. M. Lasry.

## 1. INTRODUCTION

L'étude du nombre -voire de la densité- de solutions périodiques pour des systèmes Hamiltoniens est une question très ancienne.

Dans le cas des systèmes Hamiltoniens dans $R^{2n}$ beaucoup de résultats ont été obtenus récemment par des méthodes d'analyse fonctionnelle non linéaire. On trouvera une présentation et une bibliographie très complète de ces travaux dans les exposés de H. BERESTYCKI [2] et N. MOULIS [0] au séminaire BOURBAKI.

Nous allons présenter dans cet exposé le dernier en date des résultats sur l'existence de N solutions pédiodiques à énergie donnée pour un système Hamiltonien à N degrés de liberté.

Soit donc $H \in C^2 ( R^{2N}, R)$ le Hamiltonien.
On considère le système Hamiltonien

(1) $$\dot{q}i = \frac{\partial H}{\partial pi} \quad , \quad \dot{p}i = - \frac{\partial H}{\partial qi} \ , \ i = 1,-,N$$

L'énergie, c'est-à-dire le Hamiltonien, est constante le long des trajectoires :

(2) $$H(p(t), q(t)) = h \qquad \forall t \in R$$

Le problème considéré est donc celui de l'existence de solutions périodiques $(p(.), q(.))$ pour le système (1) pour un niveau d'énergie h donné.

## 2. ENONCE

on notera $\Sigma$ la surface d'énergie (donnée) :

(3) $$\Sigma = H^{-1}(h) = \{(p,q) \in \mathbb{R}^{2N} \mid H(p,q) = h\}$$

Nous supposerons que le niveau d'énergie h est une valeur régulière de H, c'est-à-dire que :

(4) $$u \in \Sigma \Rightarrow H'(u) \neq 0$$

où H' (u) est le gradient de H dans $\mathbb{R}^{2N}$ au point u. La surface est donc de classe $C^2$.

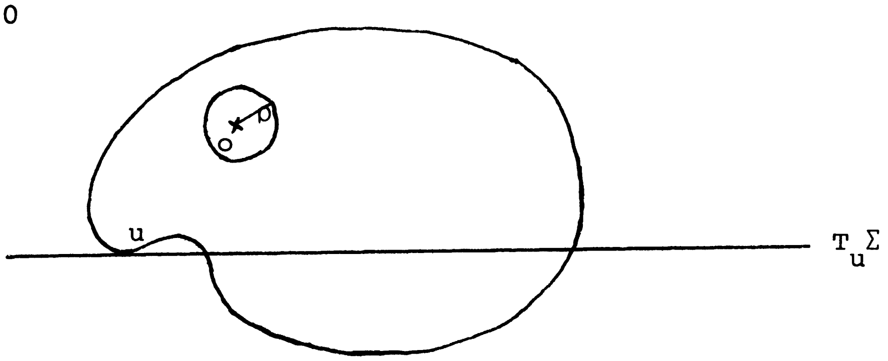
Nous supposons que :

la surface $\Sigma$ est le bord d'une région étoilée $\mathbb{R}$ ,

et plus précisément que $\mathbb{R}$ est $\rho$ étoilée, $\rho > 0$, c'est à dire :

(6) $$T_u \Sigma \cap B_\rho = \emptyset \qquad \forall_u \in \Sigma$$

où $T_u \Sigma$ est l'hyperplan tangent à $\Sigma$ au point $u \in \Sigma$ et où $\mathring{B}_\rho$ est la boule ouverte de rayon $\rho > 0$




On note $\omega_1,\ldots,\omega_N$ des réels >0, et on note $\xi$ l'ellipsoïde de $\mathbb{R}^{2N}$ défini par l'inégalité

(7) $$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \omega_i \, (p_i^2 + q_i^2) \leq 1$$

Enfin on note $\alpha$ et $\beta$ deux réels > 0 tels que :

(8) $$\alpha\xi \subset \mathbb{R} \subset \beta\xi$$

On alors le théorème suivant [3], [4] :

<u>Théorème 1</u> : Il existe des constantes $\delta_1,\ldots,\delta_N$ avec :

(9) $$+\infty = \delta_1 \geq \delta_2 \ldots \geq \delta_N > 0$$

que l'on peut calculer explicitement en fonction de $\omega_1\rho^2/\alpha^2,\ldots,\omega_N\rho^2/\alpha^2$ telles que si l'on a :

(10) $$\beta/\alpha < 1 + \delta_k$$

Il existe au moins k solutions périodiques géométriquement distinctes.

