Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

P. Grisvard

Singularités des problèmes aux limites dans des polyèdres

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1981-1982), exp. nº 8, p. 1-19

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1981-1982____A7_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-MEYER-SCHWARTZ 1981-1982

SINGULARITES DES PROBLEMES AUX LIMITES DANS DES POLYEDRES

par P. GRISVARD

Exposé n° VIII

16 Mars 1982

§ 1. INTRODUCTION

On considère ici le problème (modèle) de Dirichlet pour l'équation de Laplace

$$\Delta u = f$$

dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ à frontière polyédrique. On cherche la régularité de u lorsque f est donnée dans l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$♦. L'idéal serait que u appartienne à $H^{m+2}(\Omega)$ comme lorsque la frontière de Ω est régulière.

Dans le problème analogue dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ à frontière polygonale, les résultats sont bien établis et font apparaître la nécessité d'augmenter $H^{m+2}(\Omega)$ d'un nombre fini de dimensions pour exprimer commodément le comportement de u. Ces dimensions supplémentaires sont engendrées par des solutions particulières dites "solutions singulières".

En dimension trois les résultats disponibles sont épars et dûs essentiellement à Eskin [2] , Fichera [3], Kondratiev [6], [7] Maz'ja et Plamenevskii [8] et Nikishkin [10]. Il n'y a pas d'extension simple à la dimension trois des phénomènes observés en dimension deux, même lorsqu'on se limite à l'étude de u au voisinage d'un dièdre. On donnera ici une description complète des singularités de u le long d'un dièdre (cf. le résultat précis du § 3) et leur développement asymptotique au voisinage d'un sommet (résultat précis au § 6). Les démonstrations utilisent les résultats de Bouhafa [1] et Moussaoui et Sadallah [9].

§ 2. RAPPELS SUR LES SOLUTIONS SINGULIERES EN DIMENSION DEUX

On suppose donc que $G \subset \mathbb{R}^2$ a pour frontière un polygone S. Pour fixer les notations on suppose que l'origine est un sommet de S correspondant à l'angle

$$0 < \theta < \omega ,$$

♦ espaces des fonctions dont les dérivées jusqu'à l'ordre m sont de carré sommable dans Ω .

de G. Les solutions singulières engendrées par cet angle sont les suivantes

$$\mathfrak{S}_j(r,\theta) = r^{j\pi/\omega}\sin(j\pi\theta/\omega) = \operatorname{Im} z^{\frac{j\pi}{\omega}}$$

si $j = 1,2,\ldots$ avec $j\pi/\omega$ non entier et

$$\mathfrak{S}_j(r,\theta) = r^{j\pi/\omega}\{\operatorname{Log} r \sin(j\pi\theta/\omega) + \theta\cos(j\pi\theta/\omega)\} = \operatorname{Im} z^{\frac{j\pi}{\omega}} \operatorname{Log} z$$

si $j = 1,2,\ldots$ avec $j\pi/\omega$ entier.

Soit W un voisinage de O dans G tel que $\bar{W}$ ne contienne aucun sommet de S sauf O, le comportement de u dans W est donné par la règle suivante :
Pour tout $f \in H^m(G)$, il existe des nombres c_j, $j = 1,2,\ldots$ tels que

$$u - \sum_{j\frac{\pi}{\omega} < m+1} c_j\, \mathfrak{S}_j \in H^{m+2}(W)$$

à condition que $(m+1)\omega/\pi$ ne soit pas entier.

Lorsque $(m+1)\omega/\pi$ est entier la différence ci-dessus appartient à tous les espaces $W_p^{m+2}(W)$ pour $p < 2$. Toutes les références concernant ces résultats sont indiquées dans Grisvard [5] .

§ 3. COMPORTEMENT AU VOISINAGE D'UN DIEDRE

On suppose maintenant que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ a pour frontière Γ un polyèdre dont une arête A est portée par l'axe z' O z correspondant au dièdre

$$0 < \theta < \omega$$

de Ω . On suppose que l'origine est un point intérieur à cette arête et on considère un voisinage ouvert V de O tel que $\bar{V}$ ne rencontre aucune autre arête de Γ (donc aucun sommet). Pour simplifier on suppose que

$$V = W \times I$$

où I est un intervalle ouvert de z' O z et W un ouvert du plan x O y.

