

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

R. LASCAR

C. ZUILY

## **Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs différentiels à caractéristiques doubles**

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1981-1982), exp. n° 3,  
p. 1-10

[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1981-1982\\_\\_\\_\\_A3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1981-1982____A3_0)

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1981-1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z   1 9 8 1 - 1 9 8 2

UNICITE ET NON UNICITE DU PROBLEME DE CAUCHY POUR UNE  
CLASSE D'OPERATEURS DIFFERENTIELS A CARACTERISTIQUES DOUBLES

par R. LASCAR et C. ZUILY



§.0. INTRODUCTION

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . En convenant de noter  $(x,y)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}$ , le point courant de  $\Omega$ , nous considérons des opérateurs différentiels de la forme :

$$P(x,y;D_x,D_y) = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x,y) D_x^\alpha + c(x,y) D_y$$

où les  $a_\alpha$ ,  $|\alpha| \leq 2$  et  $c$  sont dans  $C^\infty(\Omega)$ .

Désignons par  $p(x,y;\xi)$  le symbole principal de  $P$  et par  $(x_0,y_0)$  un point fixé de  $\Omega$ . Nous ferons les hypothèses suivantes :

- (i)  $p(x,y;\xi)$  et  $c(x,y)$  sont à valeurs réelles.
- (ii)  $c(x_0,y_0) \neq 0$ .

Ce travail est divisé en deux parties. La première est consacrée à la preuve d'un résultat d'unicité locale, au voisinage de  $(x_0,y_0)$ , des solutions du problème de Cauchy pour  $P$ , relatif à certaines hypersurfaces orientées et non caractéristiques passant par  $(x_0,y_0)$  (Th. 1.3). Ces hypersurfaces devront vérifier une condition que nous appellerons (par abus) de "pseudo-convexité par rapport aux bicaractéristiques de  $P$ ". Ce résultat d'unicité est à rapprocher de ceux de Hörmander [4] chapitre VIII ; sa preuve utilise une technique d'inégalités de Carleman avec des fonctions poids analogue à

celles utilisées dans [2] . Lorsque cette condition de pseudo-convexité est violée (en un sens légèrement fort) nous montrons qu'il suffit que  $P$  soit perturbé par un terme d'ordre zéro de classe  $C^\infty$ , pour qu'il perde la propriété d'unicité locale (Th. 1.4). La preuve de ce résultat est inspirée des travaux de Cohen [3], Pliš [7],

Hörmander [5], Alinhac-Zuily [2]. On construit la fonction  $u$ , d'où l'on déduit la perturbation  $a = -\frac{Pu}{u}$ , comme superposition de fonctions  $u_k$  obtenues par une variante délicate de la méthode de l'optique géométrique.

Nous faisons ensuite remarquer sur des exemples, (Th. 1.5), qu'il n'y a pas non plus d'unicité lorsqu'il n'y a pas du tout de pseudo-convexité, résultat qui est à rapprocher de ceux de [1].

### §.1. a) La notion de pseudo-convexité

Dans cette section nous allons construire un invariant, associé à l'opérateur  $P$ , qui nous permettra de définir, en termes géométriques, la notion de "pseudo-convexité par rapport aux bicaractéristiques de  $P$ ". Nous donnerons ensuite une traduction analytique, en coordonnées locales, de cette notion. Cette construction est relativement classique et a été en particulier utilisée dans [8].

Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $U$  un ouvert de  $T^*\Omega \setminus 0$  et  $\sigma$  la 2-forme symplectique sur  $U$ . Soit  $N$  la sous-variété involutive :

$$N = \{(x, y, \xi, \eta) \in T^*\Omega \setminus 0 : \xi = 0\}$$

Il est bien connu que la sous-variété  $N \cap U$  (notée par abus  $N$ ) est munie d'un feuilletage canonique. On désigne par  $F$  une feuille locale connexe de  $N$ .

Soit  $Q^F$  la forme quadratique induite par  $1/2 \text{ Hess } p$  sur  $T_F U$ . Nous allons lui associer un objet défini sur  $T^*F$ .

