SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

F. MIGNOT

J. P. PUEL

Contrôle optimal dans des systèmes gouvernés par des inéquations variationnelles

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1981-1982), exp. nº 17, p. 1-20

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1981-1982____A16_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-MEYER-SCHWARTZ 1981-1982

CONTROLE OPTIMAL DANS DES SYSTEMES GOUVERNES PAR DES INEQUATIONS VARIATIONNELLES

par F. MIGNOT et J. P. PUEL

Exposé n° XVII

16 Février 1982

Nous étudions ici des problèmes de contrôle optimaux dans lesquels l'état du système est défini comme l'unique solution d'une inéquation variationnelle stationnaire.

La principale difficulté provient dû fait que l'état n'est pas une fonction différentiable du contrôle mais qu'il est seulement lipschtiz. Il est alors délicat de donner des conditions d'optimalité du premier ordre qui décrivent correctement la situation.

Ce problème a déjà été étudié tant sur le plan théorique que sur le plan numérique par plusieurs auteurs. Ils ont utilisé soit une approximation de l'inéquation variationnelle au moyen d'une pénalisation, Yvon [1], Saguez [7], soit la différentiabilité presque partout d'une application lipschitzienne, Mignot [7], Saguez [7], Zrikem [10], soit encore la notion de gradient généralisé, Barbu [1], [2]. Ici en utilisant la notion de dérivée conique (cf. Mignot [6]), dans le cas où il n'existe pas de contraintes sur le contrôle, nous obtiendrons des conditions nécessaires du premier ordre qui contiennent strictement celles obtenues par Barbu [2] dans certains cas (voir exemple modèle)

Dans la section 1, nous décrivons le problème ; les principaux résultats sont donnés dans la section 2, dans la section 3 nous donnons des résultats auxiliaires et démontrons les principaux théorèmes. Dans la section 4, nous donnons les résultats pour deux exemples, faisons quelques remarques supplémentaires et énonçons des problèmes ouverts.

I. POSITION DU PROBLEME

Afin de simplifier, nous prenons un exemple modèle et nous laissons au lecteur le soin d'adapter les démonstrations aux différentes variantes possibles.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et Γ sa frontière. Nous considérons un espace de Hilbert V tel que

$$H^1_o(\Omega) \hookrightarrow V \hookrightarrow H^1(\Omega),$$

et tel que si $u \in V$ alors $u^+ \in V$.

Nous notons par $((.,.))$ et par $\|.\|$ le produit scalaire et la norme associée dans V.

Nous considérons la forme bilinéaire $a(.,.)$ définie sur $V \times V$ par :

$$a(\phi,\psi) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_j \frac{\partial\phi}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega b_i \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \psi\, dx + \int_\Omega c\, \phi\psi dx \ ,$$

où a_{ij}, b_i, c appartiennent à $L^\infty(\Omega)$. La forme bilinéaire $a(.,.)$ est continue sur $V \times V$ et nous supposerons qu'elle est coercive :

(1.2) $$\exists\, \alpha > 0 \ , \quad \forall\, \phi \in V \qquad a(\phi,\phi) \geqslant \alpha \|\phi\|^2 \ .$$

Si $<.,.>$ désigne la dualité entre V' et V nous avons :

(1.3) $$\forall\, \phi,\psi \in V \quad , \qquad a(\phi,\psi) = <A\phi,\psi> \quad , \text{ où } A \in \mathscr{L}(V.V') \ .$$

Définissons maintenant

(1.4) $$K = \{\phi \ ,\phi \in V \ , \quad \phi \geqslant 0 \qquad \text{p.p. sur } \Omega\}.$$

L'ensemble K est un (cône) convexe fermé, non vide de V. Nous sommes alors en mesure de définir correctement le problème de contrôle.

Soit f donné dans V' et soit U_{ad} un convexe fermé de $L^2(\Omega)$. Pour chaque $v \in U_{ad}$ nous définissons $y = y(v)$ (l'état du système) comme la solution de l'inéquation variationnelle

(1.5) $$\begin{cases} a(y,\ \phi-y) \geqslant \ <f+v,\ \phi-y> \ , & \forall\, \phi \in K \ , \\ y \in K. \end{cases}$$

Nous pouvons interpréter 1.5) comme suit :

(1.6) $$\begin{cases} Ay = f + v + \xi \ , \\ y \geqslant 0 \ ; \quad \xi \geqslant 0, \\ <\xi,y> \ = 0 \ . \end{cases}$$

Des arguments classiques [3] [5] montrent que (1.5) a une unique solution.