Partant des résultats en dimension deux et tenant compte du fait que localement la direction Oz est une direction régulière de Γ on s'attend à ce que pour $f \in H^m(\Omega)$ il existe des fonctions numériques c_j, $j = 1,2,\ldots$ définies sur I telles que

$$v_m = u - \sum_{j\frac{\pi}{\omega} < m+1} c_j \otimes \mathfrak{S}_j \in H^{m+2}(W).$$

De plus le problème étant elliptique on s'attend à ce que la régularité des c_j (qui est une régularité "tangentielle") "suive" celle de f. De bons auteurs affirment que pour $f \in H^m(\Omega)$ on a $c_j \in H^{m+2}(I)$.

Cette conjecture est démentie par Eskin [2] qui traite le problème mêlé dans un ouvert régulier de $\mathbb{R}^3$. Par réflexion c'est le cas particulier $\omega = 2\pi$ du problème considéré ici. En réalité on a seulement le résultat (non améliorable) que $f \in H^m(\Omega)$ implique $c_j \in H^{m+1-j\pi/\omega}(I)$. C'est un phénomène de perte de régularité tangentielle dans un problème elliptique. Cependant on remarque que pour $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$, on a aussi $c_j \in C^\infty(\bar{I})$.

La différence v_m introduite ci-dessus n'a pas non plus la régularité attendue. Pour décrire convenablement le comportement de u il est nécessaire d'introduire de nouvelles fonctions singulières à deux variables. On pose

$$\mathfrak{S}_{j,\ell}(r,\theta) = r^{2\ell}\, \mathfrak{S}_j(r,\theta)$$

pour $j = 1,2,\ldots$ et $\ell = 0,1,\ldots$ et on peut alors établir le résultat suivant :

Théorème 1 : Pour $f \in H^m(\Omega)$, il existe des fonctions numériques $c_{j,\ell}$, $j = 1,2,\ldots$ et $\ell = 0,1,\ldots$ de la variable z telles que

$$w_m = u - \sum_{\frac{j\pi}{\omega} + 2\ell < m+1} c_{j,\ell} \otimes \mathfrak{S}_{j,\ell} \in L_2(I; H^{m+2}(W))$$

et de plus

$$c_{j,\ell} \in H^{m+1-j\frac{\pi}{\omega} - 2\ell}(I).$$

Bien entendu une régularité additionnelle de f par rapport à z implique le même surcroit de régularité pour w_m et les $c_{j,\ell}$. Plus précisément soit I' un intervalle ouvert de z' O z et W' un ouvert plan tels que

$$\bar{I} \subset I' \quad , \quad \bar{W} \subset W' \ ,$$

et que $V' = W' \times I'$ soit encore un voisinage de O dans Ω avec la propriété que $\bar{V}'$ ne rencontre pas d'autre arête de Γ que A. On a alors le résultat de régularité suivant : pour

$$f \in H^k(I';H^m(W'))$$

on a

$$w_m \in H^k(I;H^{m+2}(W)) \quad \text{et} \quad c_{j,\ell} \in H^{m+1-j\frac{\pi}{\omega}-2\ell+k}(I),$$

d'où le :

<u>Corollaire 1</u> : <u>Pour</u> $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ <u>on a</u> $c_{j,\ell} \in C^\infty(\bar{I})$ <u>et</u>

$$w_m \in C^\infty(\bar{I},H^{m+2}(W))$$

Cependant on en peut pas affirmer que $w_m \in C^\infty(\bar{V})$ puisque justement w_m dépend de m.

§ 4. <u>LA RESOLVANTE DU PROBLEME DE DIRICHLET</u>

Pour établir le résultat décrit au § 3 on considère la situation (modèle) où Ω est un cylindre infini $G \times \mathbb{R}$ où $G \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert à frontière S polygonale comme au § 2. Donc l'origine est un sommet de S correspondant à l'angle $0 < \theta < \omega$ pour G; W est un voisinage de O dans G tel que $\bar{W}$ ne contient aucun sommet de S sauf O.

Naturellement l'étude du problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace $\Delta u = f$ dans Ω est réduite par transformation de Fourier partielle à à un problème dans G dépendant d'un paramètre. Soit donc $u_\lambda \in H^1_o(G)$ solution de

$$\Delta u_\lambda - \lambda u_\lambda = f \quad \text{dans } G$$

avec $f \in H^m(G)$ donné. Le paramètre λ est réel non négatif. Pour utiliser les résultats du § 2 on réécrit l'équation ci-dessus sous la forme

$$\Delta u_\lambda = \lambda u_\lambda + f .$$

On sait donc au départ que le second membre $\lambda u_\lambda + f$ est élément de $H^1(G)$. On en déduit l'existence de nombres $c_{j,\lambda}$ tels que

$$u_\lambda - \sum_{\frac{j\pi}{\omega} < 2} c_{j,\lambda} \mathfrak{S}_j \in H^3(W).$$

Il s'ensuit que même si $m \geqslant 3$ le second membre $\lambda u_\lambda + f$ n'est pas élément de $H^3(W)$. En réalité on aura

$$\lambda u_\lambda + f = g + h$$

où $g \in H^3(W)$ et $h = \sum_{\frac{j\pi}{\omega} < 2} \lambda c_{j,\lambda} \mathfrak{S}_j$.

