Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

L. Tartar

Systèmes hyperboliques non linéaires

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1981-1982), exp. nº 18, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1981-1982____A17_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z   1 9 8 1 - 1 9 8 2

SYSTEMES HYPERBOLIQUES NON LINEAIRES

par L. TARTAR

Exposé n° XVIII

8 Décembre 1981

Dans l'histoire récente de la résolution des systèmes hyperboliques non linéaires, on trouvait deux dates importantes : 1957, avec les travaux de P. Lax [3] sur le problème de Riemann et 1965, avec les travaux de J. Glimm [2] qui donnaient les premiers résultats d'existence globale; je pense qu'on en retiendra plus tard une troisième : 1981, avec les derniers travaux de R. Di Perna [1].

Entre 1965 et 1980 de nombreux travaux ont été publiés ; on y retrouve les noms de C. Dafermos, R. Di Perna, T. P. Liu, T. Nishida, J. Smoller qui étendent les travaux de Lax et Glimm et fournissent des théorèmes d'existence globale du type : si les données initiales sont à variation bornée et de variation assez petite (cette hypothèse de petitesse peut quelquefois être supprimée) alors il y a existence globale d'une solution. Les résultats de Di Perna basés sur l'utilisation de la méthode de compacité par compensation que j'avais développée dans ce but, permettent, dans certains cas, d'obtenir des solutions globales à partir de données seulement bornées.

I. LA METHODE

J'ai exposé la méthode il y a quelques années dans ce séminaire [5]. Le lecteur désirant s'initier aux systèmes hyperboliques non linéaires trouvera là une description de quelques résultats classiques. Ici je voudrai décrire le résultat principal de Di Perna [1] et me limiter aux concepts utilisés dans la méthode et la démonstration.

On s'intéresse à des équations du type

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x} F(U) = 0 & x \in \mathbb{R}, \quad t \geqslant 0 \\ U(x,0) = V(x) & \end{cases}$$

$U \in \mathbb{R}^p$ et F est régulière de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$.

Il est important de noter que, comme des solutions discontinues seront considérées, on ne doit pas écrire $F'(U)\,\dfrac{\partial U}{\partial x}$ qui n'aurait pas de sens.

Si U est une solution régulière de (1) alors elle vérifie d'autres équations et c'est là qu'apparaît la notion d'entropie, Lax [4] :

<u>Définition 1</u> : Une fonction réelle φ , définie sur $\mathbb{R}^p$, est une entropie du système (1) s'il existe ψ tel que

$$(2) \qquad \varphi'(v).F'(v) = \psi'(v) \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^p \quad \blacksquare$$

Alors si U est régulière on déduit de (1) et (2) que $\frac{\partial}{\partial t}\varphi(U) + \frac{\partial}{\partial x}\psi(U) = 0$. Mais comme on s'intéresse aux solutions discontinues cela ne sera pas vrai et Lax [4] a introduit la condition suivante :

<u>Définition 2</u> : Une solution de (1) satisfait les conditions d'entropie si

$$(3) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\varphi(U) + \frac{\partial}{\partial x}\psi(U) \leqslant 0 \quad \text{pour toute entropie } \varphi \text{ convexe.} \quad \blacksquare$$

Remarquons que (3) implique (1) en utilisant les entropies triviales : c'est-à-dire φ affine en U.

Cette condition s'obtient naturellement si on considère la méthode de viscosité artificielle

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial U_\varepsilon}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x} F(U_\varepsilon) - \varepsilon \dfrac{\partial^2 U_\varepsilon}{\partial x^2} = 0 \\ U_\varepsilon(x,0) = V(x) \end{cases}$$

Alors U_ε étant régulière on déduit, après multiplication par $\varphi'(U_\varepsilon)$, que

$$(5) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\varphi(U_\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x}\psi(U_\varepsilon) - \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(U_\varepsilon) + \varepsilon\varphi''(U_\varepsilon)\left(\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x},\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x}\right) = 0$$

Si on savait extraire une sous suite $U_{\varepsilon'}$ convergeant presque partout vers U (avec une estimation naturelle sur $\sqrt{\varepsilon}\,\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x}$) on pourrait passer à la limite quand ε' tend vers 0 et le terme $\varepsilon\varphi''(U_\varepsilon)\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial x}$) qui est borné dans L^1 et positif convergerait vers une mesure positive, ce qui donnerait (3)

[Lax a aussi montré qu'on obtenait cette condition à partir de schémas numériques aux différences finies, toujours si on savait exhiber une suite convergeant presque partout].

