Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

I. Ekeland

La théorie des perturbations au voisinage des systèmes hamiltoniens convexes

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1981-1982), exp. nº 7, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1981-1982____A6_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z   1 9 8 1 - 1 9 8 2

LA THEORIE DES PERTURBATIONS AU VOISINAGE DES SYSTEMES HAMILTONIENS CONVEXES

par I. EKELAND

Exposé n° VII

8 Décembre 1981

§ 1. PROGRAMME

Une fois de plus, nous allons nous intéresser à la recherche des solutions périodiques d'un système hamiltonien autonome à n degrés de liberté :

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}(x,p) \\ \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}(x,p). \end{cases} \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

Appelons T la période, qui est une des inconnues du problème. Moyennant quelques notations :

$$u = (x,p) \in \mathbb{R}^{2n}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$$

le problème s'écrit :

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \dot{u} = \sigma H'(u) \\ u(0) = u(T) \end{cases} .$$

Depuis l'impulsion initiale donnée par Rabinowitz (voir [1]) de grands progrès ont été accomplis récemment dans la résolution de ce problème. Nous nous attacherons plus particulièrement à la méthode variationnelle duale introduite par Clarke et l'auteur, et décrite dans une des séances antérieures de ce séminaire (voir [2]).

Rappelons-en les grandes lignes. On sait depuis toujours que les équations de Hamilton (1) sont les équations d'Euler associées à l'intégrale

$$\int [\Sigma p_i \frac{dx_i}{dt} - H(x,p)] \, dt .$$

C'est le principe de moindre action. Avec nos notations cela revient à dire que les solutions du problème $(\mathcal{P})$ sont exactement les points critiques de la fonctionnelle

$$\text{(I)} \qquad \int_0^T [\frac{1}{2}(\sigma u,\dot{u}) - H(u)]dt$$

sur l'espace des courbes T-périodiques suffisamment régulières :

$$u(0) = u(T).$$

Introduisons alors la transformée de Legendre de la fonction H, que nous noterons G :

$$G(v) = \{(u,v) - H(u) \mid v = H'(u)\} .$$

Dans le cas général, cette formule ne définit pas G comme une fonction; on renvoie à [3] pour une étude relativement complète. Il n'en est ainsi que dans certains cas particuliers, par exemple si H est convexe, hypothèse que nous ferons désormais.

Dans ce cas, la formule s'écrit aussi

$$G(v) = \operatorname*{Sup}_u \{(u,v) - H(u)\} \qquad \text{(Fenchel)}$$

et G est aussi une fonction convexe. Ses propriétés de régularité correspondent à celles de H; en gros, G est partout finie si et seulement si H est coercive, G est différentiable si et seulement si H est strictement convexe, et réciproquement.

La méthode de dualité consiste en ceci, que les solutions de ($\mathcal{P}$) correspondent biunivoquement aux points critiques de la fonctionnelle

$$\text{(J)} \qquad \int_0^T [\frac{1}{2}(\sigma u,\dot{u}) - G(-\sigma\dot{u})]dt$$

sur le même espace que précedemment :

$$u(0) = u(T) .$$

La fonctionnelle (J) est beaucoup mieux conditionnée que la fonctionnelle (I) pour tous les besoins de l'analyse, à cause du rôle différent qu'y joue la dérivée $\dot{u}$. Par exemple, (I) est toujours non bornée par-dessus et par dessous, alors qu'on peut aisément donner des conditions suffisantes pour que (J) soit coercive.

Mais on ne peut pas aborder ces problèmes comme une terra incognita. Ils sont connus et étudiés depuis bien longtemps, et quelques-uns des mathématiciens les plus grands, tels Jacobi et Poincaré y ont consacré beaucoup d'efforts. Il s'est ainsi constitué un faisceau de résultats que l'on peut appeler la théorie classique. Il faut donc, d'abord comprendre cette théorie, ensuite l'intégrer dans les nouveaux résultats.

La théorie classique étudie les systèmes perturbés par un petit paramètre $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

$$\dot{u} = \sigma H'_u(\varepsilon,u)$$

au voisinage d'une solution connue u_o du système non perturbé, de période T_o :

$$\dot{u}_o = \sigma H'_u(0,u_o) \qquad u_o(T_o) = u_o(0).$$

Elle se divise en deux grandes parties.

