SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

M. S. BAOUENDI

Microlocalisation hypo-analytique et extension holomorphe de fonctions C. R.

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1981-1982), exp. n° 23, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1981-1982____A22_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-MEYER-SCHWARTZ 1981-1982

MICROLOCALISATION HYPO-ANALYTIQUE ET EXTENSION HOLOMORPHE DE FONCTIONS C. R.

par M. S. BAOUENDI

Exposé n° XXIII

25 Mai 1982

Depuis les travaux de H. Lewy dans les années 50, l'extension holomorphe de fonctions C. R. définies sur une variété de $\mathbb{C}^m$ a été étudiée par plusieurs mathématiciens : Andreotti, Hill, Taiani, Hunt, Wells, Boggess, Polking etc... Dans la plupart de ces travaux, on utilise la technique des "disques analytiques", qui consiste à trouver des familles de disques dont les bords sont sur la variété considérée ; on définit ensuite l'extension holomorphe à l'aide de l'intégrale de Cauchy.

Dans cet exposé, nous allons présenter une technique différente basée sur une "microlocalisation" du problème . L'extension holomorphe se fera alors dans des "conoïdes" dont les sommets sont sur la variété étudiée. (En fait, comme on le verra plus loin, on traitera le cas de sous-ensembles de $\mathbb{C}^m$ plus généraux que des variétés). On définira une notion de "front d'onde hypo-analytique" attachée aux solutions d'un système intégrable (surdéterminé) de champs de vecteurs complexes. Une fonction C. R. se prolonge holomorphiquement au voisinage d'un point si et seulement si son front d'onde hypo-analytique est vide. Non seulement cette méthode permet de retrouver des résultats connus, mais donne aussi des résultats nouveaux de prolongement holomorphe de fonctions C. R. Il s'agit là d'un travail en collaboration avec C. H. Chang et F. Treves [1]. Nous nous limitons dans cet exposé à donner une idée des techniques utilisées et quelques principaux résultats, nous renvoyons à [1] pour plus de détail.

I. STRUCTURES HYPO-ANALYTIQUES

Soit Ω une variété de classe C^∞ de dimension $N = m+n$, $n \geqslant 0$.(Cela sera dans la suite un ouvert de $\mathbb{R}^N$) . On dit que Ω a une structure hypo-analytique de codimension n, s'il existe un recouvrement ouvert $(U_j)_{j \in J}$ de Ω , tel que pour tout j il existe m fonctions complexes de classe C^∞ définies dans U_j, $Z_j^1,\ldots,Z_j^m$, satisfaisant :

(1) $dZ_j^1,\ldots,dZ_j^m$ sont linéairement indépendants en tout point de U_j .

(2) Si $U_j \cap U_k \neq \emptyset$, il existe une fonction holomorphe F_k^j définie dans un voisinage ouvert de $Z_j\ (U_j \cap U_k)$ à valeur dans $\mathbb{C}^m$ telle que

$$Z_k = F_k^j \circ Z_j \quad \text{dans} \quad U_j \cap U_k .$$

(On a utilisé la notation $Z_j = (Z_j^1,\dots,Z_j^m)$).

Une fonction f définie dans un voisinage de $p_o \in \Omega$ est dite hypo-analytique en p_o, s'il existe j tel que $p_o \in U_j$ et $f = \tilde{f} \circ Z_j$ au voisinage de p_o, où $\tilde{f}$ est une fonction holomorphe définie dans un voisinage de $Z_j(p_o)$ dans $\mathbb{C}^m$.

Une carte locale hypo-analytique de Ω est la donnée de $(U,Z^1,\dots,Z^m)$ où U est un ouvert de Ω et $Z^1,\dots,Z^m$ sont des fonctions hypo-analytiques définies dans U et satisfaisant (1).

Si u est une distribution définie dans Ω, son support singulier hypo-analytique est le complémentaire du plus grand ouvert contenu dans Ω où u est hypo-analytique en tout point de cet ouvert.

On désigne par T' le sous fibré du fibré cotangent complexe de Ω, $\mathbb{C}T^*\Omega$, engendré, dans une carte locale $(U,Z^1,\dots,Z^m)$, par $dZ^1,\dots,dZ^m$. De même, on désigne par $T'^{\perp}$ le sous-fibré de $\mathbb{C}T\Omega$ (fibré tangent complexe) orthogonal à T' pour la dualité entre espace tangent et espace cotangent. La dimension de la fibre de T' est m, celle de $T'^{\perp}$ est n. Enfin on désigne par T^o l'ensemble caractéristique

$$T^o = T' \cap T^*\Omega.$$

Une fonction (ou distribution) définie dans Ω (ou dans un ouvert plus petit) est appelé dans cet exposé "solution" si on a : $Lu = 0$, pour tout champ de vecteur complexe L, section locale de T'. Le résultat suivant est fondamental pour la suite :

Soit $p_o \in \Omega$, il existe une carte locale $(U,Z^1,\dots,Z^m)$, $p_o \in U$, telle que, si h est une "solution" de classe C^1 définie dans Ω, on ait

$$h = \tilde{h} \circ Z \quad \text{dans } U, \tag{3}$$

où $\tilde{h}$ est une fonction continue définie dans $Z(U)$.