Maintenant pour $z_d \in L^2(\Omega)$ et $N > 0$, nous définissons la fonction coût J par,

$$(1.7) \qquad J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega (y(v) - z_d)^2 dx + \frac{N}{2}\int_\Omega v^2 dx\ ,$$

et nous cherchons v_o, le contrôle optimal, solution de

$$(1.8) \qquad \begin{cases} v_o \in U_{ad} \\ J(v_o) = \underset{v \in U_{ad}}{\mathrm{Min}}\ J(v)\ . \end{cases}$$

Remarque 1.1 : On peut considérer des exemples variés de convexes de contrôles admissibles ou de fonctions coût pour lesquels on obtiendrait des résultats analogues. En particulier on peut considérer les cas suivants :

Exemple 1.1 :

$$V = H^1(\Omega)\ ;\quad K = \{\phi,\ \phi \in V,\ \phi \geqslant 0 \text{ p.p. sur } \Gamma\}.$$

Alors pour le même type de forme bilinéaire et le même contrôle nous obtenons un système dont l'état est gouverné par le problème de Signorini et nous pouvons introduire la fonction coût suivante : (avec $z_d \in L^2(\Gamma)$)

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Gamma (y(v) - z_d)^2 d\Gamma + \frac{N}{2}\int_\Omega v^2 dx$$

Exemple 1.2 : Si $y(v)$ est défini comme dans l'exemple 1.1 nous pouvons considérer une autre fonction coût (avec $z_d \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$)

$$J(v) = \frac{1}{2}\left|\frac{\partial y}{\partial \nu_A}(v) - z_d\right|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \frac{N}{2}\int_\Omega (v)^2 dx$$

où $\dfrac{\partial}{\partial \nu_A}$ désigne la dérivée conormale associée à A.

Exemple 1.3 : Si Ω est un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^n$ tel que sa frontière Γ est l'union de deux composantes connexes Γ_o et Γ_1, pour $v \in L^2(\Gamma_1)$ nous considérons $y(v)$ la solution de :

$$(1.11) \qquad \begin{cases} Ay(v) = f, \text{ dans } \Omega\ , \\ y(v) \geqslant 0,\ \dfrac{\partial y(v)}{\partial \nu_A} \geqslant 0,\ \dfrac{\partial y(v)}{\partial \nu_A} . y(v) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_o \\ y(v) = v \quad \text{sur } \Gamma_1\ , \end{cases}$$

et la fonction coût ($z_d \in H^{-1/2}(\Gamma_o)$),

(1.12) $$J(v) = \frac{1}{2} \left|\frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A} - z_d\right|^2_{H^{-1/2}(\Gamma_o)} + \frac{N}{2} \int_{\Gamma_1} (v)^2 d\Gamma.$$

Dans ce cas nous avons à définir ce que nous entendons exactement par solution de (1.11) quand $v \in L^2(\Gamma_1)$.

Exemple 1.4 : Pour $f \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$, $z_d \in \mathbb{R}$, nous considérons,

(1.13) $$y(v) = (f+v)^+$$

(1.14) $$J(v) = \frac{1}{2}(y(v) - z_d)^2 + \frac{N}{2}(v)^2.$$

Tout ce qui suit s'applique à ce cas très simple mais qui néanmoins contient les principales difficultés et qui donnera des contre exemples significatifs.

II. RESULTATS PRINCIPAUX

Nous commençons par un résultat simple d'existence du contrôle optimal.

Théorème 2.1 : Il existe un contrôle optimal $v_o \in U_{ad}$ (en général il n'y a pas unicité).

Afin d'obtenir des conditions d'optimalité du premier ordre nous supposons que $U_{ad} = L^2(\Omega)$.

Si y est solution de (1.5) nous définissons :

(2.1) $$Z_y = \{x, x \in \Omega, y(x) = 0\}$$

(cet ensemble est défini à un ensemble de capacité nulle près)

(2.2) $$S_y = \{\phi, \phi \in V, \phi \geqslant 0 \text{ q.p. sur } Z_y, \langle \xi,\phi \rangle = 0\}$$

(q.p.:quasi partout)

(et $\xi = Ay - f - v$ est défini par (1.6)).

<u>Théorème 2.2</u> : Le contrôle optimal v_o satisfait les conditions suivantes :

(i) $v_o \in V$

(ii) Si $y_o = y(v_o)$, il existe p_o tel que,

$$(2.3)\qquad \begin{cases} p_o \in S_{y_o} , \\ \forall \psi \in S_{y_o} , \; a(\psi,p_o) \leqslant \int_\Omega (y_o - z_d)\, \psi \, dx , \\ p_o + Nv_o = 0 . \end{cases}$$

<u>Remarque 2.1</u> : Si nous définissons $(S^{a^*}_{y_o})^o$ (le cône polaire de S_{y_o} par rapport à la forme adjointe $a^*(.,.)$) par :

$$(2.4)\qquad (S^{a^*}_{y_o})^o = \{\phi,\ \phi \in V,\ \forall\ \psi \in S_{y_o} ,\ a(\psi, \phi) \leqslant 0\},$$

nous pouvons encore écrire (2.3) sous la forme :

$$(2.5)\qquad \begin{cases} p_o \in S_{y_o} , \\ p_o - (A^*)^{-1}(y_o - z_d) \in (S^{a^*}_{y_o})^o , \\ p_o + Nv_o = 0 . \end{cases}$$

En éliminant l'état adjoint p_o nous obtenons le :

<u>Corollaire 2.3</u> : Il existe au moins une solution (y,v) du système suivant :

$$(2.6)\qquad \begin{cases} \begin{cases} a(y,\phi - y) \geqslant \int_\Omega (f+v)(\phi - y)dx , & \forall\ \phi \in K , \\ y \in K, \end{cases} \\ \begin{cases} a(\psi,v) \geqslant -\dfrac{1}{N}\int_\Omega (y-z_d)\,\psi\, dx , & \forall\ \psi \in S_y \\ -v \in S_y \end{cases} \end{cases}$$

et (y_o,v_o) est une telle solution.

