Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

C. Bardos

Les équations de Kelvin-Helmotz. Un problème bien posé uniquement dans le cadre analytique

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1981-1982), exp. nº 1, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1981-1982____A1_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z   1 9 8 1 - 1 9 8 2

LES EQUATIONS DE KELVIN-HELMOTZ UN PROBLEME BIEN POSE UNIQUEMENT DANS LE CADRE ANALYTIQUE

C. BARDOS

(d'après un travail en commun avec
C. Sulem, P. L. Sulem et U. Frisch)

Exposé n° I

13 Octobre 1981

I. INTRODUCTION

On considère l'équation d'Euler de la mécanique des fluides dans $\mathbb{R}^2$.

(1) $$\frac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla u = -\nabla p, \ \nabla.u = 0, \ u(x,0) = u_0(x).$$

Pour toute solution régulière de (1) on dispose des estimations a priori suivantes :

(2) $$\int_{\mathbb{R}^2} |u(x,t)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^2} |u(x,0)|^2 dx$$

(3) $$\int_{\mathbb{R}^2} |(\nabla \wedge u)(x,t)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^2} |(\nabla \wedge u)(x,0)|^p dx$$

(4) $$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} |(\nabla \wedge u)|(x,t) = \sup_{x \in \mathbb{R}^2} |(\nabla \wedge u)(x,0)|.$$

L'estimation (2) dite égalité de l'énergie est valable en toute dimension d'espace, tandis que les estimations (3) et (4) sont propres à la dimension deux et sont dues au fait suivant.

En dimension deux le rotationnel de u est un scalaire $\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$ qui s'identifie à un vecteur perpendiculaire au plan x_1, x_2 et ainsi il est constant sur toute trajectoire du mouvement.

Les estimations (2) et (3) permettent de passer à la limite (pour $\varepsilon \to 0$) dans les termes non linéaires $\frac{\partial}{\partial x_i}(u_i^\varepsilon u^\varepsilon)$ où u^ε désigne une solution approchée convenable et de prouver le

<u>Théorème 1</u> (Youdovitch [11] , Bardos [2]) : <u>Pour toute donnée initiale</u> u_0 <u>appartenant à</u> $(L^2(\mathbb{R}^2))^2$ <u>et vérifiant</u> $\nabla \wedge u_0 \in L^p(\mathbb{R}^2)$ $(1 < p \leqslant \infty)$ <u>il existe une solution faible</u> $u \in L^\infty(\mathbb{R}_t;(L^2(\mathbb{R}^2))^2)$ <u>qui vérifie l'estimation supplémentaire.</u> $\nabla \wedge u \in L^\infty(\mathbb{R}_t ; L^p(\mathbb{R}^2))$.

Si $p = +\infty$ on peut prouver l'unicité de la solution faible ([2] ,[11]) et de plus si $\nabla \wedge u_0 \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^2)$ on peut prouver que pour tout $t \in \mathbb{R}$ $(\nabla \wedge u)(.,t)$ appartient à $C^{0,\alpha(t)}$ ou $\alpha(t) = \alpha \exp - K|t|$. Cette dernière relation n'est pas immédiate à établir et utilise la dispersion de paire c'est-à-dire le contrôle de la distance de deux particules du fluide en fonction de la norme uniforme de $\nabla \wedge u$. (Kato [5] , Wolibner [10] ou Schaeffer [7]).

Si p est égal à 1 une difficulté supplémentaire apparaît, due au fait que $L^1(\mathbb{R}^2)$ n'est pas reflexif. Le théorème 1 reste valable mais on ne peut assurer que $\nabla \wedge u$ appartienne à $L^1(\mathbb{R}^2)$ u appartient alors a un espace qui s'apparente à l'espace des fonctions à variation bornées : l'espace des fonctions à déformations bornées, cf. Strang et Temam [9].

On considère maintenant une donnée initiale u_o, appartenant à $L^2(\mathbb{R}^2)$, dont le rotationnel est une densité régulière concentrée sur une courbe également régulière Γ :

$$\nabla \wedge u_o = \omega(\sigma) \otimes \delta_\Gamma \quad .$$

On peut alors adapter la démonstration du Théorème 1 pour prouver le

Théorème 2 [8] : Si $u_o \in L^2(\mathbb{R}^2)$ et vérifie la relation

$$\nabla \wedge u_o = \omega_o(\sigma) \otimes \delta_{\Gamma_\sigma} , \quad \int_\Gamma |\omega_o(\sigma)| d\sigma < \infty. \tag{5}$$

le problème (1) admet une solution faible appartenant à l'espace des fonctions à déformations bornées.