Par solutions géométriquement distinctes on entend des solutions sans points communs : deux solutions périodiques ayant un point commun correspondant à la même orbite géométrique parcourue éventuellement plusieurs fois .

Le calcul explicite de $\delta_1,\ldots,\delta_N$ est donné dans [3], [4]. On vérifie que dans le cas où $\omega_1 = \quad = \omega_N = 2$, et $\rho = \alpha$ on a $1 + \delta_1 = \sqrt{2}$ : ceci prouve que le théorème A étend un résultat de I. EKELAND et moi-même [8] à certaines surfaces étoilées. D'autre part la valeur de $\delta_1$ montre que le théorème A étend le résultat plus ancien de P. RABINOWITZ [11] sur l'existence d'une solution périodique sur toute surface étoilée.

## 3. REMARQUES GENERALES SUR LA DEMONSTRATION

La démonstration du théorème 1 est exposée en détail dans [4], et elle est résumée dans [3]. Nous adopterons donc ici un point de vue d'exposition différent : nous allons nous attacher à quelques points importants de la démonstration succeptibles d'être utils ailleurs.

Toutes les démonstrations d'existence de solutions périodiques de systèmes Hamiltoniens obtenues par l'analyse fonctionnelle non linéaire se décomposent en trois parties :

(i) Un principe variationnel qui met les solutions du système (1)-(2) en bijection avec les points critiques d'une fonctionnelle.

(ii) Un théorème d'existence de point critique.

(iii) Des estimations a priori qui permettent d'appliquer le théorème de point critique du point (ii) à la fonctionnelle du point (i).

A chacun de ces trois niveaux on rencontre deux types de difficultés : d'une part celles qui sont liées à la dimension infinie (choix des espaces fonctionnels, recherche de compacité pour passer à la limite à partir de la dimension finie) ; d'autre part celles liées à la dimension finie : c'est la que la géométrie du problème réapparait (un peu) à travers les estimations apriori ; c'est là aussi que la topologie algébrique intervient (un peu).

## 5. CHANGEMENT DE HAMILTONIEN : Transformation du problème à énergie fixée en un problème à période fixée.

### (a) Notations condensées.

Dans la suite nous adoptons les notations condensées usuelles (en mathématiques si ce n'est en physique). On note J la matrice symplectique

(11) $$J = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} \qquad I = \text{identité dans } \mathbb{R}^N .$$

Le système Hamiltonien (1) devient :

(12) $$\overset{\circ}{z}(t) = J\,H'(z(t))$$

(13) $$\text{avec } z(t) = (p(t), q(t))$$

### (b) Remarque classique.

Supposons qu'un deuxième Hamiltonien $H_1 \in C^2(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$ admet aussi $\Sigma$ comme surface d'énergie.

(14) $$\Sigma = H_1'(h_1) \qquad \text{(voir (3))}$$

(et on suppose aussi que $h_1$ est une valeur régulière de $H_1$, voir (4)). Dans ce cas pour tout $u \in \Sigma$ les deux gradients $H'(u)$ et $H_1'(u)$ sont tous deux orthogonaux à la surface de niveau $\Sigma$, donc colinéaires :

(15) $$H_1'(u) = \lambda(u)H'(u) \quad , \quad \lambda(u) \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Il en résulte que l'on passe d'une solution de

$$\frac{dx}{dt}(t) = JH'(x(t)) \qquad x(t) \in \Sigma \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

à une solution y de

$$\frac{dy}{dt}(\tau) = JH_1'(y(\tau)) \qquad y(\tau) \in \Sigma \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

en posant : $d\tau/dt = 1/\lambda(x(t))$ , $y(\tau) = x(t)$.

c) Choix d'un autre hamiltonien

Dans le problème de la recherche des solutions périodiques de (1) sur $\Sigma$ on peut donc remplacer le Hamiltonien initial par un autre Hamiltonien admettant $\Sigma$ comme surface de niveau par exemple : le carré la jauge de la région étoilée R dont $\Sigma$ est le bord :

(16) $$H_1(u) = \inf \{\lambda^2 \;/\; \lambda > 0,\ u \in \lambda\, R\}$$

la surface $\Sigma$ correspond au niveau 1 pour $H_2$.