La convergence presque partout résulte en général d'un théorème de compacité qui utilise des informations sur les dérivées des U_ε (dans L^1, ce qui à la limite fournit des fonctions à variation bornée). L'idée de la méthode est d'utiliser la compacité par compensation, exposée dans [6], pour pouvoir conclure avec simplement des estimations L^∞ (et aussi l'estimation sur $\sqrt{\varepsilon}\,\dfrac{\partial U_\varepsilon}{\partial x}$). On ne sert que du cas particulier suivant :

<u>Lemme 1</u> : Si des suites $v_{j\varepsilon}, j = 1,4$ vérifient

a) $v_j\varepsilon \rightharpoonup v_j$ dans L^∞ faible $*$ $j = 1,4$

b) $\begin{cases} \dfrac{\partial U_{1\varepsilon}}{\partial t} + \dfrac{\partial U_{3\varepsilon}}{\partial x} \in \text{compact de } H^{-1} + \text{borné } L^1 \\ \dfrac{\partial U_{2\varepsilon}}{\partial t} + \dfrac{\partial U_{4\varepsilon}}{\partial x} \in \quad \text{"} \end{cases}$

Alors $v_{1\varepsilon}\, v_{4\varepsilon} - v_{2\varepsilon}\, v_{3\varepsilon} \rightharpoonup v_1 v_u - v_2 v_3$ dans L^∞ faible $*$

On utilisera 5 pour vérifier b) avec $v_{1\varepsilon} = \varphi(U_\varepsilon)$, $v_{3\varepsilon} = \psi\,(U_\varepsilon)$

$v_{2\varepsilon} = \bar{\varphi}(U_\varepsilon)$, $v_{4\varepsilon} = \bar{\psi}(U_\varepsilon)$ où $\bar{\varphi}$ est une autre entropie. Cela donne

<u>Proposition 1</u> : Si on sait montrer sur le système 4 l'estimation

$$(E) \qquad \begin{cases} U_\varepsilon \text{ borné dans } (L^\infty)^p\,, \\ \sqrt{\varepsilon}\,\dfrac{\partial U_\varepsilon}{\partial x} \text{ borné dans } (L^2)^p\,. \end{cases}$$

Si φ_1, φ_2 sont 2 entropies (associées à ψ_1, ψ_2).

Si $\varphi_j(U_\varepsilon) \rightharpoonup v_j$ et $\psi_j(U_\varepsilon) \rightharpoonup v_{j+2}$ dans L^∞ faible $*$ alors

$$\varphi_1(U_\varepsilon)\ \psi_2(U_\varepsilon) - \varphi_2(U_\varepsilon)\ \psi_1(U_\varepsilon) \rightharpoonup v_1 v_4 - v_2 v_3 \quad \text{dans } L^\infty \text{ faible } * \ ■$$

On voit que la méthode utilise les limites faibles de nombreuses fonctions de U_ε et pour les décrire toutes on fait appel aux fonctions généralisées de L. C. Young :

<u>Proposition 2</u> : Si U_ε est borné dans $(L^\infty)^p$ et prend ses valeurs dans un fermé K de $\mathbb{R}^p$, il existe une sous-suite $U_{\varepsilon'}$ et une famille (mesurable) de probabilités $\nu_{x,t}$ à support dans K telle que : pour toute fonction G on a

$$6 \qquad \begin{cases} G(U_{\varepsilon'}) \rightharpoonup g \text{ dans } L^\infty \text{ faible } * \text{ où} \\ g(x,t) = \langle \nu_{x,t}, G\rangle \text{ p.p.} \ ■ \end{cases}$$