3. DEMONSTRATIONS

3.1 Démonstration du théorème 2.1

Nous savons que $J(v) \geqslant 0$, $\forall\, v \in U_{ad}$.

Soit $j = \inf\limits_{v \in U_{ad}} J(v)$ et soit v_n une suite minimisante. Nous avons

$$\lim_{n \to \infty} J(v_n) = j\,.$$

Comme $N > 0$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée dans $U_{ad} \subset L^2(\Omega)$, et nous pouvons en extraire une sous suite faiblement convergente $(v_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$v_{n_k} \rightharpoonup v_o \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible quand } k \to \infty\,.$$

Comme U_{ad} est convexe fermé, $v_o \in U_{ad}$. Comme Ω est borné l'injection de $L^2(\Omega)$ dans V' est compacte, donc $v_{n_k} \to v_o$ dans V' fort quand $k \to \infty$.

Ainsi nous avons :

$$y(v_{n_k}) \to y(v_o) = y_o \quad \text{dans } V \quad \text{quand } k \to \infty$$

Utilisant la semi-continuité inférieure pour la topologie faible dans $L^2(\Omega)$ de la norme nous obtenons :

$$j = \varliminf_{k \to \infty} J(v_{n_k}) \geqslant J(v_o)\,,$$

et

$$J(v_o) = \operatorname*{Min}_{v \in U_{ad}} J(v)\,.$$

3.2 Démonstration du théorème 2.2

Nous donnons d'abord les résultats obtenus en approximant l'inéquation variationnelle par une suite d'équation pénalisée. Cette méthode a été utilisée par Barbu [1.2] et Mignot-Tartar [8] mais comme nous le verrons, elle ne donne pas l'ensemble du théorème 2.2.

Néanmoins cette méthode montre le fait important que le contrôle optimal v_o appartient à V.

Pour $\delta > 0$ considérons :

$$\beta^\delta(r) = \begin{cases} r + \frac{\delta}{2} & \text{si} \quad r \leqslant -\delta . \\ -\frac{1}{2\delta}\, r^2 & \text{si} \quad -\delta \leqslant r \leqslant 0, \\ 0 & \text{si} \quad r \leqslant 0. \end{cases}$$

Pour $\varepsilon > 0$ nous notons par $y_\varepsilon(v)$ l'unique solution (qui existe) de l'équation pénalisée :

$$\text{(3.1)} \qquad \begin{cases} A\, y_\varepsilon(v) + \frac{1}{\varepsilon}\ \beta^\delta(y_\varepsilon(v)) = f + v, \\ y_\varepsilon(v) \in V . \end{cases}$$

Utilisant une technique due à Barbu [2] nous définissons une fonction coût J_ε :

$$\text{(3.2)} \qquad J_\varepsilon(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega (y_\varepsilon(v) - z_d)^2 dx + \frac{N}{2}\int_\Omega (v)^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega (v-v_o)^2 dx ,$$

où v_o est la solution de (1.8) donnée par le théorème 2.1.

Nous pouvons alors obtenir aisément le résultat suivant (les démonstrations sont classiques) :

<u>Théorème 3.1</u> : Pour chaque ε positif, il existe $v_\varepsilon \in L^2(\Omega)$ tel que :

$$J_\varepsilon(v_\varepsilon) = \min_{v \in L^2(\Omega)} J_\varepsilon(v) ,$$

de plus on a :

$$\text{(3.4)} \qquad \begin{cases} Ay_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\,\beta^\delta(y_\varepsilon) = f + v_\varepsilon , \\ y_\varepsilon \in V, \\ A^* p_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}(\beta^\delta)'(y_\varepsilon) p_\varepsilon = (y_\varepsilon - z_d) \\ p_\varepsilon \in V \\ p_\varepsilon + N\, v_\varepsilon + (v_\varepsilon - v_o) = 0 \end{cases}$$

Utilisant le théorème 3.1, nous allons obtenir des estimations a priori qui impliquent les résultats de convergence suivants :

Théorème 3.2 : Quand ε tend vers O nous avons :

$v_\varepsilon \to v_o$ dans $L^2(\Omega)$ fort,

$y_\varepsilon \to y_o$ dans V fort,

$p_\varepsilon \rightharpoonup p_o$ dans V faible,

avec

$$p_o + Nv_o = 0 \tag{3.6}$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} Ay_o = f + v_o + \xi_o \ , \\ y_o \geqslant 0, \quad \xi_o \geqslant 0, \ \langle \xi_o, y_o \rangle = 0, \\ A^* p_o = (y_o - z_d) + \eta_o, \\ \langle \eta_o, y_o \rangle = \langle \xi_o, p_o \rangle = 0, \\ \langle \eta_o, p_o \rangle \leqslant 0 \ . \end{array}\right. \tag{3.7}$$

Remarque 3.1 :

1) Dans la suite nous n'utiliserons pas (3.7) mais plutôt (3.6) qui montre que $v_o \in V$.