La démonstration de ce théorème se fait en introduisant une suite de fonctions régularisantes ρ_ε convergeant vers δ , d'intégrale totale égale à 1 et en remarquant que l'on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \wedge u(x,t)|\, dx &= \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \wedge u(x,0)| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left| \int_\Gamma \rho_\varepsilon(x-\sigma)\omega(\sigma) d\sigma \right| dx \\ &\leqslant \int_\Gamma |\omega(\sigma)| d\sigma \ . \end{aligned} \tag{6}$$

II. LES EQUATIONS DE KELVIN-HELMOTZ

On se propose maintenant de voir si la propriété de la donnée initiale, d'avoir son rotationnel concentré le long d'une courbe persiste au cours du temps autrement dit si la courbe de séparation existant à l'instant t = O entre deux fluides irrotationnels et de même densité va persister. Pour cela on commence par établir l'équation de cette courbe. On a la

Proposition 1 [8] : On désigne par $y = y(x,t)$ une famille de courbes du plan $(x,y) = \mathbb{R}^2$ et par u une solution faible de l'équation d'Euler. On suppose que $(\nabla \wedge u)(.,t)$ est nul en dehors de la courbe Γ et que u admet des limites u^+ et u^- de part et d'autre de Γ. On note $v = (u^+ + u^-)/2$ la moyenne entre ces deux limites, $\omega = u_\tau^+ - u_\tau^-$ la différence entre les deux composantes tangentielles de u^+ et de u^- et Ω l'expression $\sqrt{1+y_x'^2}$. Alors on a les équations

(7) $$v_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y(x,t) - y(x',t)}{(x-x')^2 + (y(x,t) - y(x',t))^2} \Omega(x',t)dx'$$

(8) $$v_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{x - x'}{(x-x')^2 + (y(x,t) - Y(x',t))^2} \Omega(x',t)dx'$$

(9) $$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\Omega\, v_1) = 0$$

(10) $$\frac{\partial y}{\partial t} + v_1 \frac{\partial y}{\partial x} = v_2 .$$

Démonstration : Il sera utile de désigner par τ et η les vecteurs unitaires, tangents et normaux à Γ. Comme u vérifie la relation $\nabla . u = 0$, au sens des distributions, on a sur Γ $u_n^+ = u_n^-$; on en déduit que le rotationnel de u, concentré sur Γ est donné par :

$$\nabla \wedge u = (u_\tau^+ - u_\tau^-) \otimes \delta_\Gamma = \omega \otimes \delta_\Gamma$$

Comme u est à divergence nulle, il existe un potentiel des vitesse φ tel que l'on ait :

$$u = \nabla \wedge \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} , - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) ,$$

on en déduit que u est déterminé en fonction de ω , par les relations :

$$- \Delta \varphi = \omega \otimes \delta_\Gamma , \quad u = \nabla \wedge \varphi$$

ce qui conduit aux formules (7) et (8). Dire que u est solution faible équivaut à dire que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ on a :

(11) $$\langle u, \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \wedge \varphi)\rangle + \sum_{i=1}^{2} \langle u_i u, \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \wedge \varphi)\rangle = 0$$

En intégrant par parties en dehors de Γ et en utilisant en dehors de Γ les relations

(12) $$\nabla \wedge u = 0 \quad \text{et} \quad \nabla \wedge \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} u_i u = u\, \nabla\, (\nabla \wedge u) = 0,$$

on obtient successivement les

(13) $$0 = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_\Gamma ([u] \wedge n) \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, dt$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_\Gamma ([u_i u] \wedge n) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{2} n_i (\nabla \wedge (u_i u) \varphi)\, dt$$

(14) $$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_\Gamma ([u] \wedge n) \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, d\sigma$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} w(x,y(t,x)) \frac{\partial \varphi}{\partial t} (x,y(t,x)) \sqrt{1+y_x'^2}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \Omega \frac{\partial \psi}{\partial t}\, dx - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \Omega \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}\, dx \; (\blacklozenge)$$