On voit donc que, dans la proposition 1, $v_j = \langle \nu_{xt}, \varphi_j \rangle$, $v_{j+2} = \langle \nu_{x,t}, \psi_j \rangle$ et on a donc montré le

<u>Théorème 1</u> : Sous l'hypothèse (E) si ν_{xt} est la famille de probabilités associée à une sous-suite $U_{\varepsilon'}$ alors pour tout couple d'entropies $\varphi, \bar{\varphi}$ (associées à $\psi, \bar{\psi}$) on a :

$$(7) \quad \langle \nu_{x,t}, \varphi\bar{\psi} - \bar{\varphi}\psi \rangle = \langle \nu_{x,t}, \varphi \rangle \langle \nu_{x,t}, \bar{\psi} \rangle - \langle \nu_{x,t}, \bar{\varphi} \rangle \langle \nu_{x,t}, \psi \rangle \text{ p.p. } x,t \ . \blacksquare$$

[Comme dans tous les cas on saura trouver une famille dénombrable dense d'entropies on trouve que pour presque tout x,t $\nu_{x,t}$ vérifie (7) $\forall \varphi , \bar{\varphi}$]

<u>Résumé</u> : La méthode est donc d'avoir ramené le problème à

1. Obtenir l'estimation (E)
2. Caractériser les probabilités ν vérifiant

$$(8) \quad \begin{cases} \langle \nu, \varphi\bar{\psi} - \bar{\varphi}\psi \rangle = \langle \nu, \varphi \rangle \langle \nu, \bar{\psi} \rangle - \langle \nu, \bar{\varphi} \rangle \langle \nu, \bar{\psi} \rangle \\ \text{pour toutes les entropies } \varphi, \bar{\varphi} \end{cases} \quad \blacksquare$$

Le cas p = 1 est complètement caractérisé :

<u>Théorème 2</u> [6] : Si p = 1 (8) équivaut à

(9) ν est à support dans un intervalle où F est affine . ∎

Ceci montre que $F(U_{\varepsilon'})$ converge vers F(U) dans L^∞ faible * et $F'(U_\varepsilon)$ converge vers F'(U) dans L^q fort $\forall q < +\infty$.

Si F n'est affine sur aucun intervalle non réduit à un point on déduit de (8) que ν est une masse de Dirac. Alors pour la sous-suite considérée $U_{\varepsilon'} \to U$ L^q fort. Plus généralement si les $\nu_{x,t}$ sont toutes des masses de Dirac on en déduit la convergence forte de $U_{\varepsilon'}$ vers U ce qui donne le

<u>Théorème 3</u> : Si l'équation fonctionnelle (8) implique que ν est une masse de Dirac et si on a l'estimation (E) alors une sous suite U_ε converge presque partout et donc il existe au moins une solution de (1) satisfaisant les conditions d'entropie (3) . ∎

II. PROPRIETES DES SYSTEMES DE DEUX EQUATIONS

Les systèmes auxquels on s'intéresse ici sont hyperboliques strict :

Définition 3 : Le système (1) est hyperbolique strict si $F'(v)$ a ses valeurs propres réelles et distinctes qu'on note $\lambda_1(v) < \ldots < \lambda_p(v)$; on note $r_j(v)$ un vecteur propre associée à λ_j (et dépendant régulièrement de v).

On utilisera de nouvelles coordonnées utilisant les invariants de Riemann :

Définition 4 : Une fonction W est un j-invariant de Riemann si: $w'(v).r_j(v) \equiv 0$. ■

On verra apparaître aussi une autre notion

Définition 5 : Le $j^{ème}$ champ caractéristique est vraiment non linéaire si $\lambda_j'(v).r_j(v) \neq 0$. ■

Pour les systèmes de deux équations il y a deux simplifications importantes : localement on peut utiliser les invariants de Riemann comme nouvelles coordonnées et on peut exhiber une liste infinie d'entropies [4].