2) En fait avec la propriété $v_o \in V$ nous obtiendrons directement un système plus précis que (3.7) comme le montrera un exemple dans la section 4).

Démonstration : Nous savons que pour v fixé dans $L^2(\Omega)$, quand ε tend vers O, $y_\varepsilon(v) \to y(v)$ dans V fort (car la pénalisation $\frac{1}{\varepsilon}\beta^\delta(.)$ est adaptée au convexe K).

A partir de (3.3) nous avons ,

$$J_\varepsilon(v_\varepsilon) \leqslant J_\varepsilon(v_o) = \frac{1}{2}\int_\Omega (y_\varepsilon(v_o) - z_d)^2 dx + \frac{N}{2}\int_\Omega (v_o)^2 dx \ .$$

Donc $J_\varepsilon(v_o) \longrightarrow J(v_o)$ quand $\varepsilon \to 0$ et

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon(v_\varepsilon) \leqslant J(v_o) \tag{3.8}$$

De plus $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est borné dans $L^2(\Omega)$ (indépendant de ε), nous pouvons donc extraire une sous-suite (notée encore v_ε) telle que :

$$v_\varepsilon \rightharpoonup \bar{v}_o \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible si } \varepsilon \to 0.$$

Alors $v_\varepsilon \to \bar{v}_o$ dans V' fort si $\varepsilon \to 0$, nous en déduisons que

$$y_\varepsilon(v_\varepsilon) \to y(\bar{v}_o) \quad \text{dans } V \text{ fort si } \varepsilon \to 0.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\liminf_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(v_\varepsilon) &\geqslant \frac{1}{2}\int_\Omega |y(\bar{v}_o) - z_d|^2dx + \frac{N}{2}\int_\Omega (v_o)^2dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\bar{v}_o - v_o|^2dx = \\ &= J(\bar{v}_o) + \frac{1}{2}\int_\Omega (\bar{v}_o - v_o)|^2dx \\ &\geqslant J(v_o) + \frac{1}{2}\int_\Omega (\bar{v}_o - v_o)^2dx ,\end{aligned}$$

(d'après (1.8)).

A partir de (3.8) et (3.2) nous obtenons :

$$J_\varepsilon(v_\varepsilon) \to J(v_o) \quad \text{si} \quad \varepsilon \to 0,$$

$$\bar{v}_o = v_o ,$$

$$v_\varepsilon \to v_o \quad \text{dans } L^2(\Omega) \quad \text{fort si } \varepsilon \to 0,$$

Alors $y_\varepsilon = y_\varepsilon(v_\varepsilon)$ tend vers $y_o = y(v_o)$ dans V fort si ε tend vers 0.

Multipliant la seconde équation de (3.4) par p_ε et utilisant le fait que $(\beta^\delta)'(y_2) \geqslant 0$ nous obtenons que p_ε est borné dans V, indépendamment de ε . Après extraction d'une sous-suite nous avons , $p_\varepsilon \rightharpoonup p_o$ dans V faible si $\varepsilon \to 0$.

La dernière équation de (3.4) donne $p_o + Nv_o = 0$, et alors toute la suite p_ε converge vers $p_o = -Nv_o$.

Ceci donne la première partie du théorème 3.2. Comme il a déjà été mentionné, la seconde partie du théorème 3.2 sera une conséquence du résultat général, néanmoins nous en donnons ici une preuve directe en supposant que f est dans $L^2(\Omega)$.

Posons :

$$\xi_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon}\beta^\delta(y_\varepsilon) = Ay_\varepsilon - (f + v_\varepsilon),$$

$$\eta_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon}(\beta^\delta)'(y_\varepsilon)\, p_\varepsilon = A^* p_\varepsilon - (y_\varepsilon - z_d).$$

D'après (3.5) nous savons que, lorsque $\varepsilon \to 0$:

$$\xi_\varepsilon \to \xi_o \quad \text{dans } V' \quad \text{où} \quad \xi_o = Ay_o - (f + v_o),$$

$$\eta_\varepsilon \rightharpoonup \eta_o \quad \text{dans } V' \text{ faible où} \quad \eta_o = A^* p_o - (y_o - z_d).$$

D'après la définition de β^δ nous avons $\langle\eta_\varepsilon, y_\varepsilon^+\rangle = 0$. Quand $\varepsilon \to 0$

$$\eta_\varepsilon \rightharpoonup \eta_o \quad \text{dans } V' \text{ faible},$$

$$y_\varepsilon^+ \to y_o^+ = y_o \quad \text{dans } V \text{ fort},$$

ainsi,

$$\langle\eta_\varepsilon, y_\varepsilon^+\rangle \to \langle\eta_o, y_o\rangle \quad \text{dans } \mathbb{R}, \text{ et}$$

$$\langle\eta_o, y_o\rangle = 0 .$$

Nous avons également,

$$\langle\xi_\varepsilon, p_\varepsilon\rangle = \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \beta^\delta(y_\varepsilon)p_\varepsilon\, dx$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_{\{y_\varepsilon \leq -\delta\}} (y_\varepsilon + \frac{\delta}{2})p_\varepsilon\, dx - \frac{1}{2\delta}\int_{\{-\delta \leq y_\varepsilon \leq 0\}} p_\varepsilon y_\varepsilon^2 dx$$

et

$$\langle\eta_\varepsilon, y_\varepsilon\rangle = \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega (\beta^\delta)'(y_\varepsilon)p_\varepsilon\, y_\varepsilon dx = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\{y_\varepsilon \leq -\delta\}} p_\varepsilon y_\varepsilon^2 dx - \frac{1}{\delta}\int_{\{-\delta \leq y_\varepsilon \leq 0\}} y_\varepsilon^2 p_\varepsilon dx\}.$$

