

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J. L. ERMINE

**Développements asymptotiques et microfonctions  
dans les classes de Gevrey**

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1981-1982), exp. n° 5, p. 1-5*

[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1981-1982\\_\\_A4\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1981-1982__A4_0)

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1981-1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
CENTRE DE MATHÉMATIQUES  
91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

---

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°  
Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z   1 9 8 1 - 1 9 8 2

DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES ET MICROFONCTIONS  
DANS LES CLASSES DE GEVREY

par J. L. ERMINE



## I. ESPACES DE FONCTIONS GEVREY ET THEOREME DE WHITNEY

Soit  $X$  une variété complexe de dimension  $n$ , ou une variété à bord dont le complémentaire du bord est muni d'une structure complexe. Soit  $Y$  un fermé de  $X$ , ou son bord. On supposera que  $\partial Y$  est défini localement par l'équation  $\rho(x) = 0$  où  $\rho$  vérifie l'inégalité

$$|\rho(x)| > A d(x, \partial Y)$$

Soit  $U$  un ouvert de  $X$ .

On note  $\mathcal{S}_{s,Y}(U)$  le sous-espace de l'espace des fonctions  $f$ , Gevrey de classe  $s$ ,  $\mathcal{D}_s(U)$ , vérifiant la propriété suivante

$$\forall K \subset\subset U \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists C > 0 \quad \forall x \in K-Y \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$$

$$|\rho(x)|^{-k} \quad |D^\alpha f(x)| \leq C A^{|\alpha|} B^k (\alpha!)^s (k!)^{s-1}$$

On note  $\mathcal{D}_{s,Y}(U)$  l'espace des fonctions Whitney Gevrey sur  $Y$  de classe  $s$ .

Théorème I : On a des suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}_{s,Y}(U) \longrightarrow \mathcal{D}_s(U) \longrightarrow \mathcal{D}_{s,Y}(U) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \Gamma_Y(U, \mathcal{D}_s) \longrightarrow \mathcal{D}_s(U) \longrightarrow \mathcal{S}_{s,Y}(U) \longrightarrow 0$$

Les suites sont duales l'une de l'autre. Pour une démonstration cf. [1].

## II. COHOMOLOGIE LOCALE s-MODEREE ET DUALITE

Théorème II.1 : Le complexe de faisceaux  $(\mathcal{D}_s^{\bullet, \cdot}, \bar{\partial})$  [resp  $(\mathcal{D}_s^{n, \cdot}, \bar{\partial})$ ] est une résolution du faisceau structural  $\mathcal{O}_X$  [resp. de  $\Omega_X^n$ ].

Définition II.2 : On appelle cohomologie à support  $s$ -modérée dans  $Y$ , la cohomologie du complexe  $(\Gamma_Y(U, \mathcal{D}_s^{\bullet, \cdot}), \bar{\partial})$  [resp.  $(\Gamma_Y(U, \mathcal{D}_s^{p, \cdot}), \bar{\partial})$ ] que l'on note  $H_{[Y]_s}^\bullet(U, \mathcal{O})$  [resp  $H_{[Y]_s}^\bullet(X, \Omega^p)$ ]. On note  $\underline{H}_{[Y]_s}^\bullet(X, \mathcal{O})$  [resp  $\underline{H}_{[Y]_s}^\bullet(X, \Omega^p)$ ] les faisceaux associés.

Si  $i$  désigne l'injection  $X - Y \hookrightarrow X$  on note

$$[i]_!^s \mathcal{O} = \underline{H}^0(\mathcal{F}_{s,Y}^{\circ, \cdot}) \quad [i]_*^s \mathcal{O} = \underline{H}^0(\mathcal{F}_{s,Y}^{\circ, \cdot}) \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_{(X|Y)_s} \widehat{=} = \underline{H}^0(\mathcal{F}_{s,Y}^{\circ, \cdot})$$

(et respectivement avec  $\Omega^p$ )

Pour  $s = +\infty$ , on retrouve les objets algébriques de [3], pour  $s = 1$  les objets analytiques usuels (modulo une translation d'indice).

Proposition II.3 : 1) Les complexes  $\Gamma(U, \mathcal{D}_{s,Y}^{\circ, \cdot})$  et  $\Gamma_Y(U, \mathcal{D}_s^{n, \cdot})$  sont en dualité topologique. Celle-ci induit une dualité topologique entre les séparés associés des espaces

$$H_C^p(U, \mathcal{O}_{(X|Y)_s} \widehat{=} ) \quad \text{et} \quad H_{[Y]_s}^{n-p}(U, \Omega^n)$$

2) Les complexes  $\Gamma(U, \mathcal{F}_{s,Y}^{\circ, \cdot})$  et  $\Gamma(U, \mathcal{F}_{s,Y}^{n, \cdot})$  sont en dualité topologique. Celle-ci induit une dualité topologique entre les séparés associés des espaces :

$$H_C^p(U, [i]_!^s \mathcal{O}) \quad \text{et} \quad H^{n-p}(U, [i]_*^s \Omega^n) .$$

la démonstration est dans l'esprit de [6].

### III. DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

Soit  $\tilde{\mathcal{C}}$  l'espace obtenu par transformation monoïdale réelle de centre  $\{0\}$  de  $\mathcal{C}$  (ou éclatement réel de  $\{0\}$  dans  $\mathcal{C}$ ) ([5]).

Soit  $\tau$  la projection naturelle  $\tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}$ .

Soit  $S = \tau^{-1}(\{0\})$  et  $i$  l'injection  $\tilde{\mathcal{C}} - S \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}$ .