L'hypo-analyticité de h en p_o est en fait équivalente à l'extension holomorphe au voisinage de $Z(p_o)$ de la fonction C.R. $\tilde{h}$, définie par (3).

Une sous-variété X de Ω de dimension m et de classe C^∞ est dite maximale réelle si pour toute carte locale hypo-analytique $(U,Z^1,\dots,Z^m)$ telle que $U \cap X \neq \emptyset$, les différentielles des restrictions de $Z^1,\dots,Z^m$ à X engendrent l'espace cotangent complexe de X. Le résultat suivant est très utile :

Soit $X \subset \Omega$ une variété maximale réelle passant par p_o. Pour qu'une solution h soit hypo-analytique en p_o, il faut et il suffit que la restriction de h à X soit hypo-analytique en p_o, pour la structure hypo-analytique induite sur X par celle de Ω (La structure induite est de codimension O !)

Donnons maintenant une description en coordonnées locales des objets introduits. Si $p_o \in \Omega$ et X une variété maximale réelle passant par p_o, on peut trouver une carte locale hypo-analytique $(U,Z^1,\ldots,Z^m)$, $p_o \in U$, et une système de coordonnées dans $U, x^1,\ldots,x^m, y^1,\ldots,y^n$ s'annulant en p_o tels que :

(4) $$U \cap X = \{y^j = 0,\ j = 1,\ldots,n\}$$

(5) $$Z^j(x,y) = x^j + \sqrt{-1}\,\phi^j(x,y),$$

avec $\phi^j(x,y) = y^j$ pour $1 \leqslant j \leqslant r$, $\phi^j(0) = 0$, $d\phi^j(0) = 0$ pour $r+1 \leqslant j \leqslant m$.

On peut trouver une base des sections C^∞ de T'_U de la forme

(6) $$L_j = \frac{\partial}{\partial y^j} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_j^k(x,y)\frac{\partial}{\partial x^k}, \quad j = 1,\ldots,n.$$

(On a $L_j Z^k = 0$ dans U, $1 \leqslant j \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant m$). Une "solution" h dans U est alors une distribution vérifiant

(7) $$L_j h = 0 \qquad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

II. FRONT D'ONDE HYPO-ANALYTIQUE EN CODIMENSION ZERO

Il est important d'étudier d'abord le cas où la codimension de la structure hypo-analytique est nulle. On suppose ici que $(U,Z^1,\ldots,Z^m)$ est une carte hypo-analytique de codimension zéro $(N = m,\ n = 0)$. Les coordonnées de U sont $x^1,\ldots,x^m$ s'annulant en $p_o \in U$. Quitte à rétrécir U, on peut supposer que Z est un difféomorphisme de U sur Z(U). Soit $Z_\#$ une extension presque complexe définie dans $U + i\mathbb{R}^m$ (à valeur dans $\mathbb{C}^m$).

Soient $\mathcal{O}$ un voisinage complexe de U, Γ un cône ouvert réel strictement convexe et A un ouvert de U. On pose

(8) $$\mathcal{N}_{\mathcal{O}}(A,\Gamma) = \{Z_\#(x+iv) \in \mathbb{C}^m,\ x \in A,\ v \in \Gamma\cup\{0\}, x+iv \in \mathcal{O}\}$$

et on désigne par $\mathcal{B}_{\mathcal{O}}(A,\Gamma)$ l'ensemble des fonctions holomorphes dans $\mathring{\mathcal{N}}_{\mathcal{O}}(A,\Gamma)$ à croissance tempérée près de Z(A). On montre alors que si $\tilde{f} \in \mathcal{B}_{\mathcal{O}}(A,\Gamma)$, elle admet une valeur au bord $b\tilde{f}$, qui est une distribution définie sur $Z(A)$ (ou A).

On définit maintenant une notion de "front d'onde hypo-analytique" qui coïncide avec la définition de Sato quand $Z(x) = x$.