Alors

$$<\xi_\varepsilon, p_\varepsilon> - \frac{1}{2}<\eta_\varepsilon, y_\varepsilon> = \frac{1}{2\,\varepsilon}\int_{\{y_\varepsilon \leqslant -\delta\}} (y_\varepsilon + \delta) p_\varepsilon dx \ ,$$

et

$$|<\xi_\varepsilon, p_\varepsilon> - \frac{1}{2}<\eta_\varepsilon, y_\varepsilon>| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\Big[\int_{\{y_\varepsilon \leqslant -\delta\}} ((y_\varepsilon)^2 + \delta^2) dx\Big]^{\frac{1}{2}} \cdot \Big[\int_{\{y_\varepsilon \leqslant -\delta\}} (p_\varepsilon)^2 dx\Big]^{1/2}$$

Multipliant la première équation de (3.4) par $\frac{1}{3}\beta^\delta(y_\varepsilon)$ nous voyons que $\frac{1}{\varepsilon}\ |\beta^\delta(y_\varepsilon)|_{L^2(\Omega)}$ est borné et donc aussi

$$\frac{1}{\varepsilon}\Big[\int_{\{y_\varepsilon \leqslant -\delta\}} ((y_\varepsilon)^2 + \delta^2) dx\Big]^{1/2} .$$

Comme $V \subset L^q(\Omega)$, avec $q > 2$ nous avons :

$$\Big[\int_{\{y_\varepsilon \leqslant -\delta\}} (p_\varepsilon)^2 dx\Big]^{1/2} \leqslant \Big[\int_{\{y_\varepsilon \leqslant -\delta\}} (p_\varepsilon)^q dx\Big]^{1/q} . [\text{mes}\{y_\varepsilon \leqslant -\delta\}]^{\frac{q}{2(q-2)}}$$

$$\leqslant C \, \| p_\varepsilon \| \, [\text{mes}\{y_\varepsilon \leqslant -\delta\}]^{\frac{q}{2(q-2)}} ,$$

comme $\| p_\varepsilon \|$ est borné si nous montrons que $\text{mes}\{y_\varepsilon \leqslant -\delta\}$ tend vers 0 quand ε tend vers 0 nous aurons :

$$<\xi_\varepsilon, p_\varepsilon> - \frac{1}{2} <\eta_\varepsilon, y_\varepsilon> \to 0$$

et

$$<\xi_\varepsilon, p_\varepsilon> \to 0 \text{ si } \varepsilon \to 0 \text{ car } <\eta_\varepsilon, y_\varepsilon> \to 0 \text{ si } \varepsilon \to 0 .$$

Nous savons que

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\{y_\varepsilon \leqslant -\delta\}} y_\varepsilon^2 dx \leqslant M \ ,$$

donc

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\{y_\varepsilon \leqslant -\delta\}} \delta^2 dx \leqslant M \ , \quad \text{et}$$

$$|\text{mes } \{y_\varepsilon \leqslant \delta\}| \ \leqslant \ \frac{M}{\delta^2}\,\varepsilon^2,$$

ainsi

$$\langle \xi_\varepsilon, p_\varepsilon\rangle \ \to 0 \quad \text{si} \quad \varepsilon \to 0,$$

et

$$\langle \xi_o, p_o\rangle \ = 0 \ .$$

Multipliant l'équation donnant p_ε dans (3.4) par p_ε, nous obtenons,

$$a(p_\varepsilon,p_\varepsilon) - \int_\Omega (y_\varepsilon - z_d)p_\varepsilon dx = -\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega (\beta^\delta)'(y_\varepsilon)p_\varepsilon^2 dx \leqslant 0.$$

Quand $\varepsilon \to 0$

$$p_\varepsilon \rightharpoonup p_o \quad \text{dans } V \text{ faible},$$

$$y_\varepsilon \longrightarrow y_o \quad \text{dans } V \text{ fort} \ .$$

Il en résulte :

$$a(p_o,p_o) - \int_\Omega (y_o - z_d)p_o dx \leqslant \liminf_{\varepsilon\to 0}[a(p_\varepsilon,p_\varepsilon) - \int_\Omega (y_\varepsilon - z_d)p_\varepsilon \, dx] \ \leqslant 0,$$

et

$$\langle \eta_o, p_o\rangle \leqslant 0.$$

Ceci termine la démonstration du théorème 3.2.

Maintenant en utilisant le résultat de régularité $v_o \in V$ nous démontrons le théorème 2.2.

