Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

Y. Meyer

Nouvelles estimations pour les solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1981-1982), exp. n° 6, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1981-1982____A5_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z   1 9 8 1 - 1 9 8 2

NOUVELLES ESTIMATIONS POUR LES SOLUTIONS D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES NON LINEAIRES

par Y. MEYER

Exposé n° VI

10 Novembre 1981

L'introduction des espaces de Besov permet de donner les estimations optimales dans le calcul paradifférentiel de J. M. Bony [1].

1. ESPACES DE BESOV $\Lambda^s_{p,q}$.

Soient $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $1 \leqslant q \leqslant +\infty$ et $s \in]0,1[$. On définit l'espace de Besov $\Lambda^s_{p,q}$ comme suit

Définition 1 : Une fonction (ou une classe de fonctions) f appartient à $\Lambda^s_{p,q}$ si et seulement si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et si

$$\omega(h) = \| f(x+h) - f(x) \|_{L^p(dx)} ,$$

module de continuité de f en norme L^p, satisfait

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\omega^q(h)}{|h|^{n+qs}} dh < + \infty . \tag{1}$$

Remarques : Il vaut mieux écrire que $\frac{\omega(h)}{|h|^s} \in L^q(\mathbb{R}^n, \frac{dh}{|h|^n})$ car cette formulation convient aussi quand $q = +\infty$ et montre le rôle joué par la mesure $\frac{dh}{|h|^n}$ invariante par rotations et homothéties. On voit d'ailleurs que cette condition est locale (c'est-à-dire que dans (1) le problème de la convergence n'existe pas à l'infini puisque $\omega(h) \leqslant 2\|f\|_p$). Si $p = q = +\infty$, alors $\Lambda^s_{p,q}$ est l'espace C^s des fonctions höldériennes d'exposant s et si $p = q = 2$, $\Lambda^s_{p,q} = H^s$ espace de Sobolev caractérisé par $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et

$$\iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dx\, dy < +\infty .$$

Si $s = 1$, on remplace le module de continuité $\omega(h)$ par $\underline{\omega}(h) = \| f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)\|_p$ sans modifier (1). C'est à dire que $f \in \Lambda^1_{p,q}$ signifie $f \in L^p$ et $\frac{\underline{\omega}(h)}{|h|} \in L^p(\mathbb{R}^n, \frac{dh}{|h|^n})$.

Enfin si $s > 1$, on écrit $s = m+r$ où $m \in \mathbb{N}$ et $0 < r \leqslant 1$. Alors $f \in \Lambda^s_{p,q}$ signifie que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leqslant m$, $\partial^\alpha f \in \Lambda^r_{p,q}$.

Remarques : L'espace $\Lambda^1_{\infty,+\infty}$ n'est pas l'espace des fonctions lipschitziennes ordinaires mais c'est la célèbre "classe de Zygmund" qui fut à l'origine de la définition des $\Lambda^1_{p,q}$.

En revanche l'espace $\Lambda^1_{2,2}$ est l'espace de Sobolev H^1 usuel. Enfin si $p \neq 2$ les espaces de Besov $\Lambda^s_{p,q}$ ne coïncident, pour aucune valeur de q, avec les espaces de Sobolev "généralisés" $W^p_s = (I - \Delta)^{-s/2}L^p$ $(1 < p < +\infty)$.

2. CARACTERISATIONS DES ESPACES DE BESOV PAR L'INTERPOLATION REELLE

Théorème 1 : Soient p, q et s trois nombres réels tels que $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $1 \leqslant q \leqslant +\infty$ et $s > 0$. On appelle m un entier vérifiant $m > s$. Alors, pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ les deux propriétés suivantes sont équivalentes

(2) $$f \in \Lambda^s_{p,q}$$

(3) il existe une suite $\varepsilon_k \in \ell^q$ et une suite $f_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que, pour tout $k \geqslant 0$,

$$\| f - f_k \|_p \leqslant \varepsilon_k 2^{-ks}$$

et $\| \partial^\alpha f_k \|_p \leqslant \varepsilon_k 2^{k|\alpha|}\ 2^{-ks}$ lorsque $|\alpha| = m$.

