Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

J. L. Ermine

Développements asymptotiques et microfonctions dans les classes de Gevrey

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1981-1982), exp. n° 5, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1981-1982____A4_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-MEYER-SCHWARTZ 1981-1982

DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES ET MICROFONCTIONS DANS LES CLASSES DE GEVREY

par J. L. ERMINE

Exposé n° V

10 Novembre 1981

I. ESPACES DE FONCTIONS GEVREY ET THEOREME DE WHITNEY

Soit X une variété complexe de dimension n, ou une variété à bord dont le complémentaire du bord est muni d'une structure complexe. Soit Y un fermé de X, ou son bord. On supposera que ∂Y est défini localement par l'équation $\rho(x) = 0$ où ρ vérifie l'inégalité

$$|\rho(x)| > A\, d(x,\partial Y)$$

Soit U un ouvert de X.

On note $\mathcal{S}_{s,Y}(U)$ le sous-espace de l'espace des fonctions f, Gevrey de classe s, $\mathcal{D}_s(U)$, vérifiant la propriété suivante

$$\forall\, K \subset\subset U \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \quad \exists\, C > 0 \quad \forall\, x \in K-Y \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n$$

$$|\rho(x)|^{-k} \quad |D^\alpha f(x)| \leqslant C\, A^{|\alpha|}\, B^k (\alpha!)^s (k!)^{s-1}$$

On note $\mathcal{D}_{s,Y}(U)$ l'espace des fonctions Whitney Gevrey sur Y de classe s.

<u>Théorème I</u> : On a des suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}_{s,Y}(U) \longrightarrow \mathcal{D}_s(U) \longrightarrow \mathcal{D}_{s,Y}(U) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \Gamma_Y(U,{}'\mathcal{D}_s) \longrightarrow {}'\mathcal{D}_s(U) \longrightarrow {}'\mathcal{S}_{s,Y}(U) \longrightarrow 0$$

Les suites sont duales l'une de l'autre. Pour une démonstration cf.[1].

II. COHOMOLOGIE LOCALE s-MODEREE ET DUALITE

<u>Théorème II.1</u> : Le complexe de faisceaux $(\mathcal{D}_s^{0,\cdot},\bar\partial)$ [resp $({}'\mathcal{D}_s^{n,\cdot},\bar\partial)$] est une résolution du faisceau structural $\mathcal{O}_X$ [resp. de Ω_X^n].

<u>Définition II.2</u> : On appelle cohomologie à support s-modérée dans Y, la cohomologie du complexe $(\Gamma_Y(U,{}'\mathcal{D}_s^{0,\cdot}),\bar\partial)$ [resp. $(\Gamma_Y(U,{}'\mathcal{D}_s^{p,\cdot}),\bar\partial)$] que l'on note $H^{\bullet}_{[Y]_s}(U,\mathcal{O})$ [resp $H^{\bullet}_{[Y]_s}(X,\Omega^p)$] . On note $\underline{H}_{[Y]_s}(X,\mathcal{O})$ [resp $\underline{H}^{\bullet}_{[Y]_s}(X,\Omega^p)$] les faisceaux associés.

Si i désigne l'injection $X - Y \hookrightarrow X$ on note

$$[i]^s_! \mathcal{O} = \underline{H}^o(\mathcal{S}^{o,\cdot}_{s,Y}) \quad [i]^s_* \mathcal{O} = \underline{H}^o({}'\mathcal{S}^{o,\cdot}_{s,Y}) \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_{\widehat{(X|Y)}_s} = \underline{H}^o(\mathcal{D}^{o,\cdot}_{s,Y})$$

(et respectivement avec Ω^p)

Pour $s = +\infty$, on retrouve les objets algébriques de [3] , pour $s = 1$ les objets analytiques usuels (modulo une translation d'indice).

Proposition II.3 : 1) Les complexes $\Gamma(U,\mathcal{D}^{o,\cdot}_{s,Y})$ et $\Gamma_Y(U,{}'\mathcal{D}^{n,\cdot}_s)$ sont en dualité topologique. Celle-ci induit une dualité topologique entre les séparés associés des espaces

$$H^p_c(U, \mathcal{O}_{\widehat{(X|Y)}_s}) \quad \text{et} \quad H^{n-p}_{[Y]_s}(U, \Omega^n)$$

2) Les complexes $\Gamma(U, \mathcal{S}^{o,\cdot}_{s,Y})$ et $\Gamma(U,{}'\mathcal{S}^{n,\cdot}_{s,Y})$ sont en dualité topologique. Celle-ci induit une dualité topologique entre les séparés associés des espaces :

$$H^p_c(U,[i]^s_!\mathcal{O}) \quad \text{et} \quad H^{n-p}(U,[i]^s_*\,\Omega^n) \quad .$$

la démonstration est dans l'esprit de [6].

III. DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

Soit $\widetilde{\mathbb{C}}$ l'espace obtenu par transformation monoïdale réelle de centre $\{0\}$ de $\mathbb{C}$ (ou éclatement réel de $\{0\}$ dans $\mathbb{C}$) ([5]).

Soit τ la projection naturelle $\widetilde{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$.

Soit $S = \tau^{-1}(\{0\})$ et i l'injection $\widetilde{\mathbb{C}} - S \to \widetilde{\mathbb{C}}$.

Définition III.1 : On note $\mathcal{A}_{o,s} = [i]^s_!\,\Omega_{\widetilde{\mathbb{C}}}$, qu'on appelle faisceau des développements asymptotiques Gevrey nuls de $\mathbb{C}$ en 0.

Il coïncide avec le faisceau introduit dans [4].

