M. Derridj

# Le problème de Cauchy pour $\bar{\partial}$-application

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1982-1983), exp. n$^{o}$ 11, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1982-1983____A11_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z   1 9 8 2 - 1 9 8 3

# LE PROBLEME DE CAUCHY POUR $\bar{\partial}$-APPLICATION

par M. DERRIDJ

Exposé n° XI

22 Février 1983

## INTRODUCTION

Nous nous intéressons ici à la résolution d'un problème de Cauchy pour $\bar\partial$ , dans des situations de dégénérescence de la forme de Levi. Il est maintenant classique, qu'on peut déduire d'une telle résolution des résultats de prolongement de formes $\bar\partial_b$-fermées, en particulier de fonction C.R. (voir par exemple [1] , [8] ). Dans [4] , nous avons résolu un problème pour $\bar\partial$ à support, avec un second membre multiple d'une certaine fonction holomorphe, fonction qui rend compte de la façon dont la forme de Levi dégénère au bord. Pour être plus précis, nous avons résolu, sous certaines hypothèses (voir [4]) le problème à support suivant :

Soit S une hypersurface, au voisinage de $0 \in S$, donnée par $\{\varphi = c\}$, où $\varphi$ est une certaine fonction, disons positive et de classe $C^\infty$ dans $\mathbb{C}^n$. Soit U un voisinage de 0 et soit $\lambda$ une fonction holomorphe, $\lambda \not\equiv 0$, dans U. Le problème à support est alors :

$$(1)_q \quad \begin{cases} \bar\partial u = \lambda f \quad \text{dans } V \subset U, \ f \text{ étant une } (0,q+1) \text{ forme } \bar\partial\text{-fermée dans } U, \\ \text{à support dans } \bar U^+ = \bar U \cap \{\varphi \leqslant c\} \ f \in L^2(U). \text{ avec} \\ \operatorname{supp}(u) \subset \bar V^+ = V \cap \{\varphi \leqslant c\}, \ u \in L^2(V) \end{cases}$$

D'un tel résultat, on peut déduire un résultat d'extension de fonctions C.R. sur S, en fonctions holomorphes dans $U^+$, lorsque l'ensemble $Z(\lambda)$ des zéros de $\lambda$ vérifie une hypothèse géométrique liée à S, ce résultat a été obtenu dans un travail en collaboration avec J. E. Fornaess ([5]). En fait, pour cela, nous montrons un résultat de division, par des méthodes purement d'Analyse Complexe. Ce résultat est le suivant :

<u>Théorème 1</u> ([5]) : Supposons que les composantes irréductibles $\lambda_j$ de $\lambda$ sont telles que $Z(\lambda_j) \cap U^- \neq \emptyset$ . Soit f une fonction continue sur $\bar U^+$, holomorphe dans $U^+$. Supposons qu'il existe une fonction continue g sur S telle que $f|_S = \lambda g$.

Alors il existe une fonction continue f' dans $\bar U^+$ holomorphe dans $U^+$ telle que $f = \lambda f'$ dans $\bar U^+$.

Alors, par des techniques standard, du théorème 1 et de la résolution du problème $(1)_0$ , on peut étendre une fonction C.R. sur S en fonction holomorphe dans $U^+$.

Il y a alors deux remarques à faire : l'une est que l'on a besoin d'un résultat d'Analyse Complexe pure (Théorème 1) pour déduire un résultat d'extension ; l'autre est que cela ne marche que dans le cas des fonctions, n'exploitant donc pas $(1)_q$, pour tout q.

Il est alors naturel de penser à résoudre non seulement un problème $\bar\partial$ à support, mais un problème de Cauchy pour $\bar\partial$ , plus précisément :

$$(2)_q \quad \begin{cases} \bar\partial u = f \quad \text{dans } V \subset U, \ f \text{ étant une } (0,q+1) \text{ forme } \bar\partial\text{-fermée} \\ \text{dans } U, \ \operatorname{supp}(f) \subset \bar U^+, \ f \in C^\infty(U) \\ u|_S = 0 \end{cases}$$

où u a une trace, en un certain sens sur S. D'un tel résultat (résolution de $(2)_q$), on pourra déduire un résultat d'extension pour les formes $\bar\partial_b$-fermées. Remarquons que dans le cas q = 0 (cas où u est une fonction) alors l'hypoellipticité du $\bar\partial$ , assure que l'extension trouvée est bien une extension au sens classique. Dans le cas des formes, voir le sens donné à l'extension dans la suite.

Pour passer de la résolution de $(1)_q$ à celle de $(2)_q$ il y a deux obstacles à franchir : premièrement résoudre non seulement avec $u \in L^2(v)$ et $\operatorname{supp}(u) \subset \bar V^+$, mais avec u ayant une trace sur S ; le deuxième obstacle est de résoudre avec un second membre f qui ne soit pas nécessairement un multiple de $\lambda$ .