Nous ferons l'hypothèse suivante

(H) $\left\{\begin{array}{l}\text{On peut faire un changement de coordonnées global utilisant les} \\ \text{invariants de Riemann } w_1,\ w_2 \ (w_j \text{ est un j-invariant de Riemann}).\end{array}\right.$

Il faut noter que si $p > 2$ on ne peut pas en général trouver une fonction qui soit un j-invariant de Riemann pour tous les j sauf un et il n'y a plus de changements de coordonnées simplificateur.

Utiliser les invariants de Riemann revient à diagonaliser la matrice F' et cela simplifie les équations; en particulier on a

Lemme 2 : Une fonction φ est une entropie associée à ψ si on a

(10) $$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\psi}{\partial w_1} = \lambda_2 \dfrac{\partial\varphi}{\partial w_1} \\[2ex] \dfrac{\partial\psi}{\partial w_2} = \lambda_1 \dfrac{\partial\varphi}{\partial w_2} \end{array}\right.$$ (λ_1, λ_2 s'expriment en fonction de w_1, w_2). ■

<u>Lemme 3</u> : Le 1er champ est vraiment non linéaire si $\frac{\partial\lambda_1}{\partial w_2} \neq 0$, le 2ème l'est si $\frac{\partial\lambda_2}{\partial w_1} \neq 0$.

Lax [4] a construit deux familles d'entropies sous forme de développement asymptotique (une pour chaque invariant de Riemann). Celles de la première famille sont de la forme

$$(11) \quad \begin{cases} \varphi_k = e^{kw_1}(v_o + v_{1/k} + O(1/K)) \\ \psi_k = e^{kw_1}(H_o + H_{1/k} + O(1/k)) \end{cases} \qquad |k| \to \infty$$

Remarquons que les estimations sont obtenues sur un borné du plan w_1, w_2 et qu'on les utilisera tout à l'heure sur un rectangle contenant le support de ν . Il faut évidemment que les premiers termes vérifient les conditions de compatibilité :

$$(12) \quad \begin{cases} H_o = \lambda_2 v_o \\ \frac{\partial H_o}{\partial w_2} = \lambda_1 \frac{\partial v_o}{\partial w_2} \end{cases}$$

$$(13) \quad \begin{cases} H_1 + \frac{\partial\lambda_2}{\partial w_1} v_o = \lambda_2 v_1 \\ \frac{\partial H_1}{\partial w_2} = \lambda_1 \frac{\partial v_1}{\partial w_2} \end{cases}$$

Alors l'existence de (φ_k, ψ_k) de la forme (11) vérifiant (10) est obtenue grâce à des estimations L^∞ sur le système non homogène associé à (10) . Les deux remarques cruciales sont :

<u>Remarque 1</u> : On peut choisir $V_o > 0$ puisque V_o est astreint seulement à vérifier une équation du premier ordre homogène . ■

<u>Remarque 2</u> : Alors $H_1 - \lambda_2 V_1$ a le signe de $\frac{\partial\lambda_2}{\partial w_1}$ ■

III. REDUCTION DE ν [1]

Soit R le plus petit rectangle à coté parallèle aux axes contenant le support de ν. (On se place sous l'hypothèse H).

Théorème 4 [1] : Si ν vérifie (8) et si l'un des côtés verticaux (w_1 = constante) du rectangle R se trouve tout entier dans un zone où $\frac{\partial \lambda_2}{\partial w_1}$ ne change pas de signe alors le rectangle R est réduit à ce côté. De même si sur l'un des côtés horizontaux $\frac{\partial \lambda_1}{\partial w_2}$ ne change pas de signe.