Nous savons (cf. Mignot [6]) que l'application $v \mapsto y(v)$ possède en chaque point v une dérivée conique $w \mapsto Dy(v)(w)$ c'est à dire que pour chaque $w \in V'$ on a :

$$y(v + tw) = y(v) + tDy(v)(w) + \sigma(t), \ \forall \ t \geq 0.$$

avec $Dy(v)(w)$ solution de l'inéquation variationnelle :

$$(3.9) \qquad \begin{cases} Dy(v)(w) \in S_{y(v)} \quad \text{et} \quad \forall \ \phi \in S_{y(v)} \\ a(Dy(v)(w), \ \phi - Dy(v)(w)) \geq \langle w, \ \phi - Dy(v)(w)\rangle \end{cases}$$

où $S_{y(v)}$ est défini par (2.2).

Il en résulte que l'application $v \mapsto J(v)$ possède en chaque point v une dérivée conique $w \mapsto DJ(v)(w)$

$$(3.10) \qquad DJ(v)(w) = \int_{\Omega} (y(v) - z_d) Dy(v)(w) dx + N \int_{\Omega} v.w \ dx \ .$$

<u>Lemme 3.1</u> : Si v_o est un contrôle optimal, nous avons

$$(3.11) \qquad \forall \ w \in V' \quad , \quad DJ(v_o)(w) \geq 0 \ .$$

<u>Démonstration</u> : Il est évident que

$$\forall \ w \in L^2(\Omega) \quad , \quad DJ(v_o)(w) \geq 0,$$

l'inégalité (3.11) en résulte car $L^2(\Omega)$ est dense dans V' et $DJ(v_o)(.)$ est continue sur V'.

<u>Théorème 3.3</u> : Si $v_o \in V$ la condition d'optimalité (3.11) est satisfaite au point v_o si et seulement s'il existe p_o tel que :

$$(3.12) \qquad \begin{cases} p_o \in Sy(v_o) \ , \\ p_o - (A^*)^{-1}(y(v_o) - z_d) \in (S^{a*}_{y(v_o)})^o \ , \\ p_o + Nv_o = 0 \ . \end{cases}$$

Remarque 3.2 :

1) Le théorème 2.2 résulte immédiatement des théorèmes 3.3 et du lemme 3.1.

2) (3.12) et la définition de $y(v_o)$ contiennent (3.7).

Démonstration du théorème 3.3 :

Pour $\xi \in V$ et $y \in K$, soit $P_y(\xi)$ la solution de

$$(3.13)\quad \begin{cases} a(P_y(\xi),\ \phi - P_y(\xi)) \geqslant a(\xi, \phi - P_y(\xi)), & \forall \phi \in S_y\ , \\ P_y(\xi) \in S_y\ , \end{cases}$$

et

$P^*_y(\xi)$ la solution de :

$$(3.14)\quad \begin{cases} a(\phi - P^*_y(\xi),\ P^*_y(\xi)) \geqslant a(\phi - P^*_y(\xi), \xi)\ , & \forall\ \phi \in S_y, \\ P^*_y(\xi) \in S_y\ . \end{cases}$$

Alors nous avons, pour tout ξ dans V ,

$$(3.15)\qquad \xi = P_y(\xi) + Q_y(\xi),$$

$$(3.16)\qquad \xi = P^*_y(\xi) + Q^*_y(\xi).$$

où $Q_y(\xi) \in (S^a_y)^o$ (cône polaire de S_y par rapport à a)
$Q^*_y(\xi) \in (S^{a^*}_y)^o$ (cône polaire de S_y par rapport à a^*).

avec

$$(3.17)\quad \begin{cases} a(Q_y(\xi)\ ,\ P_y(\xi)) = 0\ , \\ a(P^*_y(\xi)\ ,\ Q^*_y(\xi)) = 0\ . \end{cases}$$

Notons que nous avons :

$$(3.18)\qquad \forall\ \phi \in S_y\ , \qquad \forall\ \psi \in (S^a_y)^o \qquad a(\psi,\varphi) \leqslant 0,$$

$$(3.19)\qquad \forall\ \phi \in S_y\ , \qquad \forall\ \psi^* \in (S^{a^*}_y)^o \qquad a(\varphi,\ \psi^*) \leqslant 0\ .$$

Maintenant la relation (3.9) est équivalente à $(y = y(v))$

$$Dy(v)(w) = P_y(A^{-1}w),$$

et si $Nv_o \in V$, on peut écrire

$$\begin{aligned} DJ(v_o)(w) &= \int_\Omega (y_o - z_d)Dy(v_o)(w)dx + N\int_\Omega v_o\, w\, dx \\ &= a(P_{y_o}(A_w^{-1}),\ (A^*)^{-1}(y_o - z_d)) + a(A^{-1}w, Nv_o) \\ &= a(P_{y_o}(A^{-1}w), (A^*)^{-1}(y_o - z_d) + Nv_o) + a(Q_{y_o}(A^{-1}w), Nv_o). \end{aligned}$$

soit

$$\begin{cases} \xi_o = -(A^*)^{-1}(y_o - z_d) - Nv_o\ , \\ \xi_1 = -Nv_o\ . \end{cases}$$