Soit  $i_F$  le  $F$  isomorphisme canonique de  $T_F U$  sur  $T_F^* U$  déterminé par  $\sigma$ , soit  $j_F$  l'injection  $F \hookrightarrow U$ , et soit  $h_F$  l'application :

$$h_F = j_F^* \circ i_F$$

qui définit un  $F$  morphisme surjectif de  $T_F U$  dans  $T^* F$ . Le noyau de  $h_F$  est  $j_N'(T_F N)$ , où  $j_N$  est l'injection  $N \hookrightarrow U$ , c'est donc un sous-fibré de  $T_F U$  et on a la factorisation :

$$\begin{array}{ccc} T_F U & \xrightarrow{h_F} & T^* F \\ \pi_F \searrow & j_F \nearrow & \nearrow i_F \\ & N_F(N) & \end{array}$$

où  $N_F(N)$  est le fibré  $\frac{T_N U}{j_N'(TN)} \Big|_F$ , où  $\pi_F$  est l'application induite par la projection canonique  $T_N U \rightarrow T_N U / j_N'(TN)$ , où  $j_F$  est un relèvement de  $\pi_F$  et où  $i_F$  est un  $F$ -isomorphisme.

On peut définir une forme quadratique sur  $T^* F$  en posant :

$$(1.1) \quad Q_F = Q^F \circ j_F \circ i_F^{-1}$$

$Q_F$  est clairement indépendante du choix du relèvement  $j_F$ .

Les objets définis ci-dessus se transforment bien sous l'effet d'un isomorphisme canonique.

Désignons par  $p_1^S$  le symbole sous principal de  $p$  et posons :

$$(1.2) \quad q_F = Q_F + p_1^S|_F$$

De plus si  $\pi_F$  désigne la projection  $T^*F \rightarrow F$  et si  $f \in C^\infty(U)$  on convient de noter  $\tilde{f} = f \circ j_F \circ \pi_F$ .

Nous pouvons maintenant définir la notion de "pseudo-convexité par rapport aux bicaractéristiques de  $P$ ".

Définition 1.1. : Soit  $(x_o, y_o) \in \Omega$ ,  $f \in C^\infty(\Omega)$ ,  $df(x_o, y_o) \neq 0$ . L'hypersurface orientée  $\{f(x, t) = f(x_o, y_o)\}$  est dite pseudo-convexe par rapport aux bicaractéristiques de  $P$ , en  $(x_o, y_o)$ , si elle est non-caractéristique et si elle vérifie la condition  $(\Psi)$  suivante :

$$(\Psi) \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } z_o \in T^*\Omega \setminus 0 \text{ est un point de } N \text{ tel que } \pi(z_o) = (x_o, y_o) \text{ il existe une feuille} \\ \text{locale } F \text{ de } N \text{ passant par } z_o \text{ telle que :} \\ (z_o, \zeta_o) \in T^*F, q_F(z_o, \zeta_o) = 0, H_{q_F}(\tilde{f})(z_o, \zeta_o) = 0 \Rightarrow (H_{q_F})^2(\tilde{f})(z_o, \zeta_o) > 0 \end{array} \right.$$

où  $H_{q_F}$  désigne le Hamiltonien de la fonction  $q_F$  définie en (1.2.).

Cette même hypersurface sera dite fortement non pseudo-convexe par rapport aux bicaractéristiques de  $P$  si :

$$(\mathcal{X}) \left\{ \begin{array}{l} \exists z_o \in T^*\Omega \setminus 0 : z_o \in N ; \pi(z_o) = (x_o, y_o), \exists F \text{ feuille locale de } N \text{ passant par} \\ z_o, \exists \zeta_o \in T^*_{z_o} F : \\ q_F(z_o, \zeta_o) = 0 \quad H_{q_F}(\tilde{f})(z_o, \zeta_o) = 0 \quad \text{et} \quad (H_{q_F})^2(\tilde{f})(z_o, \zeta_o) < 0 \end{array} \right.$$

Remarque 1.2. :

a) On peut prouver que si la condition  $(\Psi)$  est satisfaite pour une feuille locale  $F$ ,

elle est vérifiée pour toute feuille locale passant par  $z_0$ .