Définition III.1 : On note  $\mathcal{O}_{0,S} = [i]_!^s \Omega_{\tilde{\mathcal{C}}}$ , qu'on appelle faisceau des développements asymptotiques Gevrey nuls de  $\mathcal{C}$  en 0.

Il coïncide avec le faisceau introduit dans [4].

Proposition III.2 : On a une suite exacte de faisceaux

$$0 \rightarrow \mathcal{A}_{0,S} \rightarrow \mathcal{F}_{S,S}^{0,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{F}_{S,S}^{0,1} \rightarrow 0$$

La démonstration est analogue à celle de [2].

Soit  $D$  un opérateur différentiel à coefficients analytiques. On considère les complexes suivants :

$$K^\bullet : [i]_*^S \mathcal{O} \xrightarrow{D} [i]_*^S \mathcal{O}$$

$$L^\bullet : \mathcal{A}_{0,S} \xrightarrow{D^*} \mathcal{A}_{0,S}$$

où  $D^*$  est l'opérateur transposé de  $D$ .

Proposition III.3 : Le dual topologique de  $H^i(\mathbb{C}, K^\bullet)$  est isomorphe à  $H_C^{2-i}(\tilde{\mathbb{C}}, L^\bullet)$ .

Remarquons que le complexe  $K^\bullet(\mathbb{C})$  est l'équation différentielle ordinaire :

$$M_0^S(\mathbb{C}) \xrightarrow{D} M_0^S(\mathbb{C})$$

où

$$M_0^S(\mathbb{C}) = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n \mid \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \text{ et } \sum_{n > 0} a_{-n} (n!)^{s-1} z^n \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \right\}$$

et que sa cohomologie, c'est-à-dire  $\text{Ker } D$  et  $\text{coker } D$ , est de dimension finie grâce au théorème d'indice de [4].

La démonstration de la proposition III.3 s'effectue alors comme pour le Théorème 2.2 de [2] qu'elle généralise.

#### IV. MICROFONCTIONS

Soit  $\tilde{\mathbb{C}}^*$  l'espace obtenu par transformation comonoïdale réelle de centre  $\{0\}$  de  $\mathbb{C}$  (ou co-éclatement réel de  $\{0\}$  dans  $\mathbb{C}$ ) ([5]).

Soit  $\pi$  la projection naturelle  $\tilde{\mathbb{C}}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ .

On note  $S^* = \pi^{-1}(\{0\})$  et l'injection  $\tilde{\mathbb{C}}^* - S^* \hookrightarrow \tilde{\mathbb{C}}^*$

Définition IV.1 : On note  $\mathcal{E}^{\mathbb{R},s} = H^1_{[s]}(\pi^{-1}\mathcal{O})^a$  où  $a$  est l'application antipodale de  $\tilde{\mathcal{C}}^*$  et  $\mathcal{E}^{\mathbb{R},s} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}-\{0\}}$  qu'on appelle faisceau des microfonctions Gevrey de  $\mathbb{C}$  en  $0$ .

Pour  $s = 1$ , il coïncide avec le faisceau des microfonctions de [5].  
 En reprenant les méthodes de [5] on montre les résultats suivants .

Proposition IV.2 :  $H^p_{[s]}(\pi^{-1}\mathcal{O}) = 0$  si  $p \neq 1$  et

$$(H^1_{[s]}(\pi^{-1}\mathcal{O}))_{(0,\xi)} = \varinjlim_{U,V} H^1_{[U_n V]}(U, \mathcal{O})$$

où  $U$  décrit la famille  $U_\delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \delta\}$  et  $V$  la famille  $V_\varepsilon = \{z = (x,y) \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \langle z, \xi \rangle \geq \varepsilon |x|\}$

Proposition IV.3 : On a une suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow H^1_{[\{0\}}(\mathbb{C}, \mathcal{O}) \longrightarrow \pi_* \mathcal{E}^{\mathbb{R},s} \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow 0$$

On a le résultat de dualité (global) entre les microfonctions et les développements asymptotiques .

Proposition IV.4 : Le dual topologique de  $\Gamma(\tilde{\mathcal{C}}^*, \mathcal{E}^{\mathbb{R},s})$  est isomorphe à

$$H^1_{\mathbb{C}}(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{0,s}) .$$

En effet,  $H^1_{\mathbb{C}}(\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{0,s}) = H^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, [i]_!^s \Omega)$  (cf. [2] et [4]) et d'après la proposition précédente, on a un isomorphisme d'e.v.t. :

$$\Gamma(\tilde{\mathcal{C}}^*, \mathcal{E}^{\mathbb{R},s}) = H^1_{[\{0\}}(\mathbb{C}, \mathcal{O}) \oplus \Gamma(\mathbb{C}, \mathcal{O}) = \Gamma(\mathbb{C}, [i]_*^s \mathcal{O})$$

la dualité (FS  $\times$  DFS) découle alors de la proposition II.3 .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Kantor J. M. : Classes non quasi-analytiques et décomposition des supports des ultradistributions. An. Acad. Brasil. Ciencias 44-2 (1972) 171-180.
- [2] Malgrange B. : Remarques sur les équations différentielles à points singuliers irréguliers. Lecture notes in Mathematics, n° 712 (Springer Verlag 1979).
- [3] Ramis J. P. : Variations sur le thème GAGA. Séminaire Lelong 1976-77.
- [4] Ramis J. P. : Devissage Gevrey. Astérisque S. M. F. 59-60 (1978).
- [5] Sato M., Kashiwara M., Kawai T. : Microfunctions and pseudodifferential equations. Lecture notes in Mathematics, n° 287 (Springer Verlag, 1973).
- [6] Serre J. P. : Un théorème de dualité. Comm. Math. Helv. 29 (1955) 9-26.

\*  
\* \*  
\*