Nous avons

$$(3.20)\qquad DJ_o(v)(w) = -a(P_{y_o}(A^{-1}w), \xi_o) - a(Q_{y_o}(A^{-1}w),\ \xi_1)$$

Supposons que (3.11) ait lieu au point $v_o \in V$:

$$DJ_o(v)(w) \geqslant 0\ ,\ \forall\, w \in V'\ .$$

Si on pose $u = A^{-1}w$ la condition précédente devient, compte tenu de (3.20)

$$(3.21)\qquad a(P_{y_o}(u), \xi_o) + a(Q_{y_o}(u),\ \xi_1) \leqslant 0 \qquad \forall\, u \in V\ .$$

Cette relation est équivalente à :

$$(3.22)\begin{cases} \text{i)} & \xi_o \in (S^{a^*}_{y(v_o)})^o, \\ \text{ii)} & \xi_1 \in S_{y(v_o)} \end{cases}$$

En effet en prenant $u \in S_{y(v_o)}$, $P_{y_o}(u) = u$, $Q_{y_o}(u) = 0$ donc (3.21) s'écrit :

$$a(u, \xi_o) \leqslant 0\ ,\ \forall\, u \in Sy(v_o)\ .$$

ce qui implique (3.22) i).

De même en prenant $u \in (S^a_{y(v_o)})^o$ on obtient (3.22) ii). L'implication (3.22) ⇒ (3.21) est conséquence de (3.18) et (3.19).

Ceci termine les démonstrations des théorèmes 3.3 et 2.2.

4. EXEMPLES. COMMENTAIRES ET PROBLEMES OUVERTS

Nous donnons les résultats pour les exemples 1.1 et 1.2.

Exemple 1.1 :

- le contrôle est distribué : $v \in L^2(\Omega) = U_{ad}$
- l'état $y(v)$ est solution du problème de Signorini :

$$\text{(3.23)} \quad \begin{cases} a(y(v), \varphi - y(v)) \geqslant \int_\Omega (f+v)(\varphi - y(v))dx \ , \ \forall \varphi \in K \\ \qquad\qquad K = \{\varphi, \varphi \in H^1(\Omega), \ \varphi/\Gamma \geqslant 0\} \\ y(v) \in K \end{cases}$$

- le coût est frontière ($z_d \in L^2(\Gamma)$)

$$\text{(3.24)} \qquad J(v) = \frac{1}{2}\int_\Gamma |y(v) - z_d|^2 d\Gamma + \frac{N}{2}\int_\Omega v^2 dx$$

Comme dans le cas modèle il existe un contrôle optimal v_o, $v_o \in L^2(\Omega)$:

$$J(v_o) = \underset{v \in L^2(\Omega)}{\mathrm{Min}} J(v) .$$

Les contrôles optimaux possèdent la régularité supplémentaire $v_o \in H^1(\Omega)$ (obtenue grâce à la pénalisation de l'état).

Système d'optimalité

Rappelons que si y est solution de (3.23), alors $y \in H^2(\Omega)$, $y \in H^{3/2}(\Gamma)$ et $\frac{\partial y}{\partial n} \in H^{1/2}(\Gamma)$. Soit alors

$$\begin{aligned} Z &= \{x, x \in \Gamma, y(x) = 0\} \\ S_y &= \{\varphi, \varphi \in H^1(\Omega), \ \varphi/Z \geqslant 0 \quad \text{q.p.} \quad \int \varphi \frac{\partial y}{\partial n} d\Gamma = 0\} \\ &= \{\varphi, \varphi \in H^1(\Omega), \ \varphi/Z \geqslant 0 \quad \text{q.p.}, \quad \varphi = 0 \ \text{p.p.} \\ &\text{sur } \{x, x \in \Gamma, \ \frac{\partial y}{\partial n}(x) \neq 0\}\} \end{aligned}$$

Nous pouvons alors énoncer la

Proposition 4.1 : Soit v_o un contrôle optimal de l'exemple 1.1. Alors il existe $y_o = y(v_o)$, p_o, éléments de $H^1(\Omega)$ tels que (v_o, y_o, p_o) soit solution du système d'inéquations variationnelles suivantes :

i) inéquation (3.23)

ii) inéquation adjointe :

$$\begin{cases} a(\varphi, p_o) \geq \int_\Gamma (y_o - z_d)\varphi \, d\Gamma, & \forall \varphi \in S_{y_o} \\ p_o \in S_{y_o} \end{cases}$$

iii) condition d'optimalité

$$p_o + Nv_o = 0$$

Exemple 1.2 :

- le contrôle et l'état sont définis comme dans l'exemple 1.1 mais le coût $J(v)$ est donné par

$$J(v) = \frac{1}{2} \left| \frac{\partial y}{\partial \nu_A}(v) - z_d \right|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \frac{N}{2} \int_\Omega v^2 dx .$$

Comme précédemment on a existence de contrôles optimaux et ces contrôles appartiennent à $H^1(\Omega)$.