b) Dans les coordonnées  $(x, t, y)$ ,  $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$  supposons que  $P$  soit donné par :

$$P = D_t^2 + \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x, y, t) D_x^\alpha + c(x, y, t) D_y$$

et que  $f(x, y, t) = t$ , au voisinage de l'origine. Alors la condition  $(\Psi)$  est équivalente à

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad \frac{\partial a}{\partial t}(0; \xi) - \frac{\frac{\partial c}{\partial t}(0)}{c(0)} a(0; \xi) < 0$$

Quant à la condition  $(\Psi)$  elle est équivalente à :

$$\exists \xi^0 \in \mathbb{R}^{n-1} \quad \text{t.q.} \quad \frac{\partial a}{\partial t}(0; \xi^0) - \frac{\frac{\partial c}{\partial t}(0)}{c(0)} a(0; \xi^0) > 0$$

#### b) Enoncé des résultats et exemples

Théorème 1.3 : Soit  $\{f(x, y) = f(x_0, y_0)\}$  une hypersurface orientée pseudoconvexe par rapport aux bicaractéristiques de  $P$  en  $(x_0, y_0)$ . Il existe alors un voisinage de  $(x_0, y_0)$  tel que si  $u \in C^\infty(\Omega)$  vérifie  $Pu = 0$  et si  $u$  est nulle dans  $\{(x, y) \in \Omega \mid f(x, y) > f(x_0, y_0)\}$  alors  $u$  est nulle dans  $\omega$ .

Le résultat de non unicité est le suivant :

Théorème 1.4. : Les notations étant celles du théorème 1.1., soit  $S = \{f(x, y) = f(x_0, y_0)\}$  une hypersurface orientée fortement non pseudo-convexe par rapport aux bicaractéristiques de  $P$  en  $(x_0, y_0)$ . Alors dans tout voisinage de  $\omega$  de  $(x_0, y_0)$  il existe un point  $(x_1, y_1) \in S$ , un voisinage  $\omega_1$  de  $(x_1, y_1)$ , des fonctions  $u$  et  $b$  de  $C^\infty(\omega_1)$  telles que :

$$\begin{cases} Pu + bu = 0 \\ u = 0 \text{ dans } \{f(x, y) > f(x_0, y_0)\} \\ (x_1, y_1) \in \text{supp } u \end{cases}$$



Le théorème suivant étudie, sur des exemples, le cas intermédiaire.

Théorème 1.5. : Considérons, au voisinage de l'origine dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ , l'opérateur différentiel :

$$P = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x, y) D_x^\alpha + c(x, y) D_y$$

où les  $a_\alpha$ ,  $|\alpha| = 2$ , et  $c$  sont réels et  $\sum_{|\alpha|=2} |a_\alpha(0)| \neq 0$ . Il existe alors des fonctions

$b$  et  $u$  de classe  $C^\infty$  au voisinage de l'origine telles que :

$$\begin{cases} Pu + bu = 0 \\ u = 0 \text{ pour } t > 0 \\ (0, 0, 0) \in \text{supp } u \end{cases}$$

Donnons, pour terminer ce paragraphe, des exemples d'applications des résultats ci-dessus.

Exemples 1.6 : Dans tous les exemples ci-dessous la variable de  $\mathbb{R}^{n+1}$  est notée  $(x, y, t)$  ; en outre,  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ,  $f(x, y, t) = t$  et les opérateurs différentiels sont écrits modulo un opérateur d'ordre  $\leq 1$  en  $(x, t)$ .

$$(1.3) \quad P = D_t^2 + \varepsilon_1 \sum_{j=1}^{n-1} D_{x_j}^2 + (1 + \varepsilon_2 t) D_y, \quad \varepsilon_j = \pm 1.$$

Cet opérateur est soit faiblement hyperbolique soit transversalement elliptique sur  $P = \{(x, y, t; \xi, \eta, \tau) : \tau = \xi = 0\}$ . Si  $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 1$  le théorème 1.3 d'unicité s'applique et si  $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = -1$  une perturbation d'ordre zéro de  $P$  suffit à lui faire perdre la propriété d'unicité (Th. 1.4.).