(15) $$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_\Gamma ([u_i u] \wedge n) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_\Gamma ([u_1 u_\tau] \frac{\partial \varphi}{\partial x} + [u_2 u_\tau] \frac{\partial \varphi}{\partial y})\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_\Gamma ([u_1 u_\tau] \frac{\partial \psi}{\partial x} + [(u_2 - y_x' u_1) u_\tau] \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} [(u_\tau^2 + y_x' u_n) u_n) u_\tau] \frac{\partial \psi}{dx}\, dx$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} (v_2 - y_x' v_1)\, \Omega \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} ((u_\tau^+ + u_\tau^-) + y_x' u_n)\, \omega \frac{\partial \psi}{\partial x}\, dx$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} (v_2 - y_x' v_1)\, \Omega \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dx .$$

($\blacklozenge$) Dans (14) et dans les formules suivantes ψ désigne la fonction des deux variables x et t définie par la relation $\psi(x,t) = \varphi(x,y(x,t),t)$.

$$(16) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^{2} n_i (\nabla \wedge u_i u) \varphi \, ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\Gamma} [\nabla u_n \wedge u] \, \varphi \, ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\Gamma} [u_n \frac{\partial u_n}{\partial \tau} - u_\tau \frac{\partial u_n}{\partial n}] \varphi \, ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \tau} (u_n^2/2 + u_\tau^2/2) \varphi \, ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} (\omega (\frac{u_2^+ + u_2^-}{2})) \varphi \, ds$$

En regroupant les termes en $\psi(x,t)$ (après avoir effectué les intégrations par parties en x et t) et les termes en $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ on obtient :

$$(17) \qquad 0 = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \{ \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\Omega \, v_1) \} \, \varphi(x, y(x,t)) dx$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \{ \frac{\partial y}{\partial t} + y'_x \, v_1 - v_2 \} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx = 0 \; .$$

d'où l'on déduit (9) et (10) . ■

<u>Remarque</u> : Les équations (9) et (10) ont une interprétation mécanique naturelle; historiquement c'est par cette interprétation qu'elles ont été introduites (♦). L'équation (10) signifie que dans $\mathbb{R}^2_{x,y} \times \mathbb{R}_t$ le champ $(v_1, v_2, 1)$ est tangent à la surface $y = y(x,t)$ ainsi le mouvement de la courbe Γ est décrit en "coordonnées lagrangiennes" par les équations :

$$(18) \qquad \dot{m}(\alpha,t) = V(m(\alpha,t),t) \; ; \; m_1(\alpha,0) = \alpha \; .$$

L'équation (9) signifie alors que la quantité $\Omega(\alpha,t) \frac{\partial m_1}{\partial \alpha}(\alpha,t)$ est constante au cours du temps. Ainsi les équations (7) et (8) peuvent être écrites sous la forme :

(♦) cf. [3] .

(19) $$v_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y(\alpha,t) - y(\alpha',t)}{(\alpha-\alpha')^2 + (y(a,t)-y(\alpha',t))^2} \Omega(\alpha',0)d\alpha'$$

(20) $$v_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{x(\alpha,t) - x(\alpha',t)}{(\alpha-\alpha')^2 + (y(\alpha,t) - y(\alpha',t))^2} \Omega(\alpha',0)d\alpha' .$$

En posant $Z = m_1(\alpha,t) + im_2(\alpha,t)$ on peut enfin réécrire tout le système (7) - (10) sous la forme

(21) $$\frac{\partial \bar{Z}}{\partial t} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\Omega(\alpha',0)d\alpha'}{Z(\alpha,t) - Z(\alpha,t)}$$

qui ressemble beaucoup aux intégrales singulières étudiées par Coiffman et Meyer [4].

III. L'INSTABILITE DES EQUATIONS DE KELVIN-HELMOTZ ET LA RESOLUTION DANS LE CADRE ANALYTIQUE

On va montrer sur un exemple que le problème (7) - (10) est en général mal posé dans le cadre $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. On désigne par U l'ensemble des fonctions Ω, y, v_1, v_2 de manière à écrire (7) - (10) sous la forme $\frac{dU}{dt} = F(U)$. On va ensuite exhiber un état stationnaire, c'est à dire un ensemble de données initiales U_o vérifiant $F(U_o) = 0$. Si le problème est bien posé dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ une petite variation de U_o : δU_o doit conduire à une petite variation de U(t), avec la linéarisation du problème autour de U_o :

(22) $$\frac{d}{dt} \delta U = \nabla F(U_o) . \delta U$$

doit consuire à un problème bien posé dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, on va montrer que ceci n'est pas vrai.