Système d'optimalité

Soit v_o un contrôle optimal. Alors il existe $y_o = y(v_o)$, p_o appartenant à $H^1(\Omega)$ tels que (v_o, y_o, p_o) soit solution du système d'équations et d'inéquations quasivariationnelles suivantes :

i) inéquation d'état (3.23)

ii) $\begin{cases} A^* p_o = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ p_o = (-\Delta_\Gamma)^{-1/2} \left(\dfrac{\partial y_o}{\partial \nu_A} - z_d \right) \quad \text{sur } \Gamma . \end{cases}$

($(-\Delta_\Gamma)$ opérateur de Laplace Beltrami sur la variété Γ)

iii) Condition d'optimalité

$$\begin{cases} a(\varphi, -Nv_o + p_o) \leq -a(\varphi, p_o), \; \forall \varphi \in S_{y_o} , \\ -Nv_o + p_o \in S_{y_o} . \end{cases}$$

(S_{y_o} a la même signification que dans l'exemple 1.1)

Commentaires

1. Montrons que le théorème 2.2 avec l'information supplémentaire $v_o \in V$ implique le théorème 3.2 et plus particulièrement (3.7).

Si nous posons

$$\eta_o = A^* p_o - (y_o - z_d)$$

nous obtenons à partir de (2.3)

$$\begin{cases} p_o \in S_{y_o} \\ \langle \eta_o, \psi \rangle \leq 0 \quad , \quad \forall \; \psi \in S_{y_o} \quad , \end{cases}$$

ainsi

$$\langle \eta_o, p_o \rangle \leq 0 \quad \text{et} \quad \langle \xi_o, p_o \rangle = 0 \; .$$

De plus $y_o \in S_{y_o}$ et $-y_o \in S_{y_o}$ donc $\langle \eta_o . y_o \rangle = 0$
Tout ceci montre (3.7).

2. Nous allons donner un contre exemple élémentaire montrant que le théorème 2.2 est strictement plus fort que le théorème 3.2 .

Prenons $V = \mathbb{R}$ et pour $v \in \mathbb{R}$

$$y(v) = (-1+v)^+$$

($y(v)$ est solution d'une inéquation variationnelle dans $\mathbb{R}$) .

La fonction coût est définie par

$$J(v) = (y(v) - 1)^2 + v^2 \; ,$$

alors

$$J(v) = \begin{cases} 2v^2 - 4v + 4 & , \text{ si } \; v \geq 1, \\ v^2 + 1 \; , & \quad \text{si } \; v \leq 1 \; . \end{cases}$$

Ce contrôle optimal v_o est unique, $v_o = 0$. Mais le point $v_1 = 1$, auquel correspond $y(v_1) = 0$ et $p(v_1) = -1$ satisfait (3.7) mais ne satisfait pas (2.3). Et la seule solution de (2.3) est $v_o = 0$ avec $y(v_o) = 0$ et $p(v_o) = 0$. Ainsi nous voyons que (2.3) est plus fort que (3.7). Notons aussi que dans ce cas 0 appartient au gradient généralisé de J au point v_1.

3. L'application $v \mapsto y(v)$ est lipschitzienne de $L^2(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, elle est donc différentiable Gateaux aux points d'un ensemble dense A, $A \subset L^2(\Omega)$. Si $v_o \in A$ le système d'optimalité donné par lé théorème 2.2 se simplifie (en fait le cône Sy_o devient un sous-espace vectoriel) (cf. Mignot [6]).

4. Problèmes ouverts

- Comment résoudre directement le système d'optimalité (2.6) ? Ceci est important pour les applications numériques.
- Que se passe-t-il si on remplace le convexe K par d'autres convexes comme

$$K' = \{v, v \in H_o^1(\Omega),\ |\mathrm{grad}\ v(x)| \leqslant 1 \quad \text{p.p. dans } \Omega\}$$

Dans cette situation nous ne savons pas si l'application $v \to y(v)$ admet en chaque point v une dérivée conique.

- Que peut on dire dans le cas d'évolution même avec le convexe K. De nouveau nous ne savons pas si $v \mapsto y(v)$ admet une différentielle conique en chaque point.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. Barbu : Necessary conditions for distributed control problems governed by parabolic variational inequalities. Siam Journal on Control and Optimization. Vol. 19, n° 1 (1981) pp. 64-86.

[2] V. Barbu : Necessary conditions for non convex distributed control problems governed by elliptic variational inequalities. J. Math. Anal. Appl. (to appear).

[3] J. L. Lions : Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires. Dunod-Gauthier-Villars, 1979.

[4] J. L. Lions : Sur le contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Dunod-Gauthier-Villars, Paris 1968.

[5] J. L. Lions et G. Stampacchia : Variational inequalities. C. P. A. M. XX (1967) 493-519.

[6] F. Mignot : Contrôle dans les inéquations variationnelles elliptiques. J. F. A. 22 (1976) pp. 130-185.

[7] CH. Saguez : Contrôle de problèmes à frontière libre. Thèse d'état. Université de Compiègne 1980.

[8] L. Tartar : Communication personnelle.

[9] J. R. Yvon : Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des inéquations variationnelles. Rapport Laboria (1974).

[10] ZRIKEM : Un problème de contrôle frontière dans une inéquation variationnelle. Thèse de 3ème cycle, Université Paris VI (1979).

* * *