A) la trajectoire fermée u_o est isolée sur son niveau d'énergie $H(u_o) = h_o$. Dans ce cas, les petites perturbations donnent naissance à des solutions u_ε de période T_ε, et le problème consiste à en donner des développements asymptotiques en fonction de ε. Ceci est beaucoup moins trivial qu'il n'y paraît, à cause de l'apparition toujours possible des "termes séculaires". Le joyau de la théorie est la méthode de Lindstedt-Poincaré qui consiste à déterminer les coefficients d'ordre k de manière à éliminer les termes séculaires d'ordre k+1.

B) la trajectoire fermée u_o fait partie d'une famille à plusieurs paramètres de solutions T_o- périodiques sur le même niveau d'énergie. Dans ce cas, la plupart de ces trajectoires fermées disparaissent par petites perturbations, et il s'agit de déterminer celles qui subsisteront, donnant ainsi naissance à des trajectoires fermées du système perturbé. C'est un problème de bifurcation. Le joyau de la théorie est le théorème de Liapounov-Weinstein, qui dit que si la Hamiltonien H est de classe C^2, si $H(0) = 0$ et $H'(0) = 0$, si $H''(0)$ est défini positif, alors il y a au moins n trajectoires fermées distinctes sur chaque niveau d'énergie $H(u) = h > 0$ suffisamment petit. Voir [4] pour un premier pas vers une version globale (h quelconque).

Notre propos ici est d'indiquer comment ces résultats classiques peuvent être présentés de manière unifiée dans le cadre du principe variationnel dual. La clef ici est simple : appliquer le théorème des fonctions implicites, non pas à (I), où l'on rencontrera les mêmes ennuis liés à la linéarité en $\dot{u}$, mais à (J).

On trouvera un exposé complet de cette théorie dans la référence [5]. Certains de ces résultats ont été obtenus en collaboration avec J. Blot (voir [6]).

§ 2. EXECUTION

On travaille dans l'espace fonctionnel

$$E = \{w \in C^r(S^1;\mathbb{R}^{2n}) \mid \int_0^1 w(s)ds = 0\} \cdot$$

On remarquera que, comme on va utiliser le théorème des fonctions implicites et non pas des résultats de minimisation, ce n'est pas la peine de travailler dans des Banach réflexifs. L'espace $C^r(S^1;\mathbb{R}^{2n})$ est alors le plus adapté. La périodicité est cachée dans l'espace de base $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

On considère alors la fonctionnelle :

$$\Phi : \mathbb{R}\times \mathbb{R} \times E \to \mathbb{R}$$

définie par

$$\Phi(T,\varepsilon,w) = \int_0^1 [\tfrac{T}{2}(w,\sigma\,\Pi w) - G(\varepsilon,-\sigma w)]ds \; .$$

Ceci n'est qu'un maquillage de la fonctionnelle J du paragraphe précédent. La période a été normalisée à 1 en posant $t = Ts$, et la vraie période T apparaît alors comme un multiplicateur. La fonction $G(\varepsilon,v)$ est la transformée de Legendre (à ε fixé) de la fonction $u \mapsto H(\varepsilon,u)$, supposée convexe. La fonction w est le $\dot{u}$ du paragraphe précédent, et la condition $\int_\sigma^1 w(s)ds$ que l'on a imposée dans la définition de l'espace E se ramène simplement à $u(0) = u(T)$, c'est-à-dire l'exigence que u soit T-périodique. Π est l'opérateur "primitive" , ce qui laisse subsister une indétermination, que l'on lève en choisissant pour Πw la primitive de moyenne nulle :

$$\frac{d}{dt}(\Pi w) = w \quad \text{et} \quad \int_0^1 \Pi w(s)ds = 0 \cdot$$

Qu'on ne s'étonne pas de voir ainsi arbitrairement fixer la constante d'intégration : il est facile de voir que la fonctionnelle (J) ne change pas si on change $u(t)$ en $u(t)$+cste.

Donnons maintenant, pour la commodité du lecteur, la liste des dérivées successives de Φ :

$$\Phi'_T(T,\varepsilon,w) = \int_0^1 \frac{1}{2}(w,\ \sigma\Pi w)\,ds \in \mathbb{R}$$

$$\Phi'_\varepsilon(T,\varepsilon,w) = \int_0^1 -\ G'_\varepsilon(\varepsilon,-\sigma w)\,ds \in \mathbb{R}$$

$$\Phi'_w(T,\varepsilon,w)\bar{w} = \int_0^1 [T(\bar{w},\ \sigma\Pi w) - (\sigma G'_v(\varepsilon,-\sigma w),\bar{w})]\,ds$$