Le système (1) est donc remplacé par le système :

(17) $$\bar{z}\,(t) = JH_1'\,(z(t)).$$

avec la condition :

(18) $$H_2\,(z(t)) = 1$$

Or le Hamiltonien $H_1$ est homogène de degré deux, et son gradient $H_1'$ est homogène de degré 1. Il en résulte que si y est une solution de $\overset{\circ}{y} = JH_1'(y)$ on construit facilement une solution z de (17-18) par homothétie en posant $z(t) = y(t)/c$ avec $c = H_1(y(t))^{1/2}$. On peut donc se libérer de la condition (18). On gagne ainsi un degré de liberté que l'on va utiliser pour fixer la période.

On note $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction auxiliaire (bijective, de classe $C^2$). On pose $H_2 = \varphi \circ H_1$ et on considère le système Hamiltonien.

(19) $$\overset{\circ}{y}\,(t) = J\,H_2'\,(y(t))$$

avec la condition

(20) y est périodique de <u>période 1</u>

D'après (19) on a : $\overset{\circ}{y}\,(t) = T\,J\,H_1'\,(y(t))$ avec $T = \varphi(H_2(y(t))$ (= constante). En posant $z(t) = y(t/T)$ on obtient une solution z de (17) qui est T-périodique.

Notons $\mathcal{C} = \varphi' \ ( R_+)$ l'image de $\varphi'$. Ainsi les solutions de (19-20) sont en correspondance avec les solutions périodiques de (17-18) dont la période $T \in \mathcal{C}$, donc avec les solutions de (1-2) dont la période $T \in \mathcal{C}$.

On a remplacé un problème à énergie fixée (1-2) par un probème à période fixée (19-20). En outre on maitrise le choix de $\mathcal{C}$ à travers le choix de $\varphi$. On choisira $\varphi$ de telle sorte que $\mathcal{C}$ contienne les valeurs présupposées des périodes des solutions cherchées sans contenir si possible, des valeurs parasites (en écartant par exemple le double d'une période supposée pour ne pas obtenir la même orbite parcourue deux fois).

L'introduction du Hamiltonien auxiliaire $H_2$ à la place de H apparait comme un procédé qui permet d'introduire dans le principe variationnel un peu de l'information physique (estimation des périodes) que l'on a sur le système (voir un procédé du même type dans [8] par exemple).

## 6. PRINCIPE VARIATIONNEL

Nous donnerons ici une présentation informelle rapide de la méthode de dualité (pour divers exposés "formels" voir par exemple [4], [6], [7], [9] et la bibliographie citée dans [2]).

On sait que les équations de Hamilton (1) sont les équations d'Euler-Lagrange de la fonctionnelle

$$(21) \qquad \int \dot{p}q + H\ (p,q)$$

C'est le principe de Maupertuis dont l'utilisation conduit à des difficultés techniques qui ont longtemps fait obstacle à l'étude des solutions du système (1) par la méthode directe du calcul des variation. La découverte en 1978 par F. CLARKE et I. EKELAND (voir par exemple [6], [7]) d'un principe dit "dual" a débloqué cette situation : lorsque le Hamiltonien H est convexe les équations de Hamilton (1) sont aussi les équations d'Euler-Lagrange de la fonctionnelle "duale" suivante :

$$(22) \qquad \int \dot{p}q + H^*\ (\dot{q}, -\dot{p}\ )$$

où $H^* : \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$ est la duale de Fenchel-Legendre de H définie par :

$$(23) \qquad H^*\ (v) = \mathrm{Sup}\ \{u.v - H(u) \,|\, u \in \mathbb{R}^{2N}\}$$

et qui vérifie (si H et $H^*$ sont $C^1$) :

$$(24) \qquad v = H'(u) \iff u = H^{*\prime}\ (v)$$

Les techniques classiques de l'analyse fonctionnelle sont beaucoup mieux adaptées à l'étude de la fonctionnelle (22) qu'à celle de la fonctionnelle (21) Du moins c'était l'opinion commune lorsque (22) a été inventée : la suite (les résultats obtenus grace à (22)) a confirmé cette opinion générale qui pourait tout de même changér à long terme dans la mesure où (21) à l'avantage d'être toujours définie.