Démonstration : On suppose que les côtés verticaux sont d'abscisses respectives $w_1^- < w_1^+$ (si $w_1^- = w_1^+$ il n'y a rien à démontrer)

1ère étape : Introduction des mesures frontières.
Pour k grand on considère la mesure μ_k définie par

$$(14) \qquad \langle \mu_k , g\rangle = \frac{\langle \nu,\ \varphi_k g \rangle}{\langle \nu ,\varphi_k\rangle} \qquad \forall\ g \text{ continue}$$

Comme pour k grand on a $\varphi_k = e^{kw_1}(v_o + O(1/k))$ et $v_o > 0$ on a $\langle \nu,\ \varphi_k \rangle > 0$ ce qui permet de voir que μ_k est une probabilité à support dans R.

Les μ_k était des probabilités à support borné, on extrait maintenant une suite k_n tendant vers $+\infty$ telle que

$$(15) \qquad \langle \mu_{\pm k_h} , g\rangle \longrightarrow \langle \mu_{\pm} , g\rangle \qquad \forall\ g \text{ continue}$$

Comme R est le plus petit rectangle contenant le support de ν on voit que ν charge les bandes $[w_1^-, w_1^- + \alpha]$ et $[w_1^+ - \alpha , w_1^+]$ pour tout $\alpha > 0$ et on déduit que

$$(16) \qquad \begin{cases} \mu_+ \text{ est à support dans } \{w_1 = w_1^+\} \cap R \\ \mu_- \text{ est à support dans } \{w_1 = w_1^-\} \cap R \end{cases}$$

2ème étape : Une identité.
On applique l'équation fonctionnelle pour les entropies φ et φ_k et on fait tendre k vers $\pm\infty$ après avoir divisé par $(\nu,\ \varphi_k)$.

On remarque que $\psi_k = \varphi_k(\lambda_2 + O(1/k))$ ce qui montre que

$$\frac{\langle\nu,\psi_k\rangle}{\langle\nu,\varphi_k\rangle} = \frac{\langle\nu,\lambda_2\varphi_k\rangle}{\langle\nu,\varphi_k\rangle} + O(\tfrac{1}{k}) \quad \text{et donc} \quad \frac{\langle\nu,\psi_k\rangle}{\langle\nu,\varphi_k\rangle} \to \langle\mu_\pm, \lambda_2\rangle$$

De même pour le terme $\dfrac{\langle\nu,\varphi\psi_k\rangle}{\langle\nu,\varphi_k\rangle}$.

On pose

17
$$\lambda_2^\pm = \langle\mu_\pm, \lambda_2\rangle$$

Alors on déduit l'identité

18
$$\begin{cases} \langle\mu_\pm, \psi - \lambda_2\varphi\rangle = \langle\nu, \psi - \lambda_2^\pm\varphi\rangle \\ \text{pour toute entropie } \varphi \end{cases}$$

<u>3ème étape</u> : On montre maintenant

19
$$\lambda_2^+ = \lambda_2^-$$

Pour cela on applique l'équation fonctionnelle pour les entropies φ_k et φ_{-k} et on divise par $\langle\nu,\varphi_k\rangle\langle\nu,\varphi_{-k}\rangle$.

Le membre de droite tend vers $\lambda_2^- - \lambda_2^+$. Celui de gauche a comme numérateur $\langle\nu, \varphi_k\psi_{-k} - \varphi_{-k}\psi_k\rangle$ qui tend vers 0 puisque d'après 11 $\varphi_k\psi_{-k} - \varphi_{-k}\psi_k = O(1/k)$. Le dénominateur est $\langle\nu,\varphi_k\rangle\langle\nu,\varphi_{-k}\rangle$ qui tend vers $+\infty$ car pour tout $\alpha > 0$ on a des minorations ,

$$\langle\nu,\varphi_k\rangle \geq C_\alpha\, e^{k(w_1^+ - \alpha)} \quad \text{quand } k \text{ tend vers } +\infty$$

$$\langle\nu,\varphi_{-h}\rangle \geq C_\alpha\, e^{-k(w_1^- + \alpha)} \quad \text{quand } k \text{ tend vers } +\infty$$

et il suffit de prendre $\alpha < w_1^+ - w_1^-$. Donc le membre de gauche tend vers 0.