Les méthodes employées ici sont purement des méthodes d'équations aux dérivées partielles. Notons de plus que pour q = 0, l'hypothèse faite sur Z(q) dans [5] s'avère inutile.

## 2. QUELQUES NOTATIONS

On supposera que S (ce que l'on peut toujours faire) a pour équation $x_{2n} = F(x_1,\dots,x_{2n-1})$ avec $z_j = x_j + ix_{n+j}$ , $j = 1,\dots,n$ comme coordonnées complexes dans $\mathbb{C}^n$.

Soit $(x'_1,\dots,x'_{2n})$ le nouveau système de coordonnées suivant dans $\mathbb{C}^n$ :

$$x'_{2n} = x_{2n} - F(x_1,\dots,x_{2n-1})$$

$$x'_j = x_j \qquad j = 1,\dots,2n-1$$

Alors S est définie par $x'_{2n} = 0$ .

Notre hypothèse de départ sera :

$$(H_q)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \lambda}{\partial x'_{2n}} \text{ divisible par } \lambda \text{ dans } U . \\[2ex] \text{Il existe un voisinage } V \text{ de } O \text{ tel que, pour toute } (0,q+1) \text{ forme} \\ f,\ f \in L^2(U),\ \bar{\partial}\text{-fermée dans } U,\ \operatorname{supp}(f) \subset \overline{U}^{+} \text{ il existe une} \\ (0,q)\text{-forme } u \text{ telle que } \bar{\partial} u = f \text{ dans } V \text{ et } \operatorname{supp}(u) \subset \overline{V}^{+}. \end{cases}$$

Comme $\lambda$ est non identiquement nulle, on peut supposer que $\lambda^{(\gamma)}(z) \neq 0$, $z \in \bar{U}$, où $\gamma$ est un certain multi-indice, et $\lambda^{(\gamma)}$ désignant la dérivée de $\lambda$ d'ordre $\gamma$ dans le système de coordonnées $(x_j)$.

Rappelons que dans [4] , nous avons donné des conditions suffisantes pour avoir $(H_q)$, en utilisant la méthode des inégalités de Carleman ([2] , [6]).

Considéré comme opérateur des $(0,q)$-formes dans les $(0,q+1)$-formes, $\bar{\partial}$ est un système différentiel à coefficients constants :

$$\bar{\partial} = (P_{ij})$$

Dans le système de coordonnées $(x'_j)$, $\bar{\partial}$ devient un système à coefficients variables que l'on notera : $\bar{\partial} = (\tilde{P}_{ij})$. D'autre part, on notera $x'' = (x'_1,\dots,x'_{2n-1})$.

## 3. LES RESULTATS

Nous commençons par énoncer un lemme élémentaire qui donne la forme des opérateurs $\tilde{P}_{ij}$ et le corollaire que l'on en déduit.

Lemme 3.1 : Les opérateurs $\tilde{P}_{ij}$ ont la forme suivante

$$\tilde{P}_{ij} = \sum_{k=1}^{2n-1} \tilde{a}_k^{ij} \frac{\partial}{\partial x'_k} + \tilde{a}_{2n}^{ij}(x'_1,\dots,x'_{2n-1}) \frac{\partial}{\partial x'_{2n}}$$

où $a_k^{ij}$ sont des coefficients constants pour $k \leqslant 2n-1$.

Corollaire 3.2 : $\left[\bar{\partial}, \dfrac{\partial}{\partial x'_{2n}}\right] = 0$ .

L'hypothèse $(H_q)$ et le corollaire précédent permettent alors de montrer la

<u>Proposition 3.3</u> : On suppose $(H_q)$ satisfaite soit f une $(0,q+1)$-forme de classe $C^\infty$, $\bar\partial$-fermée dans U, avec $\mathrm{supp}(f) \subset \bar{U}^+$. Soit k un entier, $k \geqslant 0$. Il existe une $(0,q)$ forme $u_k$ telle que :

$$\begin{cases} \bar\partial u_k = \lambda_f \quad \text{dans } V \\ \mathrm{supp}(u_k) \subset \bar{V}^+ \\ u_k \in C^k(x'_{2n}, L^2(x'')) \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : En fait, on peut se contenter de supposer que la forme f soit de classe $C^N(U)$, avec N assez grand, l'ordre de grandeur étant lié à $|\gamma|$ et k.