$$\Phi''_{Tw}(T,\varepsilon,w)\bar{w} = \int_0^1 (\bar{w},\ \sigma\Pi w)\,ds$$

$$\Phi''_{\varepsilon w}(T,\varepsilon,w)\bar{w} = \int_0^1 (-\ \sigma G''_{\varepsilon v}(\varepsilon,-\ \sigma w),\bar{w})\,ds$$

$$(\Phi''_{ww}(T,\varepsilon,w)\bar{w}_1,w_2) = \int_0^1 [T(\bar{w}_1,\ \sigma\Pi\bar{w}_2) + (\sigma G''_{vv}(\varepsilon,\ -\ \sigma w)\sigma\bar{w}_2,\bar{w}_1)]\,ds\ .$$

On donne maintenant une succession de lemmes dont aucun n'est difficile; le lecteur peut les démontrer par lui-même :

<u>Lemme 1</u> : $\Phi'_w(T,\varepsilon,w) = 0$ si et seulement si on peut trouver $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que $u(t) = T\Pi\, w(\frac{t}{T}) + \xi$ soit une solution T-périodique du problème ε-perturbé

$$\dot{u} = \sigma H'_u(\varepsilon,u).$$

La recherche des solutions périodiques du système considéré se ramène donc à la résolution de l'équation $\Phi'_w(T,\varepsilon,w) = 0$. On considèrera Φ'_w comme une application non linéaire de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times E$ dans E :

$$\Phi'_w(T,\varepsilon,w) = T\sigma\,\Pi\, w - \sigma P G'_v(\varepsilon,\ -\ \sigma w)$$

où P est la projection naturelle de C^r sur E :

$$(Pu)(s) = u(s) - \int_0^1 u(s)\,ds\ .$$

On désire alors appliquer le théorème des fonctions implicites à Φ'_w au voisinage d'une solution simple connue $(T_0,0,w_0)$ correspondant à la solution de référence u_0, de période T_0, du système non perturbé. Pour cela, il faut regarder la dérivée :

$$L(T_0,0,w_0) = (\ \Phi''_{Tw}\ ,\ \Phi''_{\varepsilon w},\ \Phi''_{ww}\ ).$$

On a d'abord un mouvement de joie :

<u>Lemme 2</u> : $L(T,\varepsilon,w)$ est Fredholm d'index 2 ,

vite réprimé :

<u>Lemme 3</u> : $L(T_o,0,w_o)$ ne peut pas être surjectif. Le vecteur $\dot{w}_o \in E$ est toujours orthogonal à l'image :

$$\int_o^1 (\Phi''_{Tw}T + \Phi''_{\varepsilon w}.\varepsilon + \Phi''_{ww}.w)ds = 0$$

quels que soient $(T,\varepsilon,w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E$.

Ceci ne fait que traduire l'invariance de la fonctionnelle par rapport à S^1 (le système est autonome; si $u(t)$ est une solution $u(t + t_o)$ en est une autre). Plus généralement, la présence d'autres intégrales premières se traduit par des dégénérescences supplémentaires.

On introduit alors un supplémentaire de l'image. Ce sera le sous-espace V de E défini par :

$$V = \left\{ v \in \operatorname{Ker} \Phi''_{uw}(T_o,0,w_o) \;\middle|\; \begin{array}{l} \int_o^1 (\sigma\Pi\, w_o, v)ds = 0 \quad \text{et} \\ \int_o^1 (\sigma G''_{\varepsilon w}(0,-\sigma w_o), v)ds = 0 \end{array} \right\}$$

Le théorème des fonctions implicites donne immédiatement :

<u>Théorème 4</u> : Il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de $(T_o,0,w_o)$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E$ tel que l'ensemble $S \cap \mathcal{U}$ donné par :

$$S = \{(T,\varepsilon,w) \mid \Phi'_w(T,\varepsilon,w) \in V\}$$

est une sous-variété C^∞ de dimension dim V + 2 .

C'est ce théorème dont je vais déduire la théorie classique des perturbations. Remarquons d'abord l'esprit de son énoncé : c'est une réduction à la Liapounov-Schmidt. L'ensemble S est de dimension finie, et contient certainement les solutions. Une analyse plus poussée montre que le problème se ramène en fait à (dim V - 1) équations à (dim V+1) inconnues au voisinage d'un point singulier.