<u>Définition 1</u> : Soient $u \in \mathcal{D}'(U)$ et $(x,\xi) \in U \times (\mathbb{R}_m \setminus \{0\})$. On dit que u est hypo-analytique en (x,ξ) si on peut trouver un voisinage ouvert V de x, $V \subset U$, un voisinage complexe $\mathcal{O}$ de U et un nombre fini de cônes ouverts non vides $\Gamma_k \subset \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ $k = 1,\dots,\nu$, tels que :

(i) pour tout $k = 1,\dots,\nu$ et tout $v \in \Gamma_k$

$$\langle\xi,v\rangle < 0.$$

(ii) pour tout $k = 1,\dots,\nu$ il existe $\tilde{f}_k \in \mathcal{B}_{\mathcal{O}}(V,\Gamma_k)$ telles que

$$u = \sum_{j=1}^{\nu} b\tilde{f}_j \quad \text{dans} \quad V .$$

On montre que la définition 1 est indépendante du choix de $Z_{\#}$ (prolongement presque holomorphe de Z).

Le complémentaire des points (x,ξ) de $T^*U \setminus 0$ où u est hypo-analytique est appelé le <u>front d'onde hypo-analytique</u> de u que l'on denote par $WF_{ha}(u)$.

On montre que la projection de $WF_{ha}(u)$ sur U coïncide avec le support singulier hypo-analytique de u.

Il sera très utile de donner une caractérisation du WF_{ha} par un critère de transformée de Fourier analogue à celui de Bros-Iagolnitzer et Sjöstrand quand $Z(x) = x$.

Soit u une distribution à support compact définie dans U. Pour $K > 0$ on pose

$$F^K(u;z,\zeta) = \int e^{-i\zeta.Z(y)-K\langle\zeta\rangle\,[z - Z(y)]^2}\, u(y)\,dZ(y) , \tag{9}$$

avec $z \in \mathbb{C}^m$, $\zeta \in \mathbb{C}^m$, $|\mathrm{Im}\,\zeta| < |\mathcal{R}e\,\zeta|$, $\langle\zeta\rangle = (\sum_{j=1}^{m} \zeta_j^2)^{1/2}$, $[z]^2 = \sum_{j=1}^{m} (z^j)^2$.

On s'intéressera à la décroissance exponentielle de F^K quand $|\zeta| \to \infty$. Plus précisément, soit $\xi^0 \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, on introduit la propriété suivante :

$(10)_K$ Il existe V un voisinage complexe de l'origine dans $\mathbb{C}^m$, un cône $\mathcal{C}$ de $\mathbb{C}^m \setminus \{0\}$ contenant ξ^0 ainsi que des nombres positifs R et C tels que $|F^K(u,z,\zeta)| \leqslant C\,e^{-|\zeta|/R}, \forall z \in V, \ \forall \zeta \in \mathcal{C}$.

Nous avons alors les deux théorèmes suivants :

<u>Théorème 1</u> : Soit $u \in \mathcal{E}'(U)$. On suppose que $(0,\xi^o) \notin WF_{ha}u$. On pose $\dot{\xi}^o = \frac{\xi^o}{|\xi^o|}$.

Pour tout $K > 0$, il existe $C > 0$ tel que si, pour tout $x \in U$,

$$|\dot{\xi}^o.\mathrm{Im}\, Z(x)| \leqslant c\,|\mathcal{R}e\, Z(x)| + \frac{K}{4}|\mathrm{Re}\, Z(x)|^2$$

alors $(10)_K$ est satisfaite.

<u>Théorème 2</u> : On suppose

$$\mathrm{Im}\, Z(0) = 0.$$

Il existe $K_* > 0$ tel que si $u \in \mathcal{E}'(U)$ et satisfait $(10)_K$ pour un $K > K_*$ alors $(0,\xi^o) \notin WF_{ha}(u)$.

III. <u>FRONT D'ONDE HYPO-ANALYTIQUE EN CODIMENSION ARBITRAIRE</u>

Nous revenons maintenant au cas général décrit dans le paragraphe I où Ω est munie d'une structure hypo-analytique de codimension $n > 0$. Nous allons définir le front d'onde hypo-analytique seulement dans le cas des "solutions". (Il est à noter que quand $n = 0$, toutes les distributions définies dans Ω sont des "solutions" !) Auparavant nous aurons besoin d'un certain nombre de résultats préliminaires.

Si X est une variété maximale réelle contenue dans Ω, on désigne par π_X la projection canonique de $T^*\Omega$ sur T^*X. On note que π_X restreinte à l'ensemble caractéristique $T^o = T' \cap T^*\Omega$ est injective. Un point de $T^*X \setminus 0$ est dit <u>caractéristique</u> s'il est dans $\pi_X(T^o|_X)$. Autrement on dit qu'il est <u>non caractéristique</u>.