On suppose qu'à l'instant t = 0 le fluide est formé de deux nappes horizontales qui glissent l'une sur l'autre à vitesse constante ce qui donne :

$$y(x,0) = 0 , \quad u_1^+(x,y) = -A , \quad u_1^-(x,y) = A,$$

$$u_2^+ = u_2^- = 0 .$$

On a ainsi : $v_1 = v_2 = 0$ et $\Omega = 2A$.

L'équation (22) s'écrit alors en variable de Fourier :

(23) $$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{\partial\Omega}\,(\xi) + 2A\,i\,\xi\,\widehat{\partial v_1}(\xi) = 0$$

(24) $$\frac{\partial}{\partial t}\,\widehat{\partial y}(\xi) - \partial v_2(\xi) = 0$$

(25) $$\widehat{\partial v_1} = \frac{A}{\pi}\, i\xi \;\; \widehat{\partial y}\,(\xi)\; Y(\xi)$$

(26) $$\widehat{\partial v_2} = \frac{1}{2\pi}Y(\xi)\;\widehat{\partial\Omega}(\xi)$$

où $Y(\xi)$ désigne la fonction de Heaviside, soit en éliminant $\widehat{\partial v_n}$ et $\widehat{\partial v_2}$:

(27) $$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\widehat{\partial\Omega}\\ \widehat{\partial y}\end{pmatrix} - (Y(\xi)/\pi)\begin{pmatrix}0, & 4A^2\xi^2\\ 1, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widehat{\partial\Omega}\\ \widehat{\partial y}\end{pmatrix} = 0\,.$$

et on voit que les valeurs propres de la matrice $\exp \frac{t}{\pi}\begin{pmatrix}0\,, & 4A^2\xi^2\\ 1\,, & 0\end{pmatrix}$ sont $\exp \pm\, t\,\frac{2A}{\pi}\,\xi$. Ainsi l'opérateur n'est pas un multiplicateur dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ mais seulement dans l'espace des fonctions réelles qui se prolongent en des fonctions analytiques dans une bande de largeur $\frac{2A}{\pi}|t|$ autour de l'axe réel.

Ceci conduit a introduire une échelle d'espaces H^s : H^s désigne l'espace des fonctions réelles $f(x)$ qui se prolongent en des fonctions $f(x + i\eta)$ holomorphes dans la bande $B_s = \{(x+i\eta) \mid |\eta| < s\}$ muni de la norme :

(28) $$\|f\|_s = \sup_{z\,\in\, B_s} |f(z)| + \sup_{z\,\in\, B_s,\, z'\in B_s} \frac{|f(z) - f(z')|}{|z - z'|^{\alpha}}$$

Bien entendu lors de ce prolongement la fonction $y(x)$ cesse d'être réelle et dans les estimations il est indispensable de contrôler la taille $1/((z - z')^2 + (y(z) - y(z'))^2$. Ceci conduit à remplacer le (7) - (10) par un système faisant intervenir les dérivées premières et secondes de df. On considère alors le système :

$$(29)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\Omega}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(v_1\ \Omega) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial t} + y_x v_1 - v_2 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial t}\, y_x + \dfrac{\partial}{\partial x}\,(y_x v_1 - v_2) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial t}\, y_{xx} + \dfrac{\partial}{\partial x}(y_{xx} v_1 + y_x \dfrac{\partial v_1}{\partial x} - \dfrac{\partial v_2}{\partial x} = 0 \\[2ex] v_1 = -\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\fint \dfrac{y(x,t) - y(x',t)}{(x-x')^2 + (y(x,t) - y(x',t))^2}\,\Omega\ (x',t)dx' \\[2ex] v_2 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\fint \dfrac{x - x'}{(x-x')^2 + (y(x,t) - y(x',t))^2}\,\Omega\ (x',t)dx' \end{cases}$$

On peut alors en écrivant le système (54) sous la forme $\frac{\partial u}{\partial t} = F(U)$ utiliser les échelles d'espaces H^s. On montre que l'on peut alors appliquer le théorème de Cauchy-Kowaleswy, sous la version donnée par Baouendi et Goulaouic [1] , à ce problème et on obtient le