Plusieurs autres "dualisation" de (21) ont été proposées depuis, ainsi que des propositions de cadre général pour déduire "naturellement" (22) de (21) (voir par exemple [9], [5]).

Plusieurs variantes ont été aussi proposées pour supprimer l'hypothèse de convexité sur H nécessaire pour l'écriture de (22). Voici celle que nous utiliserons (qui est inspirée de [9]):

(25) $$\int \dot{p}q - \frac{1}{2}\, k\, (p^2+q^2) + G^* (\dot{q} + kp, -\dot{p} + kq)$$

où k est un réel suffisemment grand pour que la fonction G définie par :

(26) $$G(p,q) = H(p,q) + \frac{1}{2}\, k(p^2 + q^2)$$

soit convexe (l'existence de k est une hypothèse sur H), et où $G^*$ est la duale de G. A l'aide de la relation de Fenchel-Legendre ($v = G'(u) \Longleftrightarrow u = G^{*\prime}(v)$) on vérifie que (1) est bien l'équation d'Euler-Lagrange de (26).

## 7. UN THEOREME DE POINTS CRITIQUES

La fonctionnelle (25) est définie naturellement sur l'espace de Sobolev

(27) $$E = H^1(\mathbb{R}/Z\ ;\ \mathbb{R}^{2N}) = \{u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2N},\ u \text{ est 1-périodique, } u, \dot{u} \in L^2_{loc}\}$$

On peut considérer E comme un espace de Hilbert complexe :

$$E = H^1(\mathbb{R}/Z\ ;\ \mathbb{C}^N) \qquad \mathbb{C}^N \simeq \mathbb{R}^N + J\,\mathbb{R}^N \simeq \mathbb{R}^{2N}$$

Sur cet expace de Hilbert les translations de temps

(28) $$T_\theta : u \to u_\theta \quad \text{avec } u_\theta(t) = u(t + \theta)$$

forment un groupe d'isométries. L'application $\theta \to T_\theta$ est une représentation de $S^1 = R/Z$

(car $T_1 = T_o = Id$ puisque u est 1-périodique).
La fonctionnelle (25) est invariante par les translations de Temps : $f(T_\theta u) = f(u)$.
C'est cette propriété qui traduit l'autonomie du système 1 qui est mise profit dans le théorème de point critique suivant :

Théorème 2 : Soit E un espace de Hilbert complexe de dimension infinie et T une représentation unitaire de $S^1$ dans E dont l'espace de points fixes E° est de dimension finie. Soit $f \in C^1(E\ R)$ une fonctionnelle invariante sous l'action de $S^1$ : $f \circ T_\theta = f$, $\forall\ \theta \in S^1$, satisfaisant la condition de Palais-Smale et telle que $f(0) = 0$
On suppose qu'il existe deux sous espaces invariants de E, noté, V et W, vérifiant :

(29) $\qquad V \subset (E°)^\perp$ , $W \supset E°$

(30) $\qquad f \geq -c < -\infty$ sur V

(31) $\qquad \exists\ \varepsilon > 0$ tel que $f(u) < 0$ si $u \in W$ et $||u|| = \varepsilon$

On suppose que f n'a pas de points critiques sur E°, que la dimension de V et la codimension de W sont finies. Alors la fonction f admet au moins ($\dim_{\mathbb{C}} W - \operatorname{codim}_{\mathbb{C}} V$) orbites de points critiques distinctes. (D'après l'invariance de f on a :

$$f'(u) = 0 \Leftrightarrow f'(T_\theta u) = 0)$$

On trouve ce théorème dans [ 1 ], [ 3 ].