La régularité de $v_\lambda \in H^1_o(G)$ solution de

$$\Delta v_\lambda = g$$

est donnée au § 2 tandis que celle de $w_\lambda \in H^1_o(G)$ solution de

$$\Delta w_\lambda = h$$

fait intervenir les fonctions $\mathfrak{S}_{j,1}$ qui vérifient

$$\begin{cases} \Delta \mathcal{G}_{j,1} - [(\frac{j\pi}{\omega}+2)^2 - (\frac{j\pi}{\omega})^2]\ \mathcal{G}_j \in C^\infty(\bar{W}) \\ \mathcal{G}_{j,1} = 0 \quad \text{pour} \quad \theta = 0 \\ \mathcal{G}_{j,1} \in C^\infty([0,\varepsilon]) \quad \text{pour} \quad \theta = \omega . \end{cases}$$

Il s'ensuit que

$$u_\lambda - \sum_{\frac{j\pi}{\omega} + 2\ell < 4} c_{j,\ell,\lambda}\ \mathcal{G}_{j,\ell} \in H^5(W)$$

et en toute généralité, on a l'existence de nombres $c_{j,\ell,\lambda}$ dépendant de λ tels que

$$u_\lambda - \sum_{\frac{j\pi}{\omega} + 2\ell < m+1} c_{j,\ell,\lambda}\ \mathcal{G}_{j,\ell} \in H^{m+2}(W) .$$

<u>Bouhafa</u> [1] a étudié le comportement asymptotique des $c_{j,\ell,\lambda}$ en fonction de λ. Il a montré que

$$c_{j,\ell,\lambda} = O(\|f\|_m / \lambda^{-\frac{j\pi}{2\omega} - \ell + \frac{m}{2} + \frac{1}{2}})$$

Des résultats analogues ont été établis par le même auteur pour une donnée $f \in W^m_p(G)$, $1 < p < \infty$. Il faut remarquer qu'une approche différente des mêmes résultats consiste en l'étude des singularités des fonctions propres de l'opérateur de Laplace dans un polygone plan. C'est le point de vue adopté par <u>Moussaoui</u> et <u>Sadallah</u> [9] qui l'appliquent à l'équation de la chaleur.

Afin de convaincre le lecteur de la vraisemblance de la majoration ci-dessus on va considérer le cas très particulier où $m = 0$, $j = 1$ et $\ell = 0$ ♦. Dans ce cas particulier une démonstration simple est possible. Bien

♦ Seul le cas $\omega > \pi$ est intéressant .

entendu le cas général se traite à l'aide de la théorie des fonctions de Bessel.

Il est connu que le coefficient $c_\lambda = C_{1,O,\lambda}$ de $\mathfrak{S}_1$ dans u_λ est donné par la formule

$$c_\lambda = \langle \Delta u_\lambda ; v \rangle$$

où $v \in L_2(G)$ est une solution non nulle du problème homogène adjoint

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{dans } G \\ v = 0 & \text{sur } S \end{cases}$$

où la condition aux limites est entendue dans un sens faible (cf. Grisvard [4]). De plus il existe $a \neq 0$ tel que

$$\begin{cases} v - a r^{-\pi/\omega} \sin \dfrac{\pi\theta}{\omega} \in H^1(W) \\ v \in H^1(G \cap \{r > \varepsilon\}) \text{ pour tout } \varepsilon > 0 \end{cases}$$

et ceci implique que

$$\begin{cases} v \in H^s(G), \; s < 1 - \dfrac{\pi}{\omega} \\ v \notin H^{1-\pi/\omega}(G) \; . \end{cases}$$

On en déduit immédiatement que

$$|c_\lambda| = O(\| \Delta u_\lambda \|_{-s}) \quad \text{pour tout} \quad s < 1 - \frac{\pi}{\omega} \, .$$