$$(1.4) \quad P = D_t^2 + \varepsilon t \sum_{j=1}^{n-1} D_{x_j}^2 + D_y, \quad \varepsilon = \mp 1$$

Suivant le signe de  $\varepsilon$ , cet opérateur est faiblement hyperbolique d'un côté de la surface et transversalement elliptique de l'autre. Il entre dans le cadre du théorème 1.3. si  $\varepsilon = -1$  et du théorème 1.4. si  $\varepsilon = 1$ .

$$(1.5) \quad P = D_t^2 + (1+\alpha t) \sum_{j=1}^{n-1} D_{x_j}^2 + (1+\beta t) D_y, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq \beta.$$

Si  $\alpha < \beta$  il y a unicité et si  $\alpha > \beta$  le théorème 1.4. s'applique.

## §.2. Preuve du théorème d'unicité

On prouve après avoir effectué une convexification convenable le résultat :  
Il existe des constantes positives  $C, \gamma_0, T_0, r$  telles que pour tout  $u \in C^\infty(\Omega)$  avec  $\text{supp } u \subset \{0 \leq t \leq T_0, |x| + |y| \leq r\}$  et tout  $\gamma \leq \gamma_0$  on ait :

$$\gamma^3 \|t^{-\gamma - \frac{3}{2}} u\|^2 + \gamma \sum_{j=1}^{n-1} \|t^{-\gamma} \frac{\partial u}{\partial x_j}\|^2 + \gamma \|t^{-\gamma} \frac{\partial u}{\partial t}\|^2 \leq C \|t^{-\gamma + \frac{1}{2}} Pu\|.$$

§.3. Preuve du théorème de non unicité 1.4

La preuve du théorème 1.4. de non unicité est inspirée des travaux de Cohen [3], Pliš [7], Hörmander [5], Alinhac-Zuily [2]. On construit la fonction  $u$  comme superposition de fonctions  $u_k$ , définies dans des intervalles  $(b_{k+1}, b_k)$ , de la forme :

$$u_k(x, y, t) = e^{i[\sqrt{\tau_k} \xi(x, y, b_k) + \tau_k \psi(b_k) y]} e^{v_k \varphi(x, y, \frac{t-b_k}{b_k^\theta}, b_k)} e^{-\gamma_k(x, y)} w(x, y, \frac{t-b_k}{b_k^\theta}, b_k, v_k)$$

qui sont obtenues par une méthode de type "optique géométrique".

Le point crucial de la démonstration est l'obtention des phases  $\xi$ ,  $\psi$ ,  $\varphi$  ayant des propriétés de convexité convenables. Une fois ces phases obtenues, les paramètres adéquatement fixés, les équations de transport déterminant  $w$  correctement résolues, le reste de la preuve est classique. c.f. par exemple [2].

On montre que l'on peut se ramener au cas où  $P$  est l'opérateur

$$P = D_t^2 + a(x, y, t, D_x) + c D_y + \sum_{j=1}^{n-1} d_j D_{x_j} + \alpha D_t + \beta$$

dans un voisinage  $V$  de l'origine, où  $a(x, y, t, \xi)$  est une forme quadratique réelle, où  $c$  est réelle et où :

$$(i) \quad c(0) \neq 0$$

$$(ii) \quad \exists \xi_0 \in \mathbb{R}^{n-1}, \exists \bar{a}(x, y, t, \xi) \text{ telle que } a(x, y, t, \xi) = t^\ell \bar{a}(x, y, t, \xi), \ell = 0, \text{ ou } 1, \text{ et :}$$

$$\bar{a}(0, \xi_0) \neq 0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{a}}{\partial t}(0, \xi_0) - \frac{\partial c / \partial t}{c}(0) \bar{a}(0, \xi_0) < 0.$$

La construction des fonctions  $u$  et  $b$  telles que  $Pu + bu = 0$  nécessite plusieurs étapes. On commence par effectuer le changement de variables  $t = \delta + s/\lambda$  où  $\delta > 0$  et où  $\lambda = \delta^{-\theta}$   $\theta > 1$ , qui transforme l'opérateur  $P$  en un opérateur  $\tilde{P}$ .