<u>4ème étape</u> : On montre maintenant

20
$$(\mu_\pm, H_1 - \lambda_2 V_1) = 0 \qquad (\text{si } W_1^- < W_1^+)$$

En effet, en combinant 18 et 19 , on déduit que

$$<\mu_+ , \psi - \lambda_2 \varphi> \; = \; <\mu_- , \psi - \lambda_2 \varphi> \quad \text{pour toute entropie } \varphi .$$

Encore une fois on prend φ_k et on trouve

$$e^{kw_1^+}\left(\frac{<\mu_+ , H_1 - \lambda_2 V_1>}{k} + O(1/k)\right) = e^{kw_1}\left(\frac{<\mu_- , H_1 - \lambda_2 V_1>}{k} + O(1/k)\right).$$

et comme $w_1^+ > w_1^-$ les comportements des exponentielles sont différents et en faisant tendre k vers $+\infty$ ou $-\infty$ on obtient (20).

Le théorème est donc maintenant démontré car d'après la remarque 2 $H_1 - \lambda_2 V_1$ a le signe de $\frac{\partial\lambda_2}{\partial w_1}$ et donc si l'un des côtés est dans une zone où $\frac{\partial\lambda_2}{\partial w_1} \neq 0$ on ne peut avoir $<\mu, H_1 - \lambda_2 V_1> = 0$ pour une probabilité à support dans cette zone : on a nécessairement $w_1^- = w_1^+$.

<u>Corollaire 1</u> : Si chacun des champs caractéristiques est vraiment non linéaires alors ν est une masse de Dirac .

En effet le rectangle R doit être inclus dans $\{w_1 = \text{constante}\}$ et en suite dans $\{w_2 = \text{constante}\}$.

<u>Corollaire 2</u> : Si chacun des champs caractérisitques est vraiment non linéaire en dehors d'une courbe $w_2 = f(w_1)$ avec f strictement monotone alors ν est une masse de Dirac.

<u>Démonstration</u> : Si l'un des côtés ne rencontre pas la courbe alors R est réduit à ce côté et donc R étant dans une seule zone est réduit à un point. Chaque côté rencontre donc la courbe et, comme elle est strictement monotone, la courbe passe par deux sommets opposés : $A = (w_1^-, f(w_1^-))$ et $B = (w_1^+ , f(w_1^+))$.

Alors nécessairement pour avoir (20) μ_- doit avoir son support en A et μ_+ son support en B ; donc $\mu_- = \delta_A$ et $\mu_+ = \delta_B$ et on déduit donc

$$(\psi - \lambda_2 \varphi)(A) = (\psi - \lambda_2 \varphi)(B)$$

pour toute entropie φ .

En renversant les rôles des variables on a aussi

$$(\psi - \lambda_1 \varphi)(A) = (\psi - \lambda_1 \varphi)(A)$$

pour toute entropie φ.

Ceci donne $(\lambda_2(A) - \lambda_1(A))\, \varphi(A) = (\lambda_2(B) - \lambda_1(B))\, \varphi(B)$ pour toutes les entropies φ, en particulier pour les fonctions affines, et ceci ne peut avoir lieu si $A \neq B$. Donc R est réduit à un point.

IV. UN EXEMPLE

On considère un modèle d'élasticité uni-dimensionnel

(21)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \dfrac{\partial}{\partial x}\, \sigma\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \\ w(x,0) = w_o(x) \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}(x,0) = w_1(x) \end{cases}$$

qu'on écrit sous forme de système en posant $u_1 = \dfrac{\partial w}{\partial x}$, $u_2 = \dfrac{\partial w}{\partial t}$.

(22)
$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} u_2 \\ \sigma(u_1) \end{pmatrix} = 0$$

Le système est hyperbolique strict si :

(23)
$$\sigma'(u_1) > 0$$

Les valeurs propres sont alors

(24)
$$\begin{cases} \lambda_1 = -\sqrt{\sigma'(u_1)} \\ \lambda_2 = +\sqrt{\sigma'(u_1)} \end{cases}$$

$\sqrt{\sigma'(u_1)}$ correspond à la vitesse de propagation des discontinuités du problème linéarisée, c'est la vitesse locale du son dans la barre modélisée par cette équation.