Pour majorer $\| \Delta u_\lambda \|_{-s}$ on utilise les procédés usuels valables dans n'importe quel ouvert à bord lipschitzien :

$$\| u_\lambda \|_o \leqslant \frac{\| f \|_o}{\lambda} \quad , \quad \| \nabla u_\lambda \|_o \leqslant \frac{\| f \|_o}{\sqrt{\lambda}}$$

Il en résulte que

$$\| \Delta u_\lambda \|_o = \| \lambda u_\lambda + f \|_o = O(\| f \|_o)$$

$$\| \Delta u_\lambda \|_{-1} = O(\| \nabla u_\lambda \|_o) = O(\frac{\| f \|_o}{\sqrt{\lambda}})$$

d'où par interpolation

$$\| \Delta u_\lambda \|_{-s} = O(\| f \|_o / \lambda^{s/2}).$$

Ceci établit que

$$| c_\lambda | = O(\| f \|_o / \lambda^{-\frac{\pi}{2\omega} + \frac{1}{2} - \varepsilon})$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Dans le résultat de Bouhafa on peut "faire $\varepsilon = 0$". Avec la technique présentée ici il faut remarquer que v appartient à l'espace de Nikolski

$$B_\infty^{1 - \frac{\pi}{\omega}, 2}(G)$$

et par conséquent on aura

$$| \tilde{c}_\lambda | = O(\| \Delta u_\lambda \|_{B_1^{-1+\frac{\pi}{\omega}, 2}(G)})$$

$$= O(\| f \|_o / \lambda^{-\frac{\pi}{2\omega} + \frac{1}{2}}) \; ♦$$

Ce résultat est inaméliorable puisque $v \notin H^{1-\frac{\pi}{\omega}}(G)$.

§ 5. DEMONSTRATION DU THEOREME 1

Comme au début du § 4 on considère $u \in H_o^1(G \times \mathbb{R})$ solution de $\Delta u = f$. Après transformation de Fourier en z on obtient

---

♦ Pour les spécialistes de l'interpolation et des espaces de Besov and Co.

$$\begin{cases} \hat{u} \in H_0^1(G) \\ \Delta\hat{u} - \tau^2\hat{u} = \hat{f} \quad \text{dans} \quad G \,. \end{cases}$$

Supposant que $f \in H^m(\Omega)$ on a $\hat{f} \in H^m(G)$ pour tout τ d'où

$$\hat{u} - \sum_{\frac{j\pi}{\omega} + 2\ell < m+1} c_{j,\ell,\tau^2} \, \mathcal{G}_{j,\ell} \in H^{m+2}(W)$$

pour tout τ avec la majoration

$$c_{j,\ell,\tau^2} = O(\|\hat{f}\|_{H^m(G)} / \tau^{-\frac{j\pi}{\omega} - 2\ell + m + 1}) \,.$$

La transformée de Fourier inverse de $\tau \longmapsto c_{j,\ell,\tau^2}$ est une fonction numérique $c_{j,\ell}$ qui appartient à l'espace

$$H^{m+1-j\frac{\pi}{\omega} - 2\ell}(\mathbb{R})$$

car on a $\hat{f} \in L_2(\mathbb{R}\,;H^m(G))$ donc $\|\hat{f}\|_{H^m(G)} \in L_2(\mathbb{R})$. De plus on a évidemment

$$u - \sum_{\frac{j\pi}{\omega} + 2\ell < m + 1} c_{j,\ell} \otimes \mathcal{G}_{j,\ell} \in H^{m+2}(W)$$

pour presque tout z. Le reste de la démonstration du théorème 1 est banal.

On remarque en outre que si $f \in H^k(\mathbb{R};H^m(G))$ on a alors

$$(1 + |\tau|^2)^{k/2} \, \|\hat{f}\|_{H^m(G)} \in L_2(\mathbb{R}) \quad \text{d'où}$$

$$c_{j,\ell} \in H^{m+1-j\frac{\pi}{\omega} - 2\ell + k}(\mathbb{R}) \,.$$

Ceci implique le corollaire 1.

§ 6. COMPORTEMENT AU VOISINAGE D'UN SOMMET

On va considérer $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ à frontière Γ polyèdre avec un sommet à l'origine ; A désigne une des arêtes d'angle ω passant par O. Compte tenu des difficultés rencontrées précédemment on va supposer que $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Le comportement de u au voisinage de A a été élucidé au § 3. Les coefficients $c_{j,\ell}$ des fonctions singulières a deux variables, sont des fonctions indéfiniment dérivables à l'intérieur de A. Il s'agit maintenant de décrire le comportement des $c_{j,\ell}$ à l'approche de l'origine. Ceci va nécessiter l'introduction de quelques notations supplémentaires.