On cherche des solutions formelles de  $\tilde{P}u = 0$  sous la forme :

$$u(x, y, s, \delta) = e^{i(\tau^{1/2} \xi(x, y, \delta) + \tau \psi(\delta, y))} e^{v \varphi(x, y, s, \delta)} e^{-\gamma(x, y, \delta)} w(x, y, s, \delta, v)$$

où  $\tau, \nu$  sont des paramètres et où  $\xi, \varphi, \gamma$  sont des fonctions que l'on déterminera.  
L'étude de

$$I = e^{i(\tau^{1/2}\xi + \tau\psi y) + \nu\varphi - \gamma} \tilde{p}(e^{i\tau^{1/2}\xi + \tau\psi y + \nu\varphi - \gamma} w) ,$$

fait apparaître, si on fait le choix des paramètres  $\tau = \lambda^2 \nu^2$ , une équation de phase et une équation de transport.

L'équation de phase est explicitée ci-dessous :

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)^2 = a(x, y, \delta + \frac{s}{\lambda}, \nabla \xi) + \psi(\delta) \quad c(x, y, \delta + \frac{s}{\lambda}) \quad (3.1)$$

On montre qu'il existe un voisinage  $\omega$  de 0 dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $\delta_0 > 0$ ,  $s_0 > 0$  des fonctions réelles  $\xi(x, y, \delta) \in C^\infty(\omega \times ]0, \delta_0[)$ ,  $\varphi(x, y, s, \delta) \in C^\infty(\omega \times ]-s_0, s_0[ \times ]0, \delta_0[)$   $\varphi$  ayant toutes ses dérivées en  $(x, y, s)$  continues pour  $\delta \geq 0$ ,  $\psi(\delta)$  vérifiant (3.1).

Ces fonctions de phases ayant de plus les propriétés :

$$(\alpha) \quad |\xi(x, y, \delta)| \leq c_1 \delta^{-M_1}, \quad |\psi(\delta)| \leq c_2 \delta^{-M_2} \quad \text{avec } M_1, M_2 \geq 0 ,$$

$$(\beta) \quad \varphi(x, y, s, \delta) = s - \beta(x, y, s, \delta)s^2 \quad \text{avec}$$

$$\beta \in C^0(\omega \times ]-s_0, s_0[ \times [0, \delta_0[) \quad \text{et} \quad \beta(0) > 0 .$$

La condition de convexité sur  $\varphi$  exprimée par la propriété  $(\beta)$  est essentielle. On indique maintenant comment on choisit les paramètres :

$\delta, \nu, \lambda, \tau$  dépendent d'un entier  $k$  destiné à tendre vers l'infini.

Soit  $\varepsilon > 0$  petit

$$\delta = b_k = k^{-\rho}, \quad \text{où } \theta = 1 + \varepsilon \text{ et } \rho = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}, \quad \lambda = \delta^{-\theta} = k^{\rho\theta},$$

$$\nu = k^\sigma, \quad \sigma = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \varepsilon ,$$

et enfin  $\tau = k^{2\rho\theta + 2\sigma}$ .

Le reste de la preuve est classique et nous renvoyons pour plus de détails à notre article.

REFERENCES

- [1] S. Alinhac, M. S. Baouendi : Séminaire Goulaouic-Schwartz 1978-79, exposé 22.
- [2] S. Alinhac, C. Zuily : A paraître dans les Comm. in P. D. E. 1981.
- [3] P. Cohen : O.N.R. Techn. Report 93 Stanford 1960.
- [4] L. Hörmander : Springer Verlag 1963.
- [5] L. Hörmander : Lecture Notes in Math. Springer Verlag n°459 (1975).
- [6] R. Lascar : Lecture Notes in Math. Springer Verlag n° 856 (1981).
- [7] A. Plis : Proc. Int. Congr. Math. Stockholm 1962.
- [8] C. Zuily : Comm. in P.D.E. Mars 1981.