Remarques : On peut introduire l'espace de Sobolev W^p_m des fonctions $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ dont toutes les dérivées, jusqu'à l'ordre m, appartiennent à $L^p(\mathbb{R}^n)$, muni de sa norme canonique; ici $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Alors les propriétés des f_k sont $\| f - f_k \|_p \leqslant \varepsilon_k 2^{-ks}$ et $\| f_k \|_{W^p_m} \leqslant \varepsilon_k 2^{k(m-s)}$. De sorte que $\Lambda^s_{p,q}$ apparaît comme l'interpolé réel :

(4) $$\Lambda^s_{p,q} = (L^p(\mathbb{R}^n)\ ,\ W^p_m(\mathbb{R}^n))_{\theta,q}$$

où $s = \theta m$.

Naturellement on peut paraphraser le théorème 1 en introduisant $\Delta_k f = f_{k+1} - f_k$. Alors f se présente sous la forme de la somme téléscopique $f = f_o + \sum_o^\infty \Delta_k(f)$ dans laquelle $\| \partial^\alpha \Delta_k(f) \|_p \leqslant \bar{\varepsilon}_k 2^{k|\alpha|} 2^{-ks}$ et $\bar{\varepsilon}_k \in \ell^q$ pour

$0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$.

Une telle décomposition de f s'appelle "décomposition de Littlewood-Paley généralisée". La raison de cette terminologie est la suivante.

On désigne par $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction radiale, $\geqslant 0$, égale à 1 si $|\xi| \leqslant 1/2$ et à 0 si $|\xi| \geqslant 1$. On pose alors $\psi_k(\xi) = \varphi(\frac{\xi}{2^{k+1}}) - \varphi(\frac{\xi}{2^k})$, $k \in \mathbb{N}$, ce qui permet d'introduire les deux opérateurs $S_k : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ et $\Delta_k : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ définis par

$$(S_k f)^\wedge(\xi) = \varphi(\frac{\xi}{2^k})\hat{f}(\xi)$$

et

$$(\Delta_k f)^\wedge(\xi) = \psi_k(\xi)\hat{f}(\xi).$$

On a alors

$$f = S_0(f) + \sum_0^\infty \Delta_k(f) \quad . \tag{5}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que $f \in \Lambda^s_{p,q}$ est alors que $\|\Delta_k(f)\|_p \leqslant \varepsilon_k 2^{-ks}$ où $\varepsilon_k \in \ell^q$ et $S_0(f) \in L^p$.

3. LES ESPACES DE BESOV ET LE THEOREME DE LINEARISATION DE J. M. BONY

Rappelons la définition du paraproduit $\pi : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Si u et v sont deux distributions tempérées, on définit $w = \pi(u,v)$ par

$$w = \sum_2^\infty S_{k-2}(u)\ \Delta_k(v).$$

On montre sans difficulté que, si $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, l'opérateur linéaire qui à v associe $\pi(u,v)$ est borné sur tous les espaces H^s, $s \in \mathbb{R}$, $\Lambda^s_{p,q}$ etc...

Théorème 2 : Soient $n \geqslant 1$ un entier, $s > \frac{n}{2}$ un nombre réel et $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction appartenant à $H^s(\mathbb{R}^n)$. Alors pour toute fonction $F \in C^\infty(\mathbb{R})$, nulle en 0, on a

$$F(u) = \pi(F'(u),u) + w \tag{6}$$

où $w \in \Lambda^{2s}_{1,1} \subset \Lambda^{2s-n/2}_{2,1} \subset H^{2s-n/2}$.

Remarques : Si F n'est pas nulle en O, si, par exemple, F est une constante, (6) n'a pas lieu globalement car les constantes n'appartiennent pas à $\Lambda^{2s}_{1,1}$. Dans ce cas (6) devient un énoncé local : w appartient localement à $\Lambda^{2s}_{1,1}$.

La démonstration qui suit est due à R. R. Coifman. On pose, pour alléger les notations, $u_k = S_k(u)$ et $v_k = \Delta_k(u) = u_{k+1} - u_k$.