On désignera par ρ la distance à l'origine ; par conséquent $c_{j,\ell}$ est aussi une fonction de ρ . Par ailleurs on désignera par G' l'intersection de la sphère unité avec le cône qui coïncide avec Ω au voisinage de O. Enfin on notera λ_k, $k = 1,2,\dots$. La suite en ordre croissant des valeurs propres de l'opposé de l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ' sur G' avec conditions de Dirichlet sur $S' = \partial G'$. Plus précisément pour tout k il existe $w \in H^1_0(G')$ non nulle telle que

$$- \Delta' w = \lambda_k w$$

sur G' ♦ . On pose

$$S_k(\rho) = \begin{cases} \rho^{-\frac{1}{2} + \sqrt{\lambda_k + \frac{1}{4}}} & \text{si } -\frac{1}{2} + \sqrt{\lambda_k + \frac{1}{4}} \notin \mathbb{N} \\ \rho^{-\frac{1}{2} + \sqrt{\lambda_k + \frac{1}{4}}} \operatorname{Log} \rho & \text{si } -\frac{1}{2} + \sqrt{\lambda_k + \frac{1}{4}} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

<u>Théorème 2</u> : <u>Pour</u> $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ <u>chaque fonction</u> $c_{j,\ell}$ <u>admet un développement asymptotique de la forme</u>

♦ G' ayant des coins il convient d'exclure les valeurs propres correspondant à des fonctions propres hors de $H^1_0(G)$...eh oui !

$$c_{j,\ell}(\rho) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \, S_k(\rho)$$

<u>lorsque</u> $\rho \to 0$, <u>où les</u> γ_k <u>sont des constantes</u> (<u>qui dépendent de</u> j,ℓ <u>et</u> f).

La signification de ce développement asymptotique est bien entendu que pour tout m, la fonction

$$c_{j,\ell}(\rho) - \sum_{-\frac{1}{2}+\sqrt{\lambda_k+\frac{1}{4}} \leqslant m} \gamma_k \, S_k(\rho)$$

est de classe C^m jusqu'en $\rho = 0$.

Ce développement asymptotique est en accord avec les résultats de <u>Fichera</u> [3] sur le potentiel électrique d'un cube.

La démonstration est en deux parties correspondant à deux sortes de données f. Suivant <u>Kondratiev</u> [6] on désigne par $P^m(\Omega)$ l'espace des fonctions u telles que

$$\rho^{-m+|\alpha|} D^{\alpha}u \in L_2(\Omega), \ |\alpha| \leqslant m.$$

Cet espace à l'avantage que le changement de variable $\rho = e^t$ (qui "envoie le sommet à l'infini") le transforme en un espace de Sobolev usuel c'est à dire sans poids dépendant de l'ordre de dérivation. Il faut le comparer à $H^m(\Omega)$. On remarque d'abord que grâce à l'immersion de Sobolev on peut définir le développement de Taylor de $u \in H^m(\Omega)$ à l'ordre $m-2$ au voisinage de 0. Ce développement de Taylor est nul si et seulement si $u \in P^m(\Omega)$ toujours d'après <u>Kondratiev</u> [6] . Il en résulte que pour tout $f \in H^m(\Omega)$ il existe p polynôme de degré $m-2$ et $g \in P^m(\Omega)$ tels que

$$f = p + g.$$

Il importe d'observer qu'une telle décomposition n'est pas possible en dimension 2 car on bute contre le cas limite de l'immersion de Sobolev. Ceci posé, les deux paragraphes suivants seront consacrés au problème avec donnée polynomiale et donnée dans $P^m(\Omega)$ respectivement.

§ 7. SECONDS MEMBRES POLYNOMIAUX

Soit donc p un polynome homogène de degré d. On va chercher une solution particulière de

$$\begin{cases} \Delta u = p & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

au voisinage de O. Si on note σ la variable dans G', on a

$$p = \rho^{d}\psi(\sigma)$$

et il est naturel de chercher u sous la forme

$$u = \rho^{d+2}\phi(\sigma) \ .$$

En substituant dans l'équation de Laplace on obtient

$$\begin{cases} \Delta'\phi + (d+2)(d+3)\phi = \psi \text{ dans } G' \\ \phi = 0 \quad \text{sur} \quad S'. \end{cases}$$