La démonstration comme pour la pluspart des théorèmes de points critiques se fait à l'aide d'une notion d'indice $\gamma$ (A) pour certains sous ensembles $A \subset E$, et d'une méthode de descente-déformation. En fait toute la difficulté est dans la construction de l'indice : pour ce théorème il en faut deux : indice absolu et indice relatif (voir dans [1] et [3] pour deux constructions "duales").

## 8. ESTIMATIONS SUR LA PERIODE

Pour appliquer à la fonctionnelle (25) le théorème 2 il faut notamment des estimations à priori sur la période des solutions de (1) (ces estimations permettent de construire les expace V et W du théorème 2).

Nous ne donnerons ici à titre d'exemple qu'un type d'estimation a priori : la borne inférieure de la période, qui apparait on va le voir comme un cas particulier d'un résultat général très simple à demontrer.

Sans faire complétement le lien avec le système Hamiltonien de départ, indiquons dès à présent que l'hypothèse (6) sur la surface d'énergie $\Sigma$ permet de démontrer que le Hamiltonien $H_1$ (carré de la jauge, introduit en (16)) vérifie l'hypothèse (38) du corollaire ci-dessous.

Rappelons tout d'abord l'inégalité de Poincaré-Wirtinger :

<u>Lemme 1</u> Soit $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ une fonction T-périodique telle que $\dot{x} \in L^2_{loc}$ . Alors on a :

(33) $$\int_0^T x = 0 \Rightarrow ||x|| \leq \frac{T}{2\pi} ||\dot{x}||$$

ou l'on note $||z|| = \int_0^T |z(t)|^2 \, dt$ .

Cette inégalité se démontre rapidement par développement en série de Fourier. On en déduit le :

<u>Lemme 2</u> Soit $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ une fonction T-périodique telle que $\dot{x} \in L^2_{loc}$. Soit $y \in L^2(0,T\ ;\ \mathbb{R}^k)$.

Alors :

(34) $$\int_0^T y = 0 \Rightarrow (x,y) \leq \frac{T}{2\pi} ||x|| \; ||y||$$

avec $(x,y) = \int x(t) \cdot y(t) \, dt$

<u>Démonstration</u> On pose $\underline{x} = x - c$ avec $c = \frac{1}{T} \int_0^T x$

on a : $(x,y) = (\underline{x},y) \leq ||\underline{x}|| \; ||y|| \leq \frac{T}{2\pi} ||\dot{\underline{x}}|| \; ||y||$ d'où (34) puisque $\dot{x} = \dot{\underline{x}}$.

A partir de (33) et (34) on démontre simplement plusieurs minorations de périodes parmi lesquelles les trois estimations suivantes :

Théorème 3 YORKE [12], soit x une solution T-périodique non triviale ($\not\equiv$ constante) de l'équation différentielle ordinaire $\dot{x}(t) = f(x(t))$, où le second membre $\mathbb{R}^h \to \mathbb{R}^h$ est c -lepschitzien. Alors on a (35) $T \geq 2\pi / C$.

Théorème 4 Soit x une solution T -périodique non triviale de l'équation différentiele $\dot{x} = f(x)$. Supposons que le second membre $f : \mathbb{R}^h \to \mathbb{R}^h$ vérifie:

(36) $f(u).Au \geq |f(u)|^2 \;\; \forall u \in \mathbb{R}^h$ où A est une matrice carrée.

Alors on a :

(37) $T \geq 4\pi / ||A - A^*||$

où $A^*$ est transposée de A.

Corollaire 5 Soit $H \in C^2 (\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$ tel que :

(38) $H'(x).x \geq \lambda |H'(x)|^2 \quad Vu \in \mathbb{R}^{2N}$ et soit x une solution T - périodique non triviale de :

(39) $\dot{x} = JH'(x)$

Alors on a :

(40) $T \geq 2\pi \lambda$

Démonstration du théorème 3

On a pour tout $t, s \in \mathbb{R}$

$|\dot{x}(t) - \dot{x}(s)| = | \;\; (x(t)) - \;\; (x(s))| \leq C|x(t) - x(s)|$

On en défuit que $\dot{x}$ est lipschitzienne donc dérivable pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ et que l'on a :

$$|\ddot{x}(t)| \leq C|\dot{x}(t)| \qquad (p.p)$$

En intégrant on obtient :

$||\ddot{x}|| \leq C||\dot{x}||$. Or on a $||\dot{x}|| \leq \frac{T}{2\pi}$ $||\ddot{x}||$ d'après (33)

D'où le théorème car ($\dot{x} \equiv 0$) est équivalent à ($x \equiv$ constante) pour une solution périodique.