Alors $F(u) = F(u_o) + (F(u_1) - F(u_o)) + \ldots + (F(u_{k+1}) - F(u_k)) + \ldots$ et $F(u_{k+1}) - F(u_k) = m_k v_k$ où

$$m_k(x) = \int_0^1 F'(u_k + tv_k)dt = S_k(F'(u)) + r_k = S_{k-2}(F'(u)) + r_k + \rho_k .$$

Nous nous proposons de montrer l'existence d'une suite $\varepsilon_k \in \ell^2$ telle que l'on ait, si $0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$ $(m > s/2)$

$$\| \partial^\alpha r_k \|_2 \leqslant \varepsilon_k 2^{k|\alpha|} 2^{-ks} \tag{7}$$

et

$$\| \partial^\alpha \rho_k \|_2 \leqslant \varepsilon_k 2^{k|\alpha|} 2^{-ks} \tag{8}$$

En appliquant le théorème 1 aux séries $\sum_0^\infty r_k v_k$ et $\sum_0^\infty \rho_k v_k$ on obtiendra le théorème 2 .

Pour démontrer (7) et (8) nous suivons la méthode présentée dans [3] . Pour alléger les notations, écrivons $F'(t) = F'(0) + G(t)$ où $G \in C^\infty(\mathbb{R})$ est nulle en 0. Posons, pour $t \in [0,1]$, $p_k = G(u_k + tv_k)$ et $q_k = S_k(G(u))$. Notre propos est donc d'examiner en quel sens l'opérateur linéaire S_k commute avec l'opérateur non linéaire : $u \to G(u)$ de H^s dans lui-même.

Proposition 1 : Soient $G \in C^\infty(\mathbb{R})$ une fonction nulle en 0 et $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ une fonction à valeur réelle où $s > n/2$. Il existe alors, si $m \in \mathbb{N}$ et $m > s$, une suite $\varepsilon_k \in \ell^2(\mathbb{N})$ telle que, si $0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$, on ait

$$\| \partial^\alpha \{ S_k(G(u)) - G(S_k(u)) \} \|_2 \leqslant \varepsilon_k 2^{k|\alpha|} 2^{-ks} \tag{9}$$

Pour démontrer la proposition 1, on commence par examiner le cas $\alpha = 0$. On observe alors que, puisque $G \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\| G(S_k(u)) - G(u) \|_2 \leqslant C \| S_k(u) - u \|_2 \leqslant \varepsilon_k 2^{-ks}$ et que, de même, $G(u) \in H^s$ car $G(0) = 0$ et donc

$$\| S_k(G(u)) - G(u)\|_2 \leqslant \varepsilon_k 2^{-ks} .$$

Si maintenant $|\alpha| = m$, nous allons vérifier (9) en démontrant l'inégalité correspondante pour $\| \partial^\alpha (S_k(G(u))\|_2$ et $\| \partial^\alpha G(S_k(u))\|_2$. Là encore la première vérification est évidente puisque $G(u) \in H^s$. En ce qui concerne la seconde, on a (en posant $u_k = S_k(u)$)

$$\partial^\alpha G(u_k) = \sum_{q \geqslant 1} \ \overline{\sum_{\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_q}} D^q G(u_k)\, \partial^{\alpha_1} u_k \ldots \partial^{\alpha_q} u_k$$

où la somme est étendue à tous les entiers $q \geqslant 1$ et à toutes les décompositions, dans $\mathbb{N}^n$, de α en une somme $\alpha_1 + \ldots + \alpha_q$ $(\alpha_j \in \mathbb{N}^n)$; observons que $|\alpha| = |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_q|$ et que seuls sont écrits les $\alpha_j \neq 0$ de sorte que $1 \leqslant q \leqslant |\alpha|$.

Cette formule (lorsqu'on explicite les coefficients qui interviennent grâce aux répétitions) s'appelle formule de Faa-di Bruno.