Ce problème admet une solution si (d+2)(d+3) n'est pas une valeur propre de $-\Delta'$. Dans le cas contraire on cherche u sous la forme

$$u = \rho^{d+2} \{\operatorname{Log}\rho\, \phi(\sigma) + \eta(\sigma)\}$$

En substituant on obtient

$$\begin{cases} \Delta'\phi + (d+2)(d+3)\phi = 0 \quad \text{dans } G' \\ \phi = 0 \quad \text{sur } S' \\ \Delta'\eta + (d+2)(d+3)\eta = \psi - (2d+5)\phi \quad \text{dans } G' \\ \eta = 0 \quad \text{sur } S' \end{cases}$$

Soit $\{w_1, w_2, \dots, w_N\}$ une base orthonormale de l'espace propre de $-\Delta'$ pour la valeur propre (d+2) (d+3). On a nécessairement

$$\phi = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j w_j$$

et la seconde équation (en η) n'admet de solution qu'à la condition que son second membre $\psi - (2d+5)\phi$ soit orthogonal aux w_j, c'est à dire que

$$\alpha_j = \frac{(\psi, w_j)}{2d+5} \ , \ 1 \leqslant j \leqslant N \ .$$

Avec ce choix particulier des α_j le problème en η admet une solution (unique à une combinaison linéaire des w_j près).

On peut appliquer à ϕ et η les résultats rappelés au § 2 (ou plutôt leur forme modifiée du § 4). On note W' un voisinage de $A \cap \overline{G'}$ dans G' et on note $\mathfrak{S}'_{j,\ell}$ les fonctions singulières de Δ' correspondant au sommet $A \cap \overline{G'}$. Il existe des nombres $d_{j,\ell}$ et $e_{j,\ell}$ tels que

$$\phi_m = \phi - \sum_{\frac{j\pi}{\omega} + 2\ell < m+1} d_{j,\ell} \, \mathfrak{S}'_{j,\ell} \in H^{m+2}(W')$$

et

$$\eta_m = \eta - \sum_{\frac{j\pi}{\omega} + 2\ell < m+1} e_{j,\ell} \, \mathfrak{S}'_{j,\ell} \in H^{m+2}(W')$$

si l'angle du dièdre d'arête A a pour mesure ω . Il s'ensuit que

$$u = \sum_{\frac{j\pi}{\omega} + 2\ell < m+1} d_{j,\ell} \, \rho^{d+2} \mathfrak{S}'_{j,\ell}(\sigma) + \rho^{d+2} \phi_m(\sigma)$$

dans le cas où (d+2) (d+3) n'est pas une valeur propre de $-\Delta'$ et que

$$u = \sum_{\frac{j\pi}{\omega} + 2\ell < m+1} (d_{j,\ell} \mathrm{Log}\, \rho + e_{j,\ell}) \, \rho^{d+2} \mathfrak{S}'_{j,\ell}(\sigma)$$

$$+ \rho^{d+2}(\mathrm{Log}\, \rho \ \ \phi_m(\sigma) + \psi_m(\sigma))$$

Lorsque $(d+2)(d+3) = \lambda_k$ donc $d+2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\lambda_k + \frac{1}{4}}$.

Dans le premier cas le coefficient de $\mathcal{G}'_{j,\ell}$ est un polynôme il ne contribue pas au développement asymptotique de $c_{j,\ell}(\rho)$ lorsque $\rho \to 0$. Dans le second cas le coefficient de $\mathcal{G}'_{j,\ell}$ est

$$(d_{j,\ell} \operatorname{Log} \rho + e_{j,\ell})\ \rho^{-\frac{1}{2} + \sqrt{\lambda_k + \frac{1}{4}}}$$

qui contribue au développement asymptotique de $c_{j,\ell}(\rho)$ par le terme

$$\gamma_k (\operatorname{Log} \rho)\ \rho^{-\frac{1}{2} + \sqrt{\lambda_k + \frac{1}{4}}} = \gamma_k\ S_k(\rho)$$

où $\gamma_k = d_{j,\ell}$.

§ 8. SECONDS MEMBRES PLATS

On considère à présent $g \in P^m(\Omega)$ donc "plate" à l'ordre $m - 2$ à l'origine. On va également chercher une solution particulière de

$$\begin{cases} \Delta u = g & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

au voisinage de O (en fait dans le cône infini correspondant ♦).