Démonstration du théorème 4

Posons $\alpha = \int_0^T \dot{x}(t).Ax(t)dt$. En intégrant par partie on obtient :

$$\alpha = \int_0^T x(t).\, A\dot{x}(t)\, dt$$

d'où

$$\alpha = \frac{1}{2} \int_0^T x(t).\, (A^*-A)\, \dot{x}(t)\, dt$$

Posons $y(t) = \frac{1}{2}(A^*-A)\,\dot{x}(t)$ et appliquons (34).

Il vient :

$$\alpha \leq \frac{T}{2\pi}\, ||A-A^*||\, ||\dot{x}||^2$$

D'autre part en utilisant l'équation $\dot{x} = \;\;(x)$ et l'hypothèse (36) on obtient :

$$\alpha \int_0^T \dot{x}\, .\, Ax = \int_0^T \;\;(x).Ax \;\geq\; \int_0^T |f(x)|^2 = ||\dot{x}||^2$$

d'où le théorème 4

Démonstration du corollaire

On pose $f(x) = JH'(x)$ et $A = \frac{1}{\lambda} J$

On vérifie (36) dans ce cas particulier

$$f(x).\, Ax = JH'(x).x \;\geq\; |H'(x)|^2 = |f(x)|^2$$

On en déduit donc :

$$T \geq 4\pi \,/\, ||\frac{1}{\lambda}\, J - \frac{1}{\lambda}\, J^*|| = 2\pi\lambda$$

puisque

$$||J|| = ||J\;\;|| = 1.$$

## BIBLIOGRAPHIE

[1] V. BENCI, on the critical point theory for indefinite functions in the presence of symetries, Trans. Am. Math. Soc. 274 (1982), 533-572.

[2] H. BERESTYCKI, Solutions périodiques de systèmes hamiltoniens, séminaire Bourbaki, Février 1983, n° 603.

[3] H. BERESTYCKI, J.M. LASRY, G. MANCINI, B. RUF, Sur le nombre de solutions périodiques des équations d'Hamilton sur une surface d'énergie étoilée, C.R. Acad.Sc, Série A, t.296, 10/1/83, p. 15-18.

[4] H. BERESTYCKI, J.M. LASRY, G. MANCINI, B. RUF, Existence of multiple Periodic Orbits on Star-Shaped Hamiltonian Surfaces, cahier du CEREMADE (1983), Université Paris-Dauphine, 75775 Paris.

[5] H. BREZIS, Periodic solutions of non linear vibrating strings and duality principle, Bull. A.M.S. (1983).

[6] F. CLARKE, Periodic solutions to Hamiltonian inclusions, J. Diff. Eq. 40 (1981), 1-6 (voir aussi [30][32] dans la référence [2] ci-dessus).

[7] I. EKELAND, Periodic solutions of hamiltonian equations and a theorem of P. Rabinowitz, J. of Diff. Eq. 34 (1979), 523-534 (voir aussi [38] ,[39] ,[40] dans la référence [2] ci-dessus)

[8] I. EKELAND et J.M. LASRY, on the number of periodic trajectories for a Hamiltonian flow on a convex energy surfac, Ann.Math., 11, (1980), p. 283-319.

[9] I. EKELAND et J.M. LASRY, Problèmes variationnels non convexes en dualité, Note C.R. Acad. Sc., Paris, série A, 291 (1980), 493-496.

[10] N.DESOLNEUX-MOULIS, Orbites périodiques de systèmes hamiltoniens autonomes, séminaire Bourbaki, février 1980, exposé n° 552, Lect. Notes in Math. n° 842, Springer Verlag (1981).

[11] P.H. RABINOWITZ, Periodic Solutions of Hamiltonian systèms, Comm. Pure. Appl. Math., 31, (1978), 157-184.

[12] YORKE J. A. , Periods of periodic solutions and the Lipschitz constant, Proc. A.M.S. 22 (1963), 509-512.