Finalement on est ramené à majorer la norme L^2 d'un monôme $D^q G(u_k)\, \partial^{\alpha_1} u_k \ldots \partial^{\alpha_q} u_k$. On pose alors $\frac{2}{p_j} = \frac{|\alpha_j|}{m}$ et l'on a

$$(10) \qquad \| D^q G(u_k) \partial^{\alpha_1} u_k \ldots \partial^{\alpha_q} u_k\|_2 \leqslant \| D^q G\|_\infty \ \| \partial^{\alpha_1} u_1\|_{p_1} \ldots \| \partial^{\alpha_q} u_k\|_{p_q} .$$

On utilise alors l'inégalité suivante

$$(11) \qquad \| \partial^{\alpha_j} u_k\|_{p_j} \leqslant \varepsilon_k 2^{kt_j} \quad \text{où} \quad t_j = |\alpha_j|(1 - \frac{s}{m})$$

La preuve de (11) n'est pas triviale et nous la renvoyons à la fin de la démonstration.

Les inégalités (11) impliquent (par l'inégalité de Hölder)(10) si $|\alpha| = m$.

Le cas où $1 \leqslant |\alpha| \leqslant m-1$ s'obtient par interpolation (ou bien en utilisant les inégalités évidentes portant sur les normes L^2 des dérivées successives d'une fonction). Le théorème 2 est alors démontré.

Revenons à (11). On doit distinguer trois cas : $|\alpha_j| + n(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_j}) > s$; $|\alpha_j| + n(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_j}) = s$ et $|\alpha_j| + n(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_j}) < s$.

Dans le premier cas, on écrit $u_k = u_o + v_o + \ldots + v_{k-1}$ et l'on utilise l'inégalité triangulaire pour majorer la norme L^{p_j} de $\partial^\alpha u_k$. De plus l'inégalité classique de S. Bernstein donne

$$\| \partial^{\alpha_j} v_k \|_p \leqslant C\, 2^{k|\alpha_j|} \| v_k \|_p \quad .$$

Dans les premier cas, on utilise finalement le lemme évident suivant :

<u>Lemme</u> : <u>Si</u> $\varepsilon_k \in \ell^2(\mathbb{N})$, <u>il en est de même pour</u> $\eta_k = \sum_o^k \varepsilon_j\, r^{k-j}$ <u>lorsque</u> $0 \leqslant r < 1$.

Les calculs sont alors immédiats et l'on doit, à la fin, observer que $|\alpha_j| - s + n(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_j}) \leqslant |\alpha_j| - \frac{s}{m} |\alpha_j|$ parce que $s > \frac{n}{2}$.

Dans le second cas, on obtient $\| \partial^{\alpha_j} u_k \|_{p_j} = O(\log(1+k))$ ce qui rend (11) évident et dans le dernier on a une estimation en $O(1)$.

<u>Théorème 3</u> : <u>Soient</u> $n \geqslant 1$ <u>et</u> $N \geqslant 1$ <u>deux entiers</u>, $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N)$, $F = F(x,u_1,\ldots,u_N)$; <u>supposons</u> $f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ldots, f_N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ <u>appartiennent à</u> H^s <u>où</u> $s > \frac{n}{2}$. <u>Alors on a</u>

$$(12) \qquad F(x,f_1(x),\ldots,f_N(x)) = \sum_1^N \pi\left(\frac{\partial F}{\partial u_j}(x,f_1(x),\ldots,f_N(x)), f_j \right) + G(x)$$

<u>où</u> $G \in \Lambda^{2s}_{1,1}$ <u>localement</u>.

La preuve de ce résultat est semblable à celle du théorème 2 et laissée au lecteur : on écrit la fonction composée comme une série télescopique

$$\sum_{k \geqslant 0} \{ F(x,S_{k+1}(f_1),\ldots,S_{k+1}(f_N)) - F(x,S_k(f_1),\ldots,S_k(f_N)) \}$$

et l'on utilise encore la formule de Taylor avec reste intégral.

4. LES OPERATEURS PARA-DIFFERENTIELS ADAPTES A LA LINEARISATION PRECEDENTE

Supposons toujours $s > \frac{n}{2}$ et posons $s = \frac{n}{2} + r$. Désignons par $B_r \subset C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des symboles $\sigma(x,\xi)$ tels que

(13) $$(1 + |\xi|)^{|\alpha|} \| \partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)\|_{H^s(dx)} \leqslant C_\alpha \ , \quad \alpha \in \mathbb{N}^n$$

(14) pour tout ξ fixé, le spectre de $x \mapsto \sigma(x,\xi)$ soit contenu dans la boule $|\eta| \leqslant \frac{1}{10}|\xi|$ si $|\eta| \geqslant 1$ et $\sigma(x,\xi) = 0$ si $|\xi| \leqslant 1$.