Pour cela on effectue le changement de variable $\rho = e^t$ et on pose :

$$w(t,\sigma) = e^{-(m+\frac{1}{2})t}\ u(\rho\sigma)$$

Il vient

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (2m+2)\frac{\partial w}{\partial t} + \{\Delta' + (m+\tfrac{1}{2})(m+\tfrac{3}{2})\}\ w = h \quad \text{dans} \quad G' \times \mathbb{R}$$

où

$$h(t,\sigma) = e^{-(m-\frac{3}{2})t}\ g(\rho\sigma)$$

♦ en supposant g nulle loin de O et en la prolongeant par zéro.

et naturellement

$$w = 0 \quad \text{sur} \quad S' \times \mathbb{R} .$$

La donnée h du problème en w appartient à $H^m(\mathbb{R} \times G')$ comme on le vérifie aisément (c'est là le mérite essentiel de l'espace $P^m(\Omega)$).

Utilisant la transformation de Fourier partielle en t et procédant comme au § 5 on vérifie qu'il existe une solution unique

$$w \in H^1_0(G' \times \mathbb{R})$$

à condition que $(m + \frac{1}{2})$ $(m + \frac{3}{2})$ ne soit pas une valeur propre de $-\Delta'$. De plus utilisant le fait que

$$h \in H^k(\mathbb{R};\, H^{m-k}(G'))$$

pour tout k tel que $0 \leqslant k \leqslant m$, on voit que

$$w_{m-k} = w - \sum_{\frac{j\pi}{\omega} + \ell < m+1-k} d_{j,\ell} \otimes \mathfrak{S}'_{j,\ell} \in H^k(\mathbb{R}; H^{m+2-k}(W'))$$

avec

$$d_{j,\ell} \in H^{m+1-j\frac{\pi}{\omega}-2\ell}(\mathbb{R}) .$$

Pour conclure on revient à la variable ρ puisque

$$u(\rho\sigma) = \rho^{m+\frac{1}{2}} w(\text{Log } \rho, \sigma)$$

On pose par définition

$$u_{m-k}(\rho\sigma) = \rho^{m+\frac{1}{2}} w_{m-k}(\text{Log } \rho, \sigma)$$

et on a évidemment les propriétés suivantes

$$u_{m-k}(\rho\sigma) = u(\rho\sigma) - \sum_{\frac{j\pi}{\omega}+\ell < m+1-k} \rho^{m+\frac{1}{2}} d_{j,\ell}(\text{Log } \rho)\, \mathfrak{S}'_{j,\ell}(\sigma)$$

$$\rho^{-m-1+i} \frac{\partial^i u_{m-k}}{\partial \rho^i} \in L_2(]0,+\infty[;\ H^{m+2-k}(W')),\ 0 \leqslant i \leqslant k$$

$$\rho^{-m-1+i} \frac{\partial^i}{\partial \rho^i} \{\rho^{m+\frac{1}{2}} d_{j,\ell}(\text{Log } \rho)\} \in L_2(\ ]0,\infty[),\ 0 \leqslant i \leqslant m+1 - j\frac{\pi}{\omega} - 2\ell$$

Le coefficient de la singularité $\mathfrak{S}'_{j,\ell}(\sigma)$ est la fonction

$$\rho^{m+\frac{1}{2}} d_{j,\ell}(\text{Log } \rho)^{\blacklozenge}$$

qui est plate à l'ordre $[m - j\frac{\pi}{\omega} - 2\ell]$ en $\rho = 0$. Elle ne contribuera pas au développement asymptotique de $c_{j,\ell}(\rho)$ pour $f \in C^\infty(\Omega)$ car on aura la possibilité de choisir m quelconque.

§ 9. CONCLUSION

On revient à la situation du § 6. On a donc $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ d'où $f \in H^m(\Omega)$ pour tout m. On effectue la décomposition indiquée $f = g + p$ avec $g \in P^m(\Omega)$ et p un polynôme. Ensuite au voisinage de O on retranche de u les solutions particulières correspondant à p et g construites aux §§ 7 et 8 . On est ainsi ramené à considérer $v \in H^1(\Omega)$ solution du problème homogène

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

au voisinage de O.

♦ Avec un peu de soin on établit précisément que cette fonction appartient à $\tilde{H}^{m+1-j\frac{\pi}{\omega}-2\ell}(\mathbb{R}_+)$ où le ~ signifie qu'on peut prolonger par zéro en demeurant dans $H^{m+1-j\frac{\pi}{\omega}-2\ell}(\mathbb{R})$.