Les méthodes classiques reposent sur la notion de valeur caractéristique. Rappelons que, si u_o est une solution T_o-périodique du système non perturbé $\dot{u} = \sigma H'_u(0,u)$, le système linéaire autour de u_o s'écrit

$$\dot{y} = \sigma H''_{uu}(0,u_o(t))y .$$

Les valeurs propres de l'application en une période $y(0) \mapsto y(T_o)$ sont les valeurs caractéristiques de la trajectoire u_o. Il y en a donc 2n (comptées avec leur multiplicité), et 1 est valeur caractéristique d'ordre m. Cet entier m est pair (parce que le système est hamiltonien), $\geqslant 1$ (parce que le système est autonome), donc $\geqslant 2$.

Le système linéarisé a ℓ solutions T_o-périodiques, avec $\ell \leqslant m$ (car une telle solution correspond a un vecteur propre associé à la valeur propre 1), et $\ell \leqslant 1$ (car $y = \dot{u}_o$ marche).

Le lien avec les méthodes fonctionnelles développées ci-dessous est assuré par :

<u>Lemme 5</u> : $\Phi''_{ww}(T_o,0,w_o) = 0$ si et seulement si on peut trouver $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que $y(t) = T_o \Pi w(\frac{t}{T_o}) + \xi$ est une solution T_o-périodique des équations linéarisées autour de T_o.

L'analyse de la situation dans l'espace $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E$ bifurque maintenant en deux cas, qui correspondent exactement aux deux cas de la théorie classique : dim V = 1 ou dim V > 1.

§ 3. <u>dim V = 1 : DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES</u>

Dans ce cas, il se trouve que l'équation $\Phi'_w \in V$ suffit à résoudre le problème; S est exactement l'ensemble des solutions de $\Phi'_\omega(T,\varepsilon,w) = 0$.

<u>Lemme 6</u> : Si dim V = 1 il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $(T_o,0,w_o)$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E$ à l'intérieur duquel

$$\Phi'_w(T,\varepsilon,w) = 0 \Longleftrightarrow \Phi'_w(T,\varepsilon,w) \in V .$$

Nous dirons que la trajectoire fermée u_o est <u>simple</u> si m = 2, c'est-à-dire si 1 a sa multiplicité minimale comme valeur caractéristique. Cela implique qu'elle est isolée sur son niveau d'énergie. Quelques cas exceptionnels mis à part, on a alors dim V = 1, et le théorème 4 joint au lemme 6 montrent alors que dans l'espace des (T,ε,w) les solutions de $\Phi'_w = 0$ forment une sous-variété à 3 dimensions. En d'autres termes, les solutions T-périodiques de $\dot{u} = \sigma H'_u(\varepsilon,u)$ voisines de $(T_o,0,u_o)$ forment dans l'espace des (T,ε,u) une famille à trois paramètres.

L'un de ceux-ci est la phase φ : si $u(t)$ est une solution, $u(t+\varphi)$ en est une autre. Il s'agit maintenant d'identifier les deux autres. Deux cas se présentent, chacun avec son interprétation physique :

a) $\ell = 1$. Physiquement, cela signifie que le système non perturbé $u = \sigma H'_u(0,u)$ est non linéaire. Les deux paramètres restant peuvent alors être identifiés à ε et à T. Les solutions T-périodiques de $\dot{u} = \sigma H'_u(\varepsilon,u)$ se présentent alors comme des fonctions indéfiniment différentiables de ε et de T. Ecrivant les séries de Taylor correspondantes, on obtient donc des développements asymptotiques du type :

$$\begin{cases} u(t) = \Sigma\, \varepsilon^p (T - T_o)^q \quad U_{p,q}(tT^{-1}) \\ U_{p,q}(s) = U_{p,q}(s+1) \quad \text{pour tout } s. \end{cases}$$

La périodicité des coefficients U_{pq} exprime l'absence de termes séculaires.

b) $\ell = 2$. Physiquement, cela signifie que le système perturbé $\dot{u} = \sigma H'_u(0,u)$ est linéaire, mais non-résonant. Les deux paramètres restants peuvent alors être identifiés à ε et à h, le niveau d'énergie : on ne peut plus prendre la période T comme variable indépendante. Ecrivant les séries de Taylor des fonctions C^∞ obtenues par le théorème des fonctions implicites, on obtient les développements asymptotiques de Lindstedt-Poincaré :

$$\begin{cases} T = \Sigma\, \varepsilon^p (h - h_o)^q\, \theta_{pq} \\ u(t) = \Sigma\, \varepsilon^p (h - h_o)^q\, U_{pq}(tT^{-1}) \\ U_{pq}(s) = U_{pq}(s+1) \quad \text{pour tout } s. \end{cases}$$

Bien entendu, ces développements doivent être compris modulo la phase. On a ainsi démontré l'existence et la validité de ces développements asymptotiques, généralement dévergents, et expliqué l'absence de termes séculaires.