Nous avons les résultats suivants :

<u>Proposition 1</u> : Si h est une solution, $WF_{ha}(h|_X)$ est contenu dans l'ensemble des points caractéristiques de T^*X.

<u>Proposition 2</u> : Soient X et Y deux variétés maximales réelles passant par $p_o \in \Omega$ et $(p_o, \xi^o) \in T^o$. Si h est une solution et $\pi_X(p_o, \xi^o) \notin WF_{ha}(h|_X)$ alors

$$\pi_Y(p_o,\xi^o) \notin WF_{ha}(h|_Y)\ .$$

Les propositions 1 et 2 ci-dessus permettent d'introduire la définition suivante :

Définition 2 : Soient $(p_o,\xi^o) \in T^*\Omega$ et h une solution dans Ω . On dit que $(p_o,\xi^o) \in WF_{ha}(h)$ si et seulement si il existe une variété X maximale réelle passant par p_o telle que $\pi_X(p_o,\xi^o) \in WF_{ha}(h|_X)$.

Il résulte de la proposition 1 et de la définition 2 que si h est une solution, on a : $WF_{ha}(h) \subset T^o$.

On peut montrer que $WF_{ha}(h)$ est un ensemble conique fermé de $T^*\Omega \setminus 0$, et que sa projection sur Ω coïncide avec le support singulier hypo-analytique de h.

IV. FORME DE LEVI ET HYPO-ANALYTICITE MICROLOCALE

Soient $(w,\theta) \in T^o$, v_1, v_2 deux vecteurs de $T'^{\perp}_w$ et V_1, V_2 deux champs de vecteurs C^∞ , sections de $T'^{\perp}$ tels que $V_j|_w = v_j$, j = 1,2. La forme de Levi au point (w,θ), évaluée sur le couple (v_1,v_2) est définie par

$$\mathcal{L}_{(w,\theta)}(v_1,v_2) = \frac{1}{2i} < \theta, [V_1,\overline{V}_2]_w > .$$

On lui associe la forme quadratique

$$\mathcal{L}_{(w,\theta)}(v) = \mathcal{L}_{(w,\theta)}(v,v) .$$

Nous avons le résultat microlocal suivant :

Théorème 3 : On suppose qu'il existe $v \in T'^{\perp}_w$ tel que $\mathcal{L}_{(w,\theta)}(v) < 0$. Alors si h est une solution définie au voisinage de w on a

$$(w,\theta) \notin WF_{ha}(h).$$

Le résultat suivant est presque une réciproque du théorème 3.

Théorème 4 : On suppose que la forme de Levi au point (w,θ) est définie positive. Alors il existe un voisinage U de w et une solution $h \in C^1(U)$ tels que

$$WF_{ha}(h|_U) = \{(w,\rho\theta) , \quad \rho > 0\}.$$

Signalons enfin un résultat récent de C. H. Chang. Quand la forme de Levi en (w,θ) est identiquement nulle, Chang montre que s'il existe une section V de $T'^{\perp}$ telle que

$$<\theta,[V,[V,\bar{V}]]_w> \neq 0$$

alors la conclusion du théorème 3 reste valable.

Nous concluons cet exposé par un exemple :
On prend pour Ω un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^4$ où la variable est (x^1,x^2,y^1,y^2). La structure hypo-analytique est définie par : $(m = n = 2)$

$$Z^1(x,y) = x^1 + i[((y^1)^2 - (y^2)^2) + f(x,y)],$$

$$Z^2(x,y) = x^2 + i[(y^1)^3 + g(x,y)] ,$$

où $f, g \in C^{\infty}(\Omega)$, f s'annulant à l'ordre 2 à l'origine et g à l'ordre 3.

Toute solution h définie au voisinage de l'origine est hypo-analytique en O. En effet, on a

$$T^o_o = \{adx^1 + bdx^2 , \quad |a| + |b| \neq 0\} .$$

Si $\xi = adx^1 + bdx^2$ et $a \neq 0$, on peut appliquer le théorème 3 et conclure que $(0,\xi) \notin WF_{ha}(h)$. Si $a = 0$, la forme de Levi en $(0,\xi)$ est identiquement nulle. On peut alors appliquer le résultat de Chang mentionné plus haut pour conclure que $(0,\xi) \notin WF_{ha}(h)$. Ceci montre que le front d'onde hypo-analytique à l'origine est vide, et on en conclut que h est hypo-analytique en ce point.

---

[1] M. S. Baouendi, C. H. Chang, F. Treves : Microlocal hypo-analyticity and extension of CR functions.