Il est clair que pour $\rho > 0$ petit, v peut être développé sur le système des fonctions propres de Δ' dans $H^1_o(G')$. Supposant que les λ_k sont répétées conformément à leur multiplicité et que

$$\begin{cases} w_k \in H^1_o(G') \\ \|w_k\|_o = 1 \;,\; w_k \perp w_\ell \quad \text{si } k \neq \ell, \\ -\Delta' w_k = \lambda_k \, w_k \quad \text{dans } G' \end{cases}$$

Il vient

$$v(\rho\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \, \rho^{-\frac{1}{2} + \sqrt{\lambda_k + \frac{1}{4}}} + \beta_k \, \rho^{-\frac{1}{2} - \sqrt{\lambda_k + \frac{1}{4}}}) w_k(\sigma)$$

L'appartenance de v à H^1 près de 0 implique immédiatement que $\beta_k = 0$. Ensuite comme au § 7, les résultats du § 2 impliquent que

$$w_{k,m} = w_k - \sum_{\frac{j\pi}{\omega} + 2\ell < m+1} c_{j,\ell,k} \, \mathfrak{S}'_{j,\ell} \in H^{m+2}(W')$$

d'où

$$v(\rho\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \, \rho^{-\frac{1}{2} + \sqrt{\lambda_k + \frac{1}{4}}} \{w_{k,m}(\sigma) + \sum_{\frac{j\pi}{\omega} + 2\ell < m+1} c_{j,\ell,k} \, \mathfrak{S}'_{j,\ell}(\sigma)\}.$$

Le coefficient de $\mathfrak{S}'_{j,\ell}$ dans v est donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \, c_{j,\ell,k} \, \rho^{-\frac{1}{2} + \sqrt{\lambda_k + \frac{1}{4}}}$$

(la convergence des séries considérées est facile à vérifier) et ceci contribue au développement asymptotique de $c_{j,\ell}(\rho)$ par le terme

$$\gamma_k \, \rho^{-\frac{1}{2} + \sqrt{\lambda_k + \frac{1}{4}}} = \gamma_k \, S_k(\rho)$$

où $\gamma_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \, c_{j,\ell,k}$, lorsque $-\frac{1}{2} + \sqrt{\lambda_k + \frac{1}{4}}$ n'est pas entier.

On a ainsi obtenu tous les termes du développement asymptotique indiqué dans le Théorème 2. On a utilisé implicitement le fait que le coefficient de $\mathfrak{S}_{j,\ell}$ donné au § 3 et celui de $\mathfrak{S}'_{j,\ell}$ donné au § 7 et 8 coïncident pour $\rho > 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bouhafa : Thèse de 3ème cycle, Nice, 1982.

[2] Eskin : Boundary value problems for elliptic pseudo-differential equations, Nauka, Moscou, 1973.

[3] Fichera : Comportamento asintotico del campo elettrico e della densita elettrica in prossimità dei un singolari della superficie conduttore, Rendiconti del Seminario Matematico dell' Università e del Politecnico di Torino, Vol. 32, p. 111-143, 1973-74.

[4] Grisvard : Alternative de Fredholm relative au problème de Dirichlet dans un polygone ou un polyèdre, Bollettino U.M.I. 1972, p; 132-164.

[5] Grisvard : Boundary value problems in domains with non smooth boundaries, Lecture Notes # 19, University of Maryland, 1980.

[6] Kondratiev : Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points, Trudy Moskovkogo Mat. Obschetsva, t.16, 1967, pp.209-292 (et Transactions of the Moscow Mat. Soc. 1967 pp.227-313).

[7] Kondratiev : The smoothness of a solution of Dirichlet's problem for 2^{nd} order elliptic equations in a region with a piecewise smooth boundary, Differentsial'nye Uravneniya, Vol. 6, n°10, 1970 (et Differential equations, Vol. 6, 1970, pp. 1392-1401).

[8] Maz'ja et Plamenevskii : L_p estimates of solutions of elliptic boundary value problems in domains with edges, Trugy Moskovkogo Mat. Obschetsva, t. 37, 1978 (et Transactions of the Moscow Mathematical Society, 1980, n°1, p.49-97).

[9] Moussaoui et Sadallah : Régularité des coefficients de propagation de singularités pour l'équation de la chaleur dans un ouvert plan polygonal, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 293, n°5, 1981, pp.297-300.

[10] Nikishkin : Singularities of the solution to the Dirichlet problem for a 2nd order equation in a neighborhood of an edge, Vestnik Moskov. Univ. Mat. 34, n° 2, 1979, pp.51-62 (et Moskow University Mathematics Bulletin, 34, n°2, pp.53-64).

*
* *
*