§ 4. dim V > 1 : BIFURCATIONS

Ce cas se présente lorsque la solution de référence u_o fait partie d'une famille à $d > 1$ paramètres de solutions T_o-périodiques du problème non perturbé $\dot{u} = \sigma H'_u(0,u)$. On en déduit une sous-variété S' de dimension d de solutions $(T_o,0,w)$ de $\Phi'_w(T,\varepsilon,w) = 0$: ce sont les solutions triviales.

Par ailleurs, le théorème 4 nous donne une sous-variété S de dimension (dim V + 2) qui contient certainement toutes les solutions de $\Phi'_w(T,\varepsilon,w) = 0$. Donc $S' \subset S$. Si (dim V + 2) = d, on aura S' = S, ce qui signifie qu'il n'y aura pas d'autres solutions au voisinage de $(T_o,0,u_o)$ que les solutions triviales. En particulier, pour $\varepsilon \neq 0$, le système $\dot{u} = \sigma H'_u(\varepsilon,u)$ n'aura pas de solution périodique voisine de (T_o,u_o).

Cette idée conduit au théorème suivant :

Théorème 7 : On suppose que u_o fait partie d'une famille à ℓ paramètres de solutions périodiques de $\dot{u} = \sigma H'_u(0,u)$ (on compte la phase parmi les paramètres, et on ne suppose plus que ces solutions aient toutes la même période). Appelons Y l'espace des solutions du problème linéarisé

$$\dot{y} = \sigma H''_{uu}(0,u_o(t))y \quad , \quad y(0) = y(T_o) \cdot$$

On suppose que :

(a) $Y_o = \{y \in Y \mid \int_o^{T_o} (\sigma \dot{u}_o, y)dt = 0\}$ est de dimension $\ell - 1$,

(b) la forme linéaire $y \longmapsto \int_o^{T_o} (H''_{\varepsilon u}(0,u_o), y)dt$ n'est pas identiquement nulle sur Y_o.

Alors il existe un $\alpha > 0$, un voisinage tubulaire $\mathcal{C}$ de u_o dans $\mathbb{R}^{2n}$ et un $\beta > 0$ tels que, pour $|\varepsilon| < \alpha$, $|T - T_o| < \beta$ et $\varepsilon \neq 0$, le problème

$$\dot{u} = \sigma H'_u(\varepsilon,u), \; u(0) = u(T)$$

n'a pas de solution dans $\mathcal{C}$.

La condition (a) est automatiquement satisfaite dans chacun des deux cas suivants :

(i) le système $\dot{u} = \sigma H'_u(0,u)$ est linéaire

(ii) le système $\dot{u} = \sigma H'_u(0,u)$ est complètement intégrable.

Ce sont les seuls cas pratiques! Dans chacun de ces deux cas, le théorème 7 donne une condition nécessaire de bifurcation, à savoir que

$$\forall\, y \in Y_o \quad , \quad \int_o^T (H''_{\varepsilon u}(0,u_o), y)dt = 0 \quad .$$

Cette condition isole en général dans la famille à n paramètres une sous-famille à deux dimensions (dont une pour la phase) de candidats possibles à la bifurcation. Malheureusement, cette condition n'est pas suffisante, sauf si certaines conditions de transversalité sont réunies.

Si donc on veut affirmer en toute généralité l'existence de bifurcations, si par exemple on veut démontrer le théorème de Liapounov-Weinstein, il faut raffiner un peu la méthode. C'est possible, mais nous ne le ferons pas ici, nous contentant de renvoyer à [5] pour une démonstration complète.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. RABINOWITZ : Exposé au Congrès International des Mathématiciens, Helsinki, 1978.

[2] I. EKELAND : Oscillations forcées de systèmes hamiltoniens non linéaires. Séminaire Goulaouic-Schwartz, 5 Février 1980, exposé XIV.

[3] I. EKELAND : Non-convex duality in the calculus of variations. SIAM Journal of Opt. and Control, 1977.

[4] I. EKELAND et J. M. LASRY : On the number of periodic trajectories for a Hamiltonian flow on a convex energy surface. Annals of Math., 1980.

[5] I. EKELAND : A perturbation theory near convex hamiltonian systems. Preprint, 1981, Ceremade et UBC.

[6] J. BLOT : Thèse 3ème cycle, 1981, Université Paris-Dauphine, Ceremade.

***