Cet ensemble de symboles sert à traiter les termes principaux. Pour traiter les termes d'erreur, nous utiliserons une autre famille de symboles.

Pour tout $r > 0$, désignons par $\Gamma^{-r} \subset C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions vérifiant

(15) $$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \rho(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta} \ (1 + |\xi|)^{|\beta| - |\alpha|}$$

et, plus précisément

(16) $$\int_{|\xi| \geqslant 1} (1 + |\xi|)^{2|\alpha| - 2|\beta|} |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \rho(x,\xi)|^2 \frac{d\xi}{|\xi|^n} < +\infty \ .$$

Avec ces notations on a

<u>Théorème 4</u> : <u>Soient</u> $\tau \in S^o_{1,1}$ <u>et</u> $\sigma \in B_r$. <u>Alors</u>

$$\tau(x,D) \circ \sigma(x,D) = \sum_{|\alpha| \leqslant r} \left(\frac{1}{i}\right)^{|\alpha|} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha \tau \, \partial_x^\alpha \sigma + \rho(x,D)$$

<u>où</u> $\rho(x,\xi) \in \Gamma^{-r}$.

<u>Théorème 5</u> (E. Stein) : <u>Si</u> $\rho(x,\xi) \in \Gamma^{-r}$ <u>et</u> $t > -r$, <u>alors</u> $\rho(x,D) : H^t(\mathbb{R}^n) \to \Lambda^{t+r}_{1,1}(\mathbb{R}^n)$ est continu.

La preuve du théorème 4 est, en fait, une simple vérification puisque nous disposons d'une formule explicite pour $\rho(x,\xi)$ à savoir

$$\rho(x,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \{\tau(x, \xi + \eta) - \sum_{|\alpha| \leqslant r} \frac{\eta^\alpha}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha \tau(x,\xi)\} \, e^{i\eta\cdot x} \hat{\sigma}(\eta,\xi) d\eta \ .$$

Nous allons vérifier, dans un premier temps que, si $2^k \leqslant |\xi| \leqslant 2^{k+1}$, $|\rho(x,\xi)| \leqslant \varepsilon_k 2^{-kr}$ où $\varepsilon_k \in \ell^2$. Les inégalités portant sur $|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \rho(x,\xi)|$

s'obtiendront de façon analogue. On désigne par $\varphi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\psi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ des fonctions réelles, radiales, positives ou nulles et telles que

$$1 = \varphi^2(\eta) + \sum_{j \geqslant o} \psi^2(2^{-j}\eta)$$

et que le support de ψ soit contenu dans $\frac{1}{3} \leqslant |\eta| \leqslant 1$. En introduisant cette décomposition de l'identité sous l'intégrale en $d\eta$ définissant $\rho(x,\xi)$, il vient $\rho(x,\xi) = a(x,\xi) + \sum_{j \geqslant o} \rho_j(x,\xi)$. De façon plus détaillée, on pose

$$p_j(x,\eta,\xi) = \psi(2^{-j}\eta)\hat{\sigma}(\eta,\xi)e^{i\eta.x}$$

(et l'on a $p_j = 0$ si $2^j \geqslant \frac{3}{10}|\xi|$ car $\hat{\sigma}(\eta,\xi) = 0$ si $|\eta| \geqslant \frac{1}{10}|\xi|$) et $q_j(x,\eta,\xi) = \{\tau(x,\xi+\eta) - \sum_{|\alpha| \leqslant r} \frac{1}{\alpha!}\eta^\alpha \partial_\xi^\alpha \tau(x,\xi)\}\ \psi(2^{-j}\eta)$ et l'on a, si

$$2^k \leqslant |\xi| \leqslant 2^{k+1} \quad \text{et} \quad 2^j < \frac{3}{10}|\xi|,$$

$$\| q_j(x,\eta,\xi)\|_{L^2(d\eta)} \leqslant C\left(\frac{2^j}{2^k}\right)^{r+1} 2^{\frac{n}{2}j} .$$