<u>Théorème 3</u> [8] : <u>On suppose que les données initiales</u> y <u>et</u> Ω <u>appartiennent à un espace</u> H^{s_0}, <u>on suppose que la norme de</u> $\frac{dy}{dx}$ <u>dans cet espace est intérieure à 1/2. Alors il existe un temps</u> T <u>(dépendant de la taille des données initiales) tel que, pour</u> $|t| < T$ <u>le problème</u> (29), <u>admette pour ces données initiales, une solution analytique.</u>

<u>Remarques</u> : La méthode de résolution proposée utilise la résolution explicite $y = y(x,t)$ de la courbe d'interface en terme de la première composante x. Elle ne permet par d'atteindre des situations où cette courbe présenterait des "rouleaux". Cette faiblesse de la méthode peut être compensée par une observation "numérique" de Meiron Baker et Orszag [6] , qui ont montré que pour ce problème, la perte d'analyticité pouvait se produire avant la formation de rouleaux.

Les théorèmes 1 et 2 cessent d'être valables en dimension supérieure à deux, par contre il est toujours possible de construire, à partir de l'équation d'Euler un système d'équation pour l'interface, de prouver l'instabilité du problème linéarisé dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et de montrer l'existence pour un temps petit d'une solution analytique.

De nombreux problèmes restent ouverts, on en cite quelques uns qui sont peut-être accessibles :

1 . Prouver l'unicité de la solution (dans la classe des solutions faibles) lorsqu'il existe une solution dont le rotationnel est concentré sur une courbe

analytique.

2. Généraliser cette étude à des systèmes compressibles et en particulier étudier le cas de données initiales analytiques en dehors d'une courbe (ou d'une surface) analytique, mais dont le rotationnel n'est plus nul en dehors de cette courbe (ou surface). Ceci conduirait à une étude de propagation de singularités pour des problèmes non linéaires dans le cadre analytique.

3. Ne pas chercher à atteindre la formation de rouleaux à partir d'une donnée initiale $y = y(t,x)$ résoluble en x mais se donner à l'instant $t = 0$ une interface analytique présentant des rouleaux.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. S. Baouendi et C. Goulaouic : Remarks on the abstract form of non linear Cauchy-Kowalewsky theorems. Comm. in Partial Diff. Eq. 2 (11) 1151-1162 (1977).

[2] C. Bardos : Existence et unicité de la solution de l'équation d'Euler en deux dimension. J. Math. Analysis and Appl. (1972) 769-790.

[3] G. Birkoff, Helmotz, and Taylor : Instability in hydrodynamic instability, Proc. Symposium on Applied Math. 23, A.M.S.

[4] R. Coiffman et Y. Meyer : Une généralisation du théorème de Calderon sur l'intégrale de Cardy. Prépublication Université de Paris-Sud Department de Mathématiques, Bât. 425, Orsay.

[5] T. Kato : On the classical solution of the two dimensional non stationary Euler Equation Arch. Rat. Mech. and Anal. (25) (1967) 302-324.

[6] D. Meiron, G. Baker and S. Orszag : Analytic structure of vertex sheet dynamic. Preprint M.I.T., Department of Mathematics, Cambridge MA 02139.

[7] A. C. Schaeffer : Existence theorem for the flow of an incompressible fluid in two dimension. Trans. of the A. M. S. 42 (1937) 497-513.

[8] C. Sulem, P. L. Sulem, C. Bardos et U. Frisch : Finite true analyticity for the two and three dimensional Kelvin-Helmotz instability. Comm. in Math. Phys. 80 (1981) 485-516.

[9] C. Strang et R. Temam : Existence de solutions pour les équations de la plasticité. Etude d'un espace fonctionnel. C. R. Acad. Sc. Paris Ser. A.B 287 (1978) n°7, A515-A518.

[10] W. Wolibner : Un théorème sur l'existence du mouvement plan d'un fluide parfait homogène et incompressible pendant un temps infiniment long . Math. Z. 37 (1933) p.727-738.

[11] V. I. Youdovich : Ecoulement non stationnaire d'un fluide idéal non visqueux. J. Math. Numer. Phys. Math. 6 (1965), 1032-1066.

*
* *
*