La démonstration de la proposition 3.3, consiste à résoudre l'équation $\bar\partial u = \lambda \dfrac{\partial(\lambda f)}{\partial x'_{2n}}$ dans V, grâce à l'hypothèse $(H_q)$, à poser

$$v(x'_1,\dots,x'_{2n}) = \int_0^{x'_{2n}} u(x'_1,\dots,x'_{2n-1},t)\,dt$$

et à montrer que la forme v satisfait à :

$$\begin{cases} \bar\partial v = \lambda f \\ \mathrm{supp}(v) \subset \bar{V}^+ \\ v \in C^0(x'_{2n}, L^2(x'')) \end{cases}$$

Un procédé itératif donnera alors la proposition. La proposition précédente donne donc un résultat avec trace nulle sur S pour une solution, mais avec second membre multiple de $\lambda$ .

Voici maintenant un lemme, de nouveau élémentaire, qui permet de s'en sortir, avec un second membre f, non multiple de $\lambda$ .

<u>Lemme 3.4</u> : Soit h une distribution dans U ; alors

$$h = \frac{1}{\lambda^{(\gamma)}} \sum_{\alpha+\beta=\gamma} C_{\alpha\beta} \, (\lambda\, h^{(\alpha)})^{(\beta)} \quad \text{dans } U$$

où le signe $(\alpha)$ désigne une dérivation d'ordre $(\alpha)$ dans le système de coordonnées $(x_j)$.

La démonstration se fait par une simple récurrence. Ce lemme, permet alors, en conjonction avec la proposition 3.4 de montrer la :

<u>Théorème 3.5</u> : Supposons $(H_q)$ satisfaite. Soit f une $(0,q+1)$-forme, $\bar\partial$-fermée dans U, de classe $C^\infty(U)$ à support dans $\bar U^+$. Soit k un entier $\geqslant 0$. Il existe une $(0,q)$-forme u telle que

$$\begin{cases} \bar\partial u = f \quad \text{dans } V \\ u \in C^k(x'_{2n}, H^{-\gamma}(x'')) \\ \operatorname{supp}(u) \subset \bar V^+ . \end{cases}$$

Remarquons ici aussi que f n'a pas besoin d'être $C^\infty(U)$ mais d'une régularité suffisante.

Pour montrer la proposition 3.5, on tient compte du lemme 3.4 et on résout l'équation

$$\bar\partial u_\alpha = \lambda\, f^{(\alpha)}$$

grâce à la proposition 3.3.

Ensuite on montre que $u = \frac{1}{\lambda^{(\gamma)}} \sum_{\alpha+\beta=\gamma} C_{\alpha\beta} \; u_\alpha^{(\beta)}$ convient :

<u>Cas particulier où q = 0</u>

Dans ce cas nous n'avons pas besoin de l'hypothèse $\frac{\partial\lambda}{\partial x'_{2n}}$ divisible par $\lambda$ dans un voisinage de 0. Une application du lemme 3.4, combinée à l'hypoellipticité du $\bar\partial$ donne :

Proposition 3.6 : Supposons qu'on sache résoudre $(1)_o$ . Soit f une (O,1)-forme, $\bar\partial$-fermée dans U, de classe $C^\infty(U)$, à support dans $\bar U^+$. Il existe une fonction u de classe $C^\infty$ dans V telle que

$$\begin{cases} \bar\partial u = f \quad \text{dans } V \\ \mathrm{supp}(u) \subset \bar V^+ \\ (\text{en particulier } u|_S = 0\ ) \end{cases}$$

Comme ci-dessus, on prend $u = \dfrac{1}{\lambda^{(\gamma)}} \sum_{\alpha+\beta=\gamma} C_{\alpha\beta}\, u_\alpha^{(\beta)}$ où $u_\alpha$ est solution de $\bar\partial u_\alpha = \lambda f^{(\alpha)}$.

Alors $\bar\partial u = f$ avec $\mathrm{supp}(u) \subset \bar V^+$ ; comme f est $C^\infty(V)$, u l'est aussi ; ce qui donne le résultat. Remarquons aussi qu'il suffit de supposer que $f \in C^N(U)$, N assez grand.

## 4. EXTENSION DE FORMES $\bar\partial_b$-FERMEES

Le résultat précédent, a une application en Analyse Complexe, à savoir l'extension de formes $\bar\partial_b$-fermées, en particulier de fonctions C.R. On a essentiellement la

Proposition 4.1 : Supposons $(H_q)$ vérifiée. Soit f une (O,q) forme $\bar\partial_b$-fermée sur S, de classe $C^\infty$ . Pour tout entier k, il existe une (O,q)-forme $\tilde f$ , $\bar\partial$-fermée dans $V^+$ telle que $\tilde f \in C^k_{x_{2n}}(H^{-|\gamma|}_{x''})$ , $\tilde f|_S = f$ .

Dans le cas des fonctions, on a mieux, à savoir :

Proposition 4.2 : Supposons $(1)_o$ résoluble. Soit f une fonction C.R. sur S, de classe $C^\infty$ . Il existe une fonction holomorphe f dans $U^+$, de classe $C^\infty$ sur $\bar V^+$ telle que $\tilde f|_S = f$.