De plus $\rho_j(x,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} p_j(x,\eta,\xi)q_j(x,\eta,\xi)d\eta$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit $|\rho_j(x,\xi)| \leqslant C\left(\frac{2^j}{2^k}\right)^{r+1} 2^{jn/2}\|p_j\|_{L^2(d\eta)}$. On majore cette dernière expression, grâce au fait que $x \longmapsto \sigma(x,\xi)$ appartienne à $H^s(dx)$, en $O(\varepsilon_j 2^{-js})$. Puisque $s = \frac{n}{2} + r$, on obtient $|\rho_j(x,\xi)| \leqslant C2^{-k(r+1)}2^j\varepsilon_j$ et l'on obtiendrait de même

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \rho_j(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta}\, 2^{j+j|\beta|}\, 2^{-k(r+1+\alpha)}\,\varepsilon_j .$$

Il ne reste plus qu'à additionner ces estimations en remarquant que $\rho_j = 0$ si $j \geqslant k$ et à se servir du lemme.

Le terme $a(x,\xi)$ est trivial (comme d'habitude).

La preuve du théorème 5 est une adaptation des méthodes de [5] Chap. II. On se ramène aux symboles réduits de la forme $\sigma(x,\xi) = \sum_o^\infty a_k(x)\ b(2^{-k}\xi)$ où $b \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ est nulle au voisinage de 0 et où $\|\partial_x^\alpha a_k(x)\|_\infty \leqslant 2^{-kr}\varepsilon_k 2^{k|\alpha|}$, $\varepsilon_k \in \ell^2(\mathbb{N})$

$0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$, m assez grand. Alors on utilise le théorème 1.

5. REGULARITE DES SOLUTIONS DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES NON LINEAIRES

Soient $n \geqslant 1$ et $N \geqslant 1$ deux entiers, $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ une fonction indéfiniment dérivable et considérons l'équation aux dérivées partielles non linéaires

$$(17) \qquad F(x;u(x),\ldots,\partial^\alpha u(x),\ldots) = 0 \quad \text{où} \quad |\alpha| \leqslant m$$

(et m est effectivement une longueur d'un des multi-indices figurant dans (17)) et où $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est la fonction inconnue.

Posons alors $p_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial F}{\partial u}(x;u(x),\ldots,\partial^\alpha u(x),\ldots)(i\xi)^\alpha$.

Nous dirons que $(x_o,\xi_o) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est non caractéristique pour la fonction u si $p_m(x_o,\xi_o) \neq 0$. Nous avons implicitement établi une bijection entre $\{1,\ldots,N\}$ et les $\alpha \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $|\alpha| \leqslant m$ de sorte que nous utilisons, par abus de langage, la notation u_α pour désigner la "α-ième" coordonnée d'un point de $\mathbb{R}^N$.

<u>Théorème 6</u> : <u>Soient</u> $s > \frac{n}{2} + m$ <u>et</u> $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ <u>une solution de</u> (17). <u>Alors en tout point</u> (x_o,ξ_o) <u>non caractéristique relativement à</u> u, u <u>est microlocalement dans</u> $\Lambda^{2s-m}_{1,1} \subset \Lambda^{2s-m-n/2}_{2,1} \subset H^{2s-m-n/2}$.

Le théorème 6 s'éclaire en posant $s = \frac{n}{2} + m + r$, $r > 0$, et en remarquant que le gain de régularité est r (et même légèrement mieux au sens que l'espace de Sobolev est remplacé par un espace de Besov plus petit).

La preuve du théorème 6 suit exactement l'algorithme donné par J. M. Bony dans [1] et en y injectant les estimations améliorées que nous avons obtenues.

On applique d'abord le théorème 3 à (17). Il vient, si $s_o = s-m$,

$$(18) \qquad \sum_1^N \pi\left(\frac{\partial F}{\partial u_\alpha}(x;u(x),\ldots),\ \partial^\alpha u\right) = -g \in \Lambda^{2s_o}_{1,1}$$

Ensuite on pose $f = (I - \Delta)^{m/2} u \in H^{s_o}$ et l'on appelle $\mathcal{L}$ l'opérateur para-différentiel défini par

$$(19) \qquad \mathcal{L}(f) = \sum_1^N \pi(C_\alpha(x),\ \partial^\alpha (I-\Delta)^{-m/2} f)$$

où $C_\alpha(x) = \frac{\partial F}{\partial u_\alpha}(x;u(x),\ldots, \partial^\alpha u(x),\ldots)$.

Alors le symbole de $\mathcal{L}(f)$ est

$$\sigma(x,\xi) = \sum_1^N (k_\xi * C_\alpha)(x)\frac{(i\xi)^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{m/2}} \tag{20}$$

où k_ξ est l'approximation de l'identité utilisée pour définir le paraproduit ($k_\xi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\|k_\xi\|_1 \leq C$ et k_ξ tend vaguement vers la masse de Dirac en 0 quand $|\xi| \to +\infty$).

Ce symbole a la propriété remarquable que

$$\lim_{|\xi|\to+\infty} \{\sigma(x,\xi) - \frac{p_m(x,\xi)}{|\xi|^m}\} = 0 \tag{21}$$

Il en résulte que si $p_m(x_0,\xi_0) \neq 0$, on a, pour $r \geqslant r_0$ $|\sigma(x_0,r\xi_0)| \geqslant \delta > 0$.

On peut donc utiliser le théorème 4 pour inverser $\mathcal{L}$.

Il existe donc $\mathcal{M} \in Op\, S^0_{1,1}$ tel que

$$\mathcal{M} \circ \mathcal{L} = P + R \tag{22}$$

où P est l'opérateur (de symbole classique, homogène de degré 0 en ξ) de microlocalisation et où $R \in Op\,\Gamma^{-r}$. Alors (18) s'écrit $\mathcal{L}(f) = -g \in \Lambda^{2s_0}_{1,1}$ et (22) entraîne $Pf + Rf = -\mathcal{M}g \in \Lambda^{2s_0}_{1,1}$ (utiliser le théorème de Stein). On a $Rf \in \Lambda^{2s_0}_{1,1}$ et finalement $Pf \in \Lambda^{2s_0}_{1,1}$ ce qui entraîne $Pu \in \Lambda^{2s_0+m}_{1,1}$ puisque $u = (I-\Delta)^{-m/2} f$.

6. OPERATEURS APPARENTES AU PARAPRODUIT

Considérons le disque ouvert $D = \{|z| < 1\}$ et l'anneau $\mathcal{O}$ des fonctions f(z) holomorphes dans D . Le premier opérateur de paramultiplication qui a vu le jour a été inventé par A. Calderón en 1965 [4] et est un opérateur bilinéaire $\pi : \mathcal{O} \times \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ défini par $\pi(f,g) = h$ lorsque $h'(z) = f(z)g'(z)$ pour tout $z \in D$ avec $h(0) = 0$. Les espaces fonctionnels utilisés sont les espaces de Hardy du disque $H^p(D)$, $p > 0$: $f \in H^p(D)$ signifie $f \in \mathcal{O}$ et

$$\sup_{0\leqslant r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < +\infty .$$

A. Calderón démontre que si $0 < p \leqslant +\infty$ et $0 < q < +\infty$ et $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, alors $\|h\|_r \leqslant C(p,q)\|f\|_p \|g\|_q$ (on a noté $\|h\|_r$ la "norme" de h dans H^r qui est un espace de Banach si $r \geqslant 1$ et un espace métrique $0 < r < 1$.

De plus, dans ce cadre, le théorème 3 a la formulation très simple suivante . Si $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une fonction entière alors, pour toute fonction holomorphe $f : D \to \mathbb{C}$, la fonction composée $F(f)$ est égale au paraproduit entre $F'(f)$ et f (à condition d'oublier la constante $F(f(0))$).

En effet si $h(z) = F(f(z))$, on a $h'(z) = F'(f)f'$. La formule approchée de Bony est ici une formule exacte. Une autre généralisation du paraproduit est la notion d'intégrale stochastique que nous présenterons seulement dans le cas discret. La formule de Bony devient alors la célèbre formule d'Ito.