Proposition III.2 : On a une suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathcal{A}_{0,s} \to \mathcal{S}^{0,0}_{s,S} \overset{\bar\partial}{\to} \mathcal{S}^{0,1}_{s,S} \to 0$$

La démonstration est analogue à celle de [2].

Soit D un opérateur différentiel à coefficients analytiques. On considère les complexes suivants :

$$K^{\cdot} : [i]^{s}_{*}\mathcal{O} \xrightarrow{D} [i]^{s}_{*}\mathcal{O}$$

$$L^{\cdot} : \mathcal{A}_{0,s} \xrightarrow{D^{*}} \mathcal{A}_{0,s}$$

où D^{*} est l'opérateur transposé de D.

Proposition III.3 : Le dual topologique de $H^{i}(\mathbb{C},K^{\cdot})$ est isomorphe à $H^{2-i}_{c}(\tilde{\mathbb{C}},L^{\cdot})$.

Remarquons que le complexe $K^{\cdot}(\mathbb{C})$ est l'équation différentielle ordinaire :

$$M^{s}_{0}(\mathbb{C}) \xrightarrow{D} M^{s}_{0}(\mathbb{C})$$

où

$$M^{s}_{0}(\mathbb{C}) = \{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n \mid \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \sum_{n > 0} a_{-n} (n!)^{s-1} z^n \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \}$$

et que sa cohomologie, c'est-à-dire Ker D et coker D, est de dimension finie grâce au théorème d'indice de [4] .

La démonstration de la proposition III.3 s'effectue alors comme pour le Théorème 2.2 de [2] qu'elle généralise.

IV. MICROFONCTIONS

Soit $\tilde{\mathbb{C}}^{*}$ l'espace obtenu par transformation comonoïdale réelle de centre $\{0\}$ de $\mathbb{C}$ (ou co-éclatement réel de $\{0\}$ dans $\mathbb{C}$) ([5]).

Soit π la projection naturelle $\tilde{\mathbb{C}}^{*} \longrightarrow \mathbb{C}$.

On note $S^{*} = \pi^{-1}(\{0\})$ et i l'injection $\tilde{\mathbb{C}}^{*} - S^{*} \hookrightarrow \tilde{\mathbb{C}}^{*}$

<u>Définition IV.1</u> : On note $\mathcal{C}^{\mathbb{R},s}_{0|S^*} = \underline{H}^1_{[S^*]_s}(\pi^{-1}\mathcal{O})^a$ où a est l'application antipodale de $\tilde{\mathbb{C}}^*$ et $\mathcal{C}^{\mathbb{R},s}_{0|\mathbb{C}^*-S^*} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}-\{0\}}$ qu'on appelle faisceau des microfonctions Gevrey de $\mathbb{C}$ en 0.

Pour s = 1, il coïncide avec le faisceau des microfonctions de [5]. En reprenant les méthodes de [5] on montre les résultats suivants .

<u>Proposition IV.2</u> : $H^p_{[S^*]_s}(\pi^{-1}\mathcal{O}) = 0$ si $p \neq 1$ et

$$(H^p_{[S^*]_s}(\pi^{-1}\mathcal{O}))_{(0,\xi)} = \varinjlim_{U,V} H^1_{[U_n V]_s}(U,\mathcal{O})$$

où U décrit la famille $U_\delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \delta\}$ et V la famille $V_\varepsilon = \{z = (x,y) \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e <z,\xi> \geqslant \varepsilon|x|\}$

<u>Proposition IV.3</u> : On a une suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \underline{H}^1_{[\{0\}]_s}(\mathbb{C},\mathcal{O}) \longrightarrow \pi_*\mathcal{C}^{\mathbb{R},s}_0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow 0$$

On a le résultat de dualité (global) entre les microfonctions et les développements asymptotiques .

<u>Proposition IV.4</u> : Le dual topologique de $\Gamma(\tilde{\mathbb{C}}^*, \mathcal{C}^{\mathbb{R},s}_0)$ est isomorphe à $H^1_c(\tilde{\mathbb{C}}, \mathcal{A}_{0,s})$.

En effet, $H^1_c(\tilde{\mathbb{C}}, \mathcal{A}_{0,s}) = H^1_c(\mathbb{C},[i]^s_!\,\Omega)$ (cf.[2] et [4]) et d'après la proposition précédente, on a un isomorphisme d'e.v.t. :

$$\Gamma(\tilde{\mathbb{C}}^*, \mathcal{C}^{\mathbb{R},s}_0) = H^1_{[\{0\}]_s}(\mathbb{C},\mathcal{O}) \oplus \Gamma(\mathbb{C},\mathcal{O}) = \Gamma(\mathbb{C},[i]^s_*\mathcal{O})$$

la dualité (FS × DFS) découle alors de la proposition II.3 .

BIBLIOGRAPHIE

[1] Kantor J. M. : Classes non quasi-analytiques et décomposition des supports des ultradistributions. An. Acad. Brasil. Ciencas 44-2 (1972) 171-180.

[2] Malgrange B. : Remarques sur les équations différentielles à points singuliers irréguliers. Lecture notes in Mathematics, n° 712 (Springer Verlag 1979).

[3] Ramis J. P. : Variations sur le thème GAGA. Séminaire Lelong 1976-77.

[4] Ramis J. P. : Devissage Gevrey. Astérisque S. M. F. 59-60 (1978).

[5] Sato M., Kashiwara M., Kawaï T. : Microfunctions and pseudodifferential equations. Lecture notes in Mathematics, n° 287 (Springer Verlag, 1973).

[6] Serre J. P. : Un théorème de dualité. Comm. Math. Helv. 29 (1955) 9-26.

*
* *
*