Les invariants de Riemann sont

(25)
$$\begin{cases} w_1 = u_2 - \int^{u_1} \sqrt{\sigma'(v)}\,dv \\ w_2 = u_2 + \int^{u_1} \sqrt{\sigma'(v)}\,dv \end{cases}$$

Un calcul immédiat montre que

(26) les 2 champs caractéristiques sont non linéaires aux points où $\sigma''(u_1) \neq 0$

On pourra alors appliquer le corollaire 2 si σ'' s'annule une seule fois (et le corollaire 1 si σ'' ne s'annule pas) car u_1 = constante correspond à $w_1 - w_2$ = constante.

Il faut noter que parmi les entropies φ il y en a une, strictement convexe, qui joue une rôle important : $\varphi = \frac{1}{2} u_2^2 + \int^{u_1} \sigma(v)\,dv$ qui est l'énergie totale, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. Dès l'apparition des discontinuités l'énergie cesse d'être conservée : une partie se transforme en chaleur, et comme le modèle ne contient pas la température, disparaît (si on introduit la température l'énergie totale est conservée mais l'entropie thermodynamique augmente).

Il reste encore à obtenir l'estimation E. On sait l'obtenir sous l'hypothèse suivante sur σ

(27)
$$\begin{cases} \sigma''(v) < 0 \quad \text{pour } v < v_o \\ \sigma''(v) > 0 \quad \text{pour } v > v_o \end{cases}$$

Alors l'estimation L^∞ est conséquence de l'existence d'ensembles invariants convexes bornés de la forme

(28)
$$C = \{(u_1,u_2) \ \alpha \leqslant w_1 \leqslant \beta \ , \ \gamma \leqslant w_2 \leqslant \beta$$

Ceci donne finalement le théorème d'existence suivant

Théorème 5 [1] : Sous les hypothèses (23) (27) , si les données du problème (21) vérifient $w(k,0) \in W^{1,\infty}$, $\frac{\partial w}{\partial t}(k,0) \in L^{\infty}$ alors il y a une solution globale vérifiant les conditions d'entropie . ■

L'unicité n'est connue que pour des solutions beaucoup plus régulières que celle obtenue ici.

V. CONCLUSION

Le résultat obtenu est très particulier mais il faut noter que c'est le premier de ce type pour un système, car les données n'ont pas à avoir une variation bornée et assez petite.

On peut conjecturer que les estimations L^{∞} pourront être obtenues dans des cas assez généraux (la méthode reste à trouver). Quand à réduire la probabilité ν à une masse de Dirac, je conjecture que si ν vérifie (8) alors λ_1 et λ_2 sont constants sur le plus petit rectangle R (à côtés parallèles aux axes dans le plan des invariants de Riemann) et qu'alors ν est un produit tensoriel. S'il n'y a pas dégénérescence linéaire sur un rectangle non réduit à un point la conjecture est que ν est une masse de Dirac.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. J. Di Perna : Convergence of approximate solutions to conservation laws. A paraître.

[2] J. Glimm : Solutions in the large for non linear hyperbolic systems of equations. Comm. Pure Appl. Math. 18 (1965) p. 697-715.

[3] P. D. Lax : Hyperbolic systems of conservation laws. Comm. Pure Appl. Math. 10 (1957) p. 537-566.

[4] P. D. Lax : Shock waves and entropy; contributions to non linear functional analysis. Ed. Zarantonello, Academic Press (1971) p. 603-634.

[5] L. Tartar : Equations hyperboliques non linéaires. Séminaire Goulaouic-Schwartz 1977-78, n° XVIII.

[6] L. Tartar : Compensated compactness and applications to partial differential equations, Research notes in mathematics, Non linear analysis and mechanics : Heriot Watt symposium, vol. 4, ed. Knops, Pitman 1979, p. 136-212.

*
* *