Soient $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace de probabilité et $\mathcal{A}_k$ une suite croissante de tribus de Ω telle que $\mathcal{A}_0 = \{\emptyset,\Omega\}$ soit la tribu triviale et que $\mathcal{A}$ soit engendrée par la réunion des $\mathcal{A}_k$. Une martingale est une suite $f_k \in L^1(\Omega)$ de fonctions $\mathcal{A}_k$-mesurables reliées entre elles par la relation de compatibilité :
$f_k = \mathbb{E}[f_{k+1}|\mathcal{A}_k]$ (f_k est l'espérance conditionnelle de f_{k+1} par rapport à $\mathcal{A}_k$).
On écrit, le plus souvent, $d_{k+1} = f_{k+1} - f_k$ et la condition est alors que la moyenne de d_{k+1} par rapport à l'ensemble de "toutes les connaissances que l'on possède à l'instant k" est nulle.

Si $\|f_k\|_2 \leqslant C$, alors $f_k \xrightarrow[p.s]{L^2} f \in L^2(\Omega,\mathcal{A}, P)$ et $f_k = \mathbb{E}(f\,|\mathcal{A}_k)$.

Dans ce cadre l'opération de paraproduit est particulièrement simple et consiste à associer au couple $(f,g) \in L^\infty(\Omega) \times L^2(\Omega)$ la fonction h définie, à l'aide des notations ci-dessus, par $h = \sum_0^\infty f_k\, d_{k+1}(g)$; $f_k = \mathbb{E}[f|\mathcal{A}_k]$, $g_k = \mathbb{E}[g|\mathcal{A}_k]$ et $d_{k+1}(g) = g_{k+1} - g_k$. On observera que la série définissant h est encore une martingale de carré intégrable.

7. <u>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES ET HISTORIQUES</u>

Les <u>espaces de Besov</u> ont été introduits par Besov "On embedding and extension theorems for some function classes" Trudy Mat. Inst. Steklov 60 (1960) 42-81 Indépendamment Arne Beurling redécouvrait l'espace de Besov $\Lambda^{1/2}_{2,1}(\mathbb{R})$ comme l'algèbre des transformées de Fourier des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, mesurables et telles qu'il existe un poids $\omega : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$, pair, décroissant sur $[0,+\infty[$, tel que $\omega(0) = \lim_{x \downarrow 0} \omega(x) < +\infty$ et que $(\omega(0) + \int_{\mathbb{R}} w(x)dx)(\int_{\mathbb{R}} |f|^2 dx/w(x)) < +\infty$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique alors $f \in L^1(\mathbb{R})$. Les espaces de Besov $\Lambda^{n/p}_{p,1}(\mathbb{R}^n)$,

$1 \leqslant p \leqslant +\infty$, sont en fait des algèbres, généralisant l'algèbre de Beurling et, plus généralement si $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $1 \leqslant q \leqslant +\infty$ et $s > n/p$, alors $\Lambda^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est une algèbre.

(Ref. A. Beurling, COnstruction and analysis of some convolution algebras, Ann. Inst. Fourier XIV fasc.2 (1964)).

En ce qui concerne les applications aux problèmes non-linéaires, la référence principale est

[1] J. M. Bony : Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. Ann. Scient. E.N.S. 4ème série, 14, 1981 (209-246)

et le lecteur pourra également consulter

[2] Y. Meyer : Régularité des solutions des équations aux dérivées partielles non linéaires (Séminaire Bourbaki 1979/1980 n° 560) et

[3] Y. Meyer : Remarques sur un théorème de J. M. Bony, supplemento ai rendiconti del Circolo matematico di Palermo, atti del Seminario di Analisi Armonica Pisa, 8-17 aprile 1980
Série II, numero 1, 1981.

En ce qui concerne le "paraproduit de Calderon", on se reportera à

[4] A. P. Calderón : Algebra of singular integral operators. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics X (A.M.S. 1967).

Enfin le lecteur soucieux d'apprendre de la belle analyse se reportera à Singular Integrals and Differentiability properties of functions E. M. Stein (1970).

[5] R. R. Coifman et Y. Meyer : Au delà des opérateurs pseudo-différentiels. Astérisque n° 57, S. M. F. (1978).

*
* *