Remarque : En fait on a besoin seulement que f soit de classe $C^N$, avec N assez grand.

La proposition 4.1, se déduit aisément du théorème 3.5. En effet, on peut prolonger f en une forme F, de classe $C^\infty$ dans $\bar U^+$ telle que $\bar\partial F$ s'annule à l'ordre $\infty$ (ou à un ordre fini si on a pris $f \in C^N(s)$) voir [1] [7] ) sur S . Il suffit alors de poser :

$$g = \begin{cases} \bar\partial F & \text{sur} \quad U^+ \\ 0 & \text{sur} \quad U^- \end{cases}$$

alors g est une $(0,q+1)$-forme $\bar\partial$-fermée dans U, à support dans $\bar{U}^+$, de classe $C^\infty$ (ou $C^N$). On résout par le théorème 3.5 l'équation $\bar\partial u = g$, $\mathrm{supp}(u) \subset \bar{V}^+$ et on pose $v = F - u$ ; alors $\bar\partial v = 0$ dans V et $v|_S = f$ .

Dans le cas des fonctions, on a mieux, à savoir la proposition 4.2, car en résolvant $\bar\partial u = g$, l'hypoellipticité du $\bar\partial$ nous assure que $u \in C^\infty$ (ou $C^N$) et donc $v = F - u \in C^\infty(\bar{V}^+)$ $(C^N(\bar{V}^+))$, (voir Proposition 3.6).

## 5. UNE CLASSE D'EXEMPLES

On considère dans $\mathbb{C}^n$, avec $n \geqslant q+2$, l'hypersurface $S = \{r = 0\}$ avec $r = 2\mathcal{R}e\, z_n + \phi(z')$, $z' = (z_1,\dots,z_{n-1})$ avec

$$\begin{cases} \phi(z') \geqslant 0 \\ \text{Hess}(\phi) \geqslant |h| \quad \text{ou } h = h(z') \text{ est une fonction holomorphe} \not\equiv 0 \\ \phi(z') \longrightarrow 0 \implies z' \longrightarrow 0 . \end{cases}$$

Alors S satisfait l'hypothèse $(H_q)$, en posant $\lambda = h^2$.

En fait $U^+$ peut être défini par $\{\varphi < 1\}$ , avec $\varphi = \exp(r)$. On montre aisément que $\text{Hess}(\varphi) \geqslant |h|$. On montre alors que si W est un voisinage de 0, il existe une fonction $\varphi_W$ telle que

$$\text{(5.1)} \qquad \begin{cases} \varphi_W(0) > 1 \\ \{\varphi < 1\} \cap \{\varphi_W > 1\} \subset V \\ \text{Hess}(\varphi_W) \geqslant |h| \end{cases}$$

D'après ([4] , [5]), (5.1) entraîne qu'on peut résoudre le problème $(2)_q$, avec $\lambda = h^2$. Il reste alors juste à remarquer que puisque $h(z) = h(z')$, alors

$$\frac{\partial h}{\partial x'_{2n}} = \frac{\partial h}{\partial x_{2n}} \equiv 0 .$$

Terminons en remarquant qu'il est probable que l'on puisse étudier la question de l'extension de formes $\bar{\partial}_b$-fermées dans le cas de variétés C.R. de codimension supérieure, avec les méthodes de Baouendi-Trèves ( [3] [9]), tout au moins dans le cas où la forme de Levi est non dégénérée.

---

## BIBLIOGRAPHIE


[1] A. Andreotti, C. D. Hill : E. E. Convexity and the H. Lewy problem, part I : reduction to vanishing theorems. Ann. Scuola Normale di Pisa, 26 (1972).

[2] A. Andreotti, E. Vesentini : Carleman estimates for the Laplace-Beltrami equation on complex manifolds. Publ. I.H.E.S., vol. 24-25.

[3] M. S. Baouendi, F. Trèves : A property of the functions... Ann. of Maths, 113 (1981).

[4] M. Derridj : Inégalités de Carleman et extension locale des fonctions holomorphes. Ann. Scuola Normale di Pisa, vol. IX, 4 (1982).

[5] M. Derridj, J. E. Fornaess : A result on extensions of C. R. functions. Ann. Inst. Fourier, Fasc. 3, Tome 3 (1983).

[6] L. Hörmander : $L^2$-estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$-operator. Acta Math. 113 (1965).

[7] L. Hörmander : Introduction to complex analysis in several variable. Van Nostrand.

[8] L. Nirenberg : On the H. Lewy extension phenomenon. Trans. Am. Math. Soc. 168 (1972).

[9] F. Trèves : Cours à l'Ecole Polytechnique. Mai 